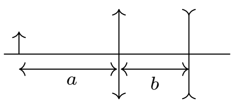
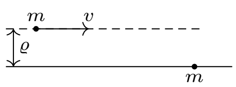
Klub 44 F

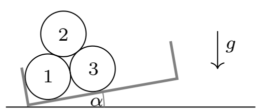
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2022



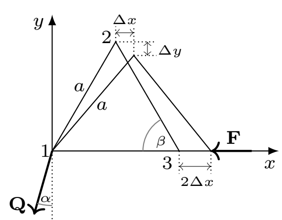
Rys. 1



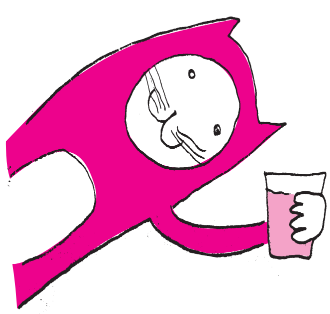
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Zadania z fizyki nr 730, 731

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

730. Dwie soczewki, skupiająca i rozpraszająca, tworzą układ o wspólnej osi optycznej (rys. 1). Odległość między soczewkami $b = 4$ cm. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu znajdującego się w odległości $a = 6$ cm od soczewki skupiającej. Powiększenie obrazu $P = 4$. Obraz powstał na ekranie umieszczonym w odległości $c = 4$ cm od soczewki rozpraszającej. Znaleźć ogniskowe obu soczewek.

731. Dwa punkty materialne o jednakowych masach m oddziałują ze sobą grawitacyjnie. W chwili początkowej jeden punkt spoczywa, drugi zbliża się do niego z nieskończoności z prędkością v, a parametr toru wynosi ϱ (rys. 2). Na jaką najmniejszą odległość zbliżą się te masy?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2021

Przypominamy treść zadań:

722. W skrzyni ciężarówki leżą trzy jednakowe bale (rysunek 3). Skrzynia nachylona jest do poziomu pod kątem α. Dla jakich wartości kąta α układ bali pozostaje w stanie równowagi? Tarcie zaniedbujemy.

723. Cząstka relatywistyczna o masie m i energii kinetycznej E_k zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Znaleźć maksymalną energię ΔE, która może być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Rozważyć przybliżenie nierelatywistyczne, gdy $E_k \ll mc^2$, oraz ultrarelatywistyczne, gdy $E_k \gg mc^2$.

722. Maksymalna wartość kąta α, dla której możliwy jest stan równowagi, wynosi $\pi/6$. Dla kątów większych prosta, wzdłuż której działa siła ciężkości działająca na górny bal, przechodzi z lewej strony punktu podparcia o niższy lewy bal, i bal górny spadnie.

Rozważmy sytuację, gdy kąt jest mniejszy od wartości minimalnej, dla której możliwy jest stan równowagi. Aby zapobiec rozjechaniu się dolnych bali, podpieramy je siłą F przyłożoną do dolnego prawego bala wzdłuż prostej łączącej środki dolnych bali. Praca tej siły podczas bardzo małego i powolnego przemieszczania prawego dolnego bala równa jest zmianie energii potencjalnej układu, ponieważ tarcie nie występuje. Rysunek 4 (obrócony dla wygody o kąt α zgodnie ze wskazówkami zegara) przedstawia trójkąty łączące środki bali przed i po przemieszczeniu. Na początku trójkąt był równoboczny i oznaczyliśmy długość jego boku przez a. Po przemieszczeniu środek górnego bala obniżył się o Δy i przesunął w prawo o Δx, lewy dolny bal pozostał w miejscu, a prawy przesunął się w prawo o $2\Delta x$. Uwzględniając, że siły ciężkości Q na naszym rysunku tworzą z osią y kąt α, możemy zapisać zmianę energii potencjalnej w postaci:

$$\Delta E_p = Q\cos\alpha\cdot\Delta y + Q\sin\alpha\cdot\Delta x + Q\sin\alpha\cdot 2\Delta x.$$

Siła F wykonuje przy tym pracę $\Delta W = -F\cdot 2\Delta x$, stąd

$$-F\cdot 2\Delta x = Q\cos\alpha\cdot\Delta y + 3Q\sin\alpha\cdot\Delta x. \qquad (*)$$

Aby wyznaczyć siłę F, musimy znaleźć związek między Δx i Δy. W tym celu wyrazimy je przez zmianę kąta β. W układzie współrzędnych na rysunku 4 współrzędne wierzchołka trójkąta przed przemieszczeniem są równe $x = a\cos\beta$, $y = a\sin\beta$, stąd dla małych przyrostów $\Delta\beta$ otrzymujemy $\Delta x = a(\cos(\beta+\Delta\beta) - \cos\beta) = -a\sin\beta\Delta\beta$, $\Delta y = a\cos\beta\Delta\beta$. Podstawiając to do $(*)$ i uwzględniając, że $\beta = \pi/3$, otrzymujemy

$$F = Q(\cos\alpha/\sqrt{3} - 3\sin\alpha)/2.$$

Gdy $\operatorname{tg}\alpha < 1/3\sqrt{3}$, to siła $F > 0$, i bale muszą być podtrzymywane. Ostatecznie układ bali pozostanie w równowadze, gdy $1/3\sqrt{3} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{3}/3$.

723. Oznaczmy przez M całkowitą masę układu po zderzeniu. Przy danym pędzie układu masa ta jest największa, gdy wszystkie cząstki lecą w tym samym kierunku z tymi samymi prędkościami. Energia, którą można wykorzystać do wytworzenia nowych cząstek, wynosi $\Delta E = Mc^2 - 2mc^2$. Pęd układu przed zderzeniem równy jest pędowi p_1 cząstki padającej $p^2 = p_1^2 = E_1^2/c^2 - m^2c^2$, gdzie E_1 jest energią cząstki padającej $E_1 = mc^2 + E_k$. Energia E układu przed zderzeniem równa jest energii układu E' po zderzeniu $E = 2mc^2 + E_k = E'$. Oznaczając przez p' pęd układu po zderzeniu, możemy napisać $p'^2 = E'^2/c^2 - M^2c^2 = ((2mc^2 + E_k)/c)^2 - M^2c^2$. Z zasady zachowania pędu $p^2 = p'^2$, zatem $M^2 = 4m^2(1 + E_k/2mc^2)$, $\Delta E = 2mc^2(\sqrt{1 + E_k/2mc^2} - 1)$.

W przypadku nierelatywistycznym $E_k \ll mc^2$ i możemy skorzystać ze wzoru $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ dla $x \ll 1$. Otrzymujemy wynik $\Delta E = E_k/2$, czyli co najwyżej połowa energii kinetycznej padającej cząstki może zostać zamieniona na energię spoczynkową powstających cząstek. W przypadku ultrarelatywistycznym $E_k \gg mc^2$, stąd $\Delta E = \sqrt{2mc^2E_k}$. Część energii kinetycznej $\Delta E/E_k$, którą można wykorzystać do utworzenia nowych cząstek, maleje wraz ze wzrostem tej energii.