Wszędzie brak pochodnej

*Jarosław GÓRNICKI**

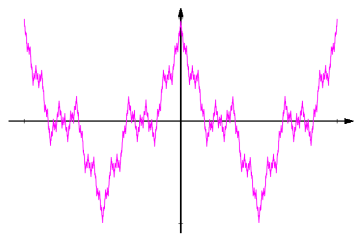
* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Przez wiele lat pytanie: *czy istnieje funkcja ciągła $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, która w żadnym punkcie nie posiada pochodnej?* było otwarte. Odpowiedź twierdząca pojawiła się w XIX wieku (Bernard Bolzano, Charles Cellérier, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass) w postaci przykładów:

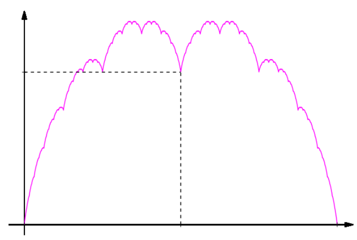
$$f_W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(3^n\pi x)}{2^n},\ x\in\mathbb{R},\quad \text{(K. Weierstrass, 18.07.1872)},$$

$$f_T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\min_{k\in\mathbb{Z}}|2^n x-k|}{2^n},\ x\in\mathbb{R},\quad \text{(Teiji Takagi, 1903)}.$$

Wykresy tych funkcji trudno sobie *ad hoc* wyobrazić (rys. 1, 2).



Rys. 1. Wykres funkcji $f_W(x)$

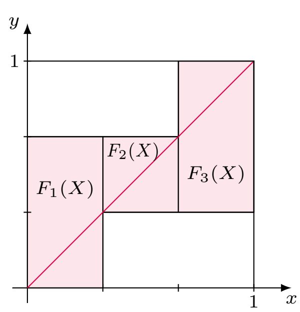


Rys. 2. Wykres funkcji $f_T(x)$

Hidefumi Katsuura (1991) pokazał, że funkcję o wyżej opisanej własności można łatwo uzyskać jako granicę ciągu funkcji ciągłych kawałkami liniowych. Własności funkcji Katsuury odkrywamy, analizując konstrukcję jej wykresu (nie znamy jawnego wzoru funkcji). Dodatkowo wykres (a raczej jego przybliżenie z dowolną dokładnością) można bardzo łatwo wygenerować!

Kluczowym elementem konstrukcji jest następujące przekształcenie. Dla prostokąta X o wymiarach $a\times b$ i bokach równoległych do osi układu współrzędnych definiujemy przekształcenia $F_i: X\to X$, $i=1,2,3$ (patrz rys. 3, gdzie $X=[0,1]\times[0,1]$):

- $F_1(x,y)=\left(\frac{x}{3},\frac{2y}{3}\right)$, które ściska prostokąt X do prostokąta $F_1(X)$ o wymiarach $\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}b$;
- $F_2(x,y)=\left(\frac{2a-x}{3},\frac{b+y}{3}\right)$, które ściska prostokąt X do prostokąta $F_2(X)$ o wymiarach $\frac{1}{3}a\times\frac{1}{3}b$, łącząc to z pewną symetrią zbioru X;
- $F_3(x,y)=\left(\frac{2a+x}{3},\frac{b+2y}{3}\right)$, które ściska prostokąt X do prostokąta $F_3(X)$ o wymiarach $\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}b$.

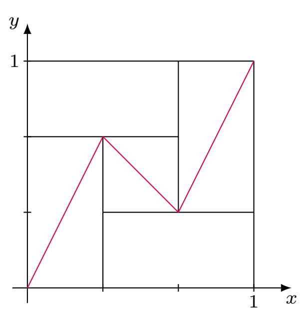


Rys. 3. G_0 to wykres f_0

Następnie wyróżniamy rodzinę $C(X)$ wszystkich niepustych, domkniętych podzbiorów zbioru X i definiujemy przekształcenie $F: C(X)\to C(X)$ wzorem

$$F(A)=F_1(A)\cup F_2(A)\cup F_3(A),\quad A\in C(X).$$

Niech $X=[0,1]\times[0,1]$ będzie kwadratem jednostkowym na płaszczyźnie euklidesowej. Stosując przekształcenie F do zbioru $G_0=\{(x,x): x\in X\}$ (przekątnej kwadratu X), otrzymujemy „zygzak” – zbiór $G_1=F(G_0)$ (rys. 4).

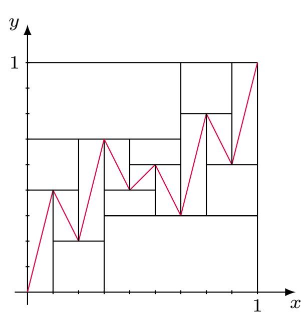


Rys. 4. $G_1=F(G_0)$ to wykres f_1

Iterując przekształcenie F, tworzymy zbiory $G_{n+1}=F(G_n)=F^{n+1}(G_0)$, $n=0,1,2,\ldots$ Każdy ze zbiorów G_n jest wykresem pewnej funkcji ciągłej $f_n:[0,1]\to[0,1]$, rys. 5, 6.

Z przedstawionej konstrukcji wynika, że $G_m\subset F^n(X)$ dla każdego $m\geqslant n$, a ponieważ $F^n(X)$ jest sumą 3^n prostokątów, każdy o wysokości co najwyżej $(\frac{2}{3})^n$, więc $\sup\limits_{t\in[0,1]}|f_m(t)-f_n(t)|\}$ zbiega do 0, gdy $n,m\to\infty$. Zatem granica tak otrzymanego jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych $\{f_n\}$ jest funkcją ciągłą $f:[0,1]\to[0,1]$. W dalszej części tekstu pokażemy, że funkcja ta w żadnym punkcie zbioru $(0,1)$ nie ma pochodnej.

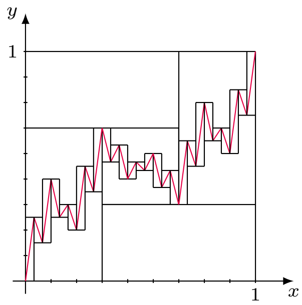
Dygresja. Felix Hausdorff wprowadził pojęcie odległości między zbiorami $A,B\in C(X)$. Dla zbioru $A\in C(X)$ i $\varepsilon>0$ niech zbiór $A_\varepsilon=\{x\in X: d(x,y)\leqslant\varepsilon\ \text{ dla pewnego } y\in A\}$ będzie ε-otoczeniem zbioru A. Wtedy dla zbiorów $A,B\in C(X)$ odległość Hausdorffa między nimi określamy jako $d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0: A\subset B_\varepsilon\wedge B\subset A_\varepsilon\}$. Tak określona przestrzeń $(C(X),d_H)$ okazuje się zupełną przestrzenią metryczną. Ponadto opisane wyżej przekształcenie F jest kontrakcją: istnieje $L\in[0,1)$ takie, że $d_H(F(A),F(B))\leqslant L\cdot d_H(A,B)$ dla dowolnych $A,B\in C(X)$. Na mocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym (o którym można przeczytać np. w Δ^{06}_{21}) wnioskujemy zatem, że istnieje dokładnie jeden zbiór $G\in C(X)$ taki, że $G=F(G)$. Ponadto dla dowolnego zbioru $A\in C(X)$ iteracje $F^n(A)$ są zbieżne do zbioru G w metryce Hausdorffa przy $n\to\infty$.



Rys. 5. $G_2=F^2(G_0)$ to wykres f_2

W naszym przypadku ciąg $\{G_0,G_1,G_2,\ldots\}$ określony zależnością rekurencyjną $G_{n+1}=F(G_n)$ jest zbieżny (w metryce Hausdorffa) do granicy G, która jest jedynym rozwiązaniem równania

$G = F(G)$: $G = \lim\limits_{n\to\infty} F^n(G_0) = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$. Co więcej, zbiór G (wykres funkcji f) można również uzyskać, iterując przekształcenie F na jednoelementowym (!) podzbiorze X, np. $G = \lim\limits_{n\to\infty} F^n(\{(0,0)\})$. W tym momencie znaleźliśmy się niebezpiecznie blisko (bo to bardzo wciągająca tematyka) układów dynamicznych i fraktali.



Rys. 6. $G_3 = F^3(G_0)$ to wykres f_3

Tworząc zbiory G_n, $n > 0$, sklejamy odcinki w punktach (węzłach), których współrzędne x-owe są liczbami trójkowo-wymiernymi (tzn. są wielokrotnością 3^{-k} dla pewnej liczby naturalnej k). Każdy węzeł zbioru G_n staje się węzłem zbioru G_m dla wszystkich $m > n$ i oczywiście elementem zbioru G (czyli wykresu funkcji f).

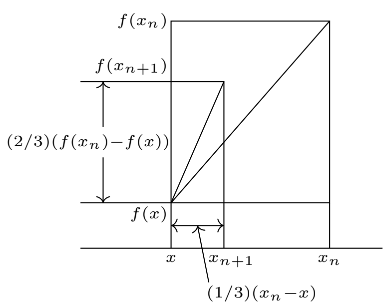
Lemat 1. *Zbiór* $T = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \{\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, \ldots, \frac{3^n-1}{3^n}\}$ *jest gęsty w przedziale* $[0,1]$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że każdy przedział otwarty $(a-\delta, a+\delta)$ dla $a \in (0,1)$, $\delta > 0$, zawiera punkt ze zbioru T. Ponieważ $\frac{1}{3^n} \to 0$ przy $n \to \infty$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $q = 3^{n_0}$, $0 < \frac{1}{q} < \delta$. Rozważmy przedziały $[0, \frac{1}{q}]$, $[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}], \ldots$, $[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q}]$, $[\frac{q-1}{q}, 1]$. Ponieważ ich suma jest przedziałem $[0,1]$, więc dla jednego z nich $\frac{m}{q} \leqslant a \leqslant \frac{m+1}{q}$. Skoro $\frac{1}{q} < \delta$, więc $a - \delta < \frac{m}{q} < a + \delta$.

Jak wiemy, funkcja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna* w punkcie $x \in (0,1)$, gdy granica $\lim\limits_{y\to x} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(x)$ istnieje i ma skończoną wartość. W naszym przypadku do badania różniczkowalności funkcji f wykorzystamy zbiór T i następujący rezultat; jest to zadanie 2.1.14. w [1].

[1] W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, cz. II*, Wyd. UMCS, Lublin 1998, zadanie 2.1.14.

Lemat 2. *Niech* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w punkcie* $t \in (0,1)$. *Jeśli dla* $n = 1, 2, \ldots$ *zachodzi* $0 < x_n < t < y_n < 1$ *i* $x_n \to t$ *i* $y_n \to t$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(x_n)}{y_n-x_n} = f'(t)$.

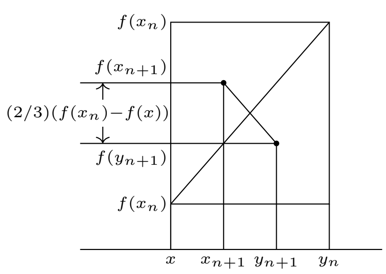


Rys. 7

Jesteśmy już gotowi, by uzasadnić, że funkcja f nie jest nigdzie różniczkowalna. Załóżmy, że $x \in T$, i niech $x = \frac{k}{3^m}$ dla pewnych $k, m \in \mathbb{N}$. Niech $x_n = x + \frac{1}{3^{m+n}}$. Wtedy $x_n \to x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}| = \infty$, bo wykres funkcji staje się coraz bardziej stromy i $|f(x) - f(x_n)| \geqslant 2^{n-1}|x - x_n|$, patrz rys. 7.

Jeżeli $x \notin T$, to na podstawie lematu 1 istnieją ciągi $\{x_n\}, \{y_n\} \subset T$ takie, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

(1) $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$,
(2) $x_n < x < y_n$.



Rys. 8

Wówczas, korzystając z lematu 2, albo zachodzi sytuacja opisana wyżej (gdy $x_{n+1} = x_n$ lub $y_{n+1} = y_n$), albo dla $x_{n+1} \neq x_n$ i $y_{n+1} \neq y_n$, $\frac{f(y_{n+1})-f(x_{n+1})}{y_{n+1}-x_{n+1}} = -\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ i $|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}| \geqslant 1$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$, więc granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ nie istnieje, patrz rys. 8.

Zatem funkcja f nie jest różniczkowalna w punktach $x \in (0,1)$.

W 1929 roku Hugo Steinhaus postawił pytanie o wielkość zbioru wszystkich funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych w przestrzeni $C[0,1]$ wszystkich funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Ze względu na trudności związane z podaniem przykładu funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej przypuszczano, że tego typu funkcje są bardzo rzadką osobliwością. Zaskakującą odpowiedź podał Stefan Banach w 1931 roku. Banach po pierwsze wykazał (stosując twierdzenie Baire'a, bez wskazywania konkretnego przykładu), że funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne istnieją. Po drugie wykazał, że zbiór wszystkich funkcji ciągłych różniczkowalnych w co najmniej jednym punkcie dziedziny jest zbiorem małym z topologicznego punktu widzenia – jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a* – w zbiorze wszystkich funkcji ciągłych $C[0,1]$. Zatem to funkcja (gdziekolwiek) różniczkowalna w świecie wszystkich funkcji ciągłych jest zjawiskiem osobliwym, wyjątkowo rzadkim! Kolejny raz matematyka nas zaskoczyła...

*Zbiór A jest pierwszej kategorii Baire'a, jeśli można go przedstawić jako przeliczalną sumę zbiorów, których domknięcia mają puste wnętrze.