Klub 44 M

Komentarz do zadania 825

Uczestnicy ubiegłorocznej Olimpiady Matematycznej niechybnie zauważyli, że zadanie 825 niewiele odbiega od zadania 9 z pierwszego etapu tamtej olimpiady. Jego treść:

Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Dane są liczby rzeczywiste a_{ij}, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$, przy czym dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi warunek
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \in \{-1, 1\}.$$
Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich par i, j, że $a_{ij} \neq 0$ oraz $i < j$.

W istocie, jest to (prawie) *to samo zadanie*; traktując liczby $1, \ldots, n$ jako wierzchołki grafu ważonego, z wagami a_{ij} (dla krawędzi ij) oraz ignorując krawędzie o wadze zerowej, dostajemy graf G z ligowego zadania 825.

Drobne różnice: tam chodziło o maksymalną liczbę krawędzi (o wadze niezerowej); tu – o iloczyn tych wag; wszelako w obu zadaniach tak naprawdę trzeba było zidentyfikować postać wszystkich takich grafów (przy czym przypadki $n = 1, 2, 3$ nie były w zadaniu OM wykluczone).

Ponadto, analogia byłaby pełna, gdyby w zadaniu 825 założenie o jednokrotnym lub dwukrotnym mignięciu zostało rozszerzone na serie mignięć dowolnej krotności; w tym sensie zadanie ligowe jest pewnym wzmocnieniem zadania olimpijskiego – ale bardzo nieznacznym.

Byłem przed rokiem jednym ze sprawdzających rozwiązania zadania OM-72-I-9 w okręgu warszawskim. Uderzyło mnie, że na blisko setkę przysłanych prac jedynie w kilku pojawił się pomysł interpretacji w języku grafów. Przy tym w żadnym z nich nie spotkalem rozumowania w stylu podobnym do proponowanego tu rozwiązania zadania 825. Dlatego zdecydowałem się na użycie tego zadania w naszej lidze (wzmiankowane drobne różnice formalnie rozróżniają te zadania).

Marcin KUCZMA (redaktor Ligi Zadaniowej)