Problem Skolema

*Marcin WIERZBIŃSKI**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wiele matematycznych problemów ma bardzo proste sformułowanie, ale ich istota dotyka głębokiej matematyki. Do tej grupy należy tytułowy problem Skolema. Sformułowanie wydaje się bliskie informatyce teoretycznej. Zainteresowany Czytelnik znający tzw. problem stopu może zauważyć tutaj analogię. Techniki służące do rozwiązania problemu pochodzą jednak nie z informatyki teoretycznej, a z algebry. Pełne rozwiązanie problemu przy pomocy tych technik wymagałoby istotnych postępów w tej dziedzinie algebry.

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest wzorem: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Jego pierwsze wyrazy to: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Zacznijmy od rozważenia szczególnego przypadku naszego pytania: czy ciąg Fibonacciego ma pewien wyraz równy zero poza wyrazem początkowym? Każdy bez trudu odpowie na to pytanie: nie, tylko dla $n = 0$ wyraz F_n jest równy zero. Kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego F_n zawsze będą dodatnie (suma wyrazów dodatnich jest dodatnia). Dojście do tego wniosku nie wymaga zaawansowanej matematyki. Czy odpowiedź na postawione wyżej pytanie dla dowolnego ciągu podobnej postaci jest taka prosta? Rozważmy na przykład następujący ciąg:

Pierwsze wyrazy tego ciągu to: 0, 1, 2, 1, −4, −11, −10, 13, 56, 73, −22, −263 ...

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}, \\ u_1 = 1, \\ u_0 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Na pierwszy rzut oka problem nie jest łatwy do rozstrzygnięcia. Wypisując kolejne wyrazy, można wysnuć hipotezę, że ów ciąg również, poza pierwszym, nie ma wyrazu równego zero. Problem można sformułować w ogólności dla większej liczby równań. Artykuł ten pokaże, że nawet dla prostych ciągów za rozwiązaniem stoi ciekawa matematyka.

Problem Skolema

Albert Thoralf Skolem (1887–1963)

Aby lepiej zrozumieć ten problem, należy najpierw wprowadzić potrzebne definicje. Liniowy ciąg rekurencyjny to taki ciąg liczb całkowitych $u_0, u_1, \ldots \in \mathbb{Z}$, że dla pewnych $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$, gdzie $a_0 \neq 0$, oraz dla każdego $n \geqslant k$ mamy $u_n = a_0 u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \ldots + a_{k-1} u_{n-k}$. Rząd takiego ciągu to k.

Problem Skolema to pytanie, czy dla danego liniowego ciągu rekurencyjnego istnieje takie n, że $u_n = 0$.

Obecnie wiadomo, że problem Skolema jest rozstrzygalny dla ciągów rzędu 2, 3 i 4, natomiast rozstrzygalność dla rzędu 5 pozostaje nadal otwarta. Znamy jednak rozstrzygalność różnych podprzypadków, nawet dla rzędu 5.

Okazuje się, że już dla ciągów rzędu 2 rozwiązanie nie jest trywialne. W artykule postaram się przedstawić intuicje stojące za ową nietrywialnością. Bardzo przydatne będzie, znane zapewne niektórym Czytelnikom, następujące twierdzenie dotyczące ciągów rekurencyjnych.

Twierdzenie: Dla każdego liniowego ciągu rekurencyjnego u_n rzędu k można obliczyć niezerowe liczby zespolone $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ oraz wielomiany $p_1, \ldots, p_j$ o współczynnikach algebraicznych takie, że:

$$u_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n + \ldots + p_j(n)\lambda_j^n$$

oraz

$$\deg(p_1) + \ldots + \deg(p_j) \leqslant k - j,$$

gdzie przez $\deg(p)$ oznaczamy stopień wielomianu p.

Powiemy, że liczba zespolona a jest liczbą algebraiczną, jeżeli jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Zbiór liczb algebraicznych oznacza się jako $\mathbb{A}$. Liczba $\sqrt{2}$ oraz i są algebraiczne, gdyż $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $p(x) = x^2 - 2$, a liczba i jest pierwiastkiem wielomianu $p(x) = x^2 + 1$.

Dla Czytelnika Zainteresowanego, znającego narzędzia z algebry liniowej, to twierdzenie nie jest trudne do udowodnienia.

Ciągi rekurencyjne rzędu 2

W dalszej części przedstawię techniki związane z rozwiązaniem problemu Skolema dla liniowych ciągów rekurencyjnych rzędu 2. Rozwiązanie będzie zależało od współczynników, które występują w twierdzeniu powyżej.

Rozwiązanie zadania M 1700.
Załóżmy odwrotnie: na planszy nie ma kwadratów 2×2 w tym samym kolorze lub pokolorowanych „w szachownicę”. Bok pola wspólny dla dwóch różnokolorowych pól nazwijmy *granicą*; oznaczmy przez N liczbę granic.

Każdy kwadrat 2×2 zawiera dokładnie trzy pola jednokolorowe lub dwa sąsiadujące białe pola i dwa sąsiadujące czarne pola. W obu przypadkach wewnątrz kwadratu znajdują się dokładnie dwie granice.

Łącznie mamy 99^2 kwadratów 2×2, a każda granica leży wewnątrz dokładnie dwóch z nich (ponieważ granice nie przylegają do obwodu planszy). Wobec tego $N = (2 \cdot 99^2)/2 = 99^2$, czyli jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony N musi być parzyste – w każdym wierszu i każdej kolumnie pierwsze i ostatnie pole jest czarne, dlatego musi nastąpić parzysta liczba zmian koloru.

Z powyższego twierdzenia wynika, że $j \leqslant 2$, gdyż suma stopni wielomianów p_i musi być nieujemna. Rozważymy kilka przypadków w zależności od wartości j oraz liczb λ_i.

Wartość $j = 1$

Z twierdzenia wynika, że
$$u_n = (an + b)\lambda_1^n.$$
Przypomnijmy, że $\lambda_1 \neq 0$. Zatem jeśli $u_n = 0$, to $(an + b) = 0$, co po przekształceniu daje $n = -\frac{a}{b}$ i kończy rozumowanie w tym przypadku.

Uwaga do pozostałych przypadków. W pozostałych przypadkach $j > 1$, a zatem $j = 2$. Wówczas
$$u_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n,$$
gdzie $\deg(p_1) + \deg(p_2) = 0$. Wielomiany p_1 oraz p_2 są więc stałe, czyli ciąg u_n ma postać
$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$
Dalej zakładamy, że $c_1, c_2 \neq 0$, w przeciwnym przypadku oczywiście zera nie wystąpią w ciągu u_n.

Wartość $j = 2$ oraz $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$

Jeśli $u_n = 0$, to $c_1\lambda_1^n = -c_2\lambda_2^n$, co równoważnie daje:
$$\frac{-c_1}{c_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n.$$
Bez straty ogólności można założyć, że $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Wówczas $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$. Zatem jeśli $u_n = 0$, to $n = \log_{|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|}(|\frac{c_1}{c_2}|)$, pozostaje nam więc sprawdzić, czy wyraz ciągu o tym indeksie jest faktycznie równy zero.

Wartość $j = 2$ oraz $|\lambda_1| = |\lambda_2|$

Zainteresowany Czytelnik może przeczytać o liczbach zespolonych w „Liczby zespolone i kwaterniony”, Δ_{16}^{10}.

Przed nami najciekawsza część – przypadek, gdy $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, ale $\lambda_1 \neq \lambda_2$. W tym miejscu wróćmy do przykładu (1) ze wstępu. Można nietrudno obliczyć, że w tym przypadku: $c_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$, $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$ oraz $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$.

A zatem omawiany liniowy ciąg rekurencyjny ma postać:
$$u_n = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Uogólnijmy teraz nasze rozważania. Można nietrudno pokazać, że w omawianym przypadku $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ oraz $c_1 = \bar{c}_2$. Zatem opisany ciąg będzie przyjmował postać $u_n = c\lambda^n + \bar{c}\bar{\lambda}^n$, dla pewnej liczby algebraicznej $c \in \mathbb{A}$ i liczby zespolonej λ.

Pytając o warunek $u_n = 0$, można zauważyć, że $c\lambda^n + \bar{c}\bar{\lambda}^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy część rzeczywista $c\lambda^n$ jest równa 0. Niech $v = \frac{\lambda}{|\lambda|}$, wówczas $|v| = 1$. Zamiast badać, czy $u_n = 0$, będziemy teraz badać, czy $\frac{u_n}{|\lambda|^n} = 0$, co, jak łatwo zauważyć, jest równoważnym pytaniem. Zauważmy, że $\frac{u_n}{|\lambda|^n} = cv^n + \bar{c}\bar{v}^n$. Wystarczy sprawdzić, czy $cv^n + \bar{c}\bar{v}^n = 0$. To zaś jest równoważne temu, że cv^n jest czysto urojone (postaci ix dla $x \in \mathbb{R}$). Ponieważ $|v| = 1$, to musi być $x = |c|$. Pytamy więc, czy istnieje takie n, że $cv^n = i|c|$, czyli czy $v^n = \frac{i|c|}{c}$.

Pozostaje nam rozwiązać równanie postaci:
$$v^n = \beta, \text{ gdzie } v, \beta \in \mathbb{A}, |v| = 1 \text{ oraz } \beta = \frac{i|c|}{c}.$$
Aby znaleźć ogólne rozwiązanie, niezbędne okazuje się pochylenie nad teorią liczb algebraicznych. Mimo że to pytanie wydaje się proste, to jego rozwiązanie wymaga wprowadzenia pomysłowych norm mierzących wielkość liczb (innych niż wartość bezwzględna danej liczby). Jest to bardzo ciekawa technika, ale opowiedzenie o niej zajęłoby przynajmniej kilka stron. Zainteresowanych Czytelników odsyłam do artykułu: *On the Skolem Problem and Prime Powers* autorstwa George'a Kenisona, Richarda J. Liptona, Joëla Ouaknine'a i Jamesa Worrella.

Możemy jednak wrócić do naszego przykładu (1) i zauważyć, że sprowadziliśmy pytanie, czy $u_n = 0$, do pytania, czy $(1 - i\sqrt{2})^n$ jest liczbą rzeczywistą dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Innymi słowy, pytamy, czy argument tej liczby (równy $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$) jest współmierny z π, czy nie. W znanej książce *Dowody z księgi* autorstwa M. Aignera i G. Zieglera można znaleźć dowód, że $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$ jest niewspółmierny z π, co oznacza, że w ciągu (1) istotnie nie występuje żaden wyraz równy zero.

Dla ciągów rekurencyjnych rzędu $k = 3$ również istnieje algorytm bazujący na podobnych rozumowaniach, jednak w ogólności dla $k \geqslant 5$ nie jest znane żadne rozwiązanie problemu Skolema. Nawet dla rzędu $k = 2$ ostatni przypadek opiera się na algebraicznej teorii liczb. Sam dowód wcześniejszego twierdzenia wykorzystuje podstawy algebry liniowej, a sformułowanie problemu jest bliskie problemowi stopu, co ciekawie pokazuje, że wymaga on znajomości kilku działów zarówno matematyki, jak i informatyki.