WŁASNOŚCI HOMOTOPIJNE PRZESTRZENI ODWZOROWAŃ SURJEKTYWNYCH

ŁUKASZ ORSKI

Abstract. Przestrzeń wszystkich krzywych surjektywnych na kwadrat jest ściągalna. Prezentujemy kilka wniosków z dowodu i wokół tego faktu.

1. Wstęp

Krzywe Peano (klasycznie: surjektywne ciągłe odwzorowanie odcinka $I = [0, 1]$ na kostkę I^n) mają bogatą historię [1] i (co jest być może zaskakujące) również zastosowania [2]. Najczęściej jednak można przeczytać o konstrukcjach konkretnych rodzajów krzywych, rzadko zaś rozważa się przestrzeń wszystkich takich odwzorowań. W niniejszej pracy pokażemy, że ta przestrzeń okazuje się być ściągalna, jako wniosek z dużo ogólniejszego faktu.

Ściągalność przestrzeni wszystkich odwzorowań w kostkę wynika oczywiście ze ściągalności kostki, jednak konieczność zachowania surjektywności w każdym czasie homotopii zmusi nas do innego potraktowania przestrzeni odwzorowań surjektywnych.

Praca wyrosła z pytania, na ile typ homotopii surjekcji w X może się różnić od typu homotopii wszystkich odwzorowań w X.

2. Preliminaria

Przestrzeń X będzie poniżej zawsze metryczna, zwarta, spójna i lokalnie spójna, ponieważ Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza [3] mówi, że te i tylko te przestrzenie mogą być obrazami odcinka jednostkowego I. To pozwala na przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych $\mathcal{C}(I, X)$ wprowadzić topologię zbieżności jednostajnej (czy też metrykę supremum), i z tą topologią rozpatrywać ją poniżej. Niech $P(X) := \{f : I \to X \mid\ f \text{ jest ciągłą surjekcją } \}$.

Obserwacja 1. *$P(X)$ jest domkniętym podzbiorem $\mathcal{C}(I, X)$.*

Dowód. Niech k_n będzie ciągiem w $P(X)$ zbieżnym do $k \in \mathcal{C}(I, X)$. Dla ustalonego $x \in X$ istnieje t_i, że $k_i(t_i) = x$. Bez straty ogólności możemy założyć, że t_i jest zbieżny do t, i oczywiście z definicji metryki supremum i

Praca napisana pod kierunkiem dra Andrzeja Czarneckiego w IMUJ.

ciągłości k stały ciąg $x = k_i(t_i)$ zmierza do $k(t)$, a zatem k jest surjekcją i leży w $P(X)$, co dowodzi domkniętości tego podzbioru. $\square$

Możemy również zauważyć, że $P(X)$ dziedziczy zatem z $\mathcal{C}(I, X)$ zupełność.

Definicja 2. Przestrzeń X będziemy nazywać Y-ściągalną, jeżeli każde dwa odwzorowania ze zwartej, spójnej i lokalnie spójnej przestrzeni metrycznej Y do X są homotopijne, lub równoważnie jeżeli każde odwzorowanie z Y do X jest homotopijne z ustalonym odwzorowaniem stałym.

Oczywiście X jest ściągalna wtedy i tylko wtedy gdy jest X-ściągalna, i wtedy i tylko wtedy, gdy jest Y-ściągalna dla każdej przestrzeni Y, co wynika z elementarnych własności składnia homotopii.

Twierdzenie 3. *Jeśli X jest Y-ściągalna, to $P(X)$ również.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że dla dowolnego $x_0 \in X$ istnieje krzywa $p \in P(X)$ taka, że $p(0) = x_0$. Istotnie, dowolne ustalone $k \in P(X)$ osiąga x_0 w czasie t_0. A zatem krzywa

$$p(t) = \begin{cases} k((1-2t)t_0) & \text{dla } t < \frac{1}{2} \\ k(2t-1) & \text{dla } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

spełnia żądany warunek.

Po drugie, ponieważ wszystkie rozważane przestrzenie są zwarte, skorzystamy z tego, że $\mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, X))$ i $\mathcal{C}(Y \times I, X)$ są we wzajemnej odpowiedniości.

To pozwala nam przejść do właściwego dowodu. Niech $\alpha : Y \to P(X)$, które możemy wymiennie traktować jako funkcję o wartościach w przestrzeni funkcji, pisząc $\alpha(y)(t)$, lub jako funkcję dwóch zmiennych, $\alpha(y, t)$. Szukamy funkcji $\beta : Y \times I \to P(X)$ (lub $Y \times I \times I \to X$) takiej, że $\beta(y, 0) = \alpha(y)$ a $\beta(y, 1) = \text{const}$ (lub $\beta(y, 0, t) = \alpha(y, t)$ i $\beta(y, 1, t)$ jest ciągłą surjekcją niezależną od y). Funkcja $f(y) := \alpha(y, 1)$ jest homotopijna ze stałą jako odwzorowanie z Y do X (dzięki Y-ściągalności), ustalmy tę homotopię jako $g : Y \times I \to X$ zaczynającą się w $g(y, 0) = f(y)$ a kończącą się w $g(y, 1) = x_0$. Na podstawie uwagi rozpoczynającej dowód wybieramy krzywą p taką, że $p(0) = x_0$. Zdefiniujmy teraz $\gamma \colon Y \times I \to X$ jako

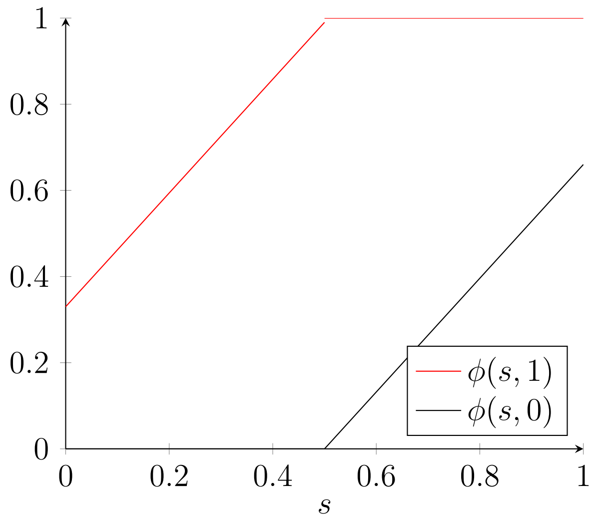
$$\gamma(y, t) = \begin{cases} \alpha(y, 3t) & \text{dla } t < \frac{1}{3} \\ g(y, 3t-1) & \text{dla } \frac{1}{3} \leqslant t < \frac{2}{3} \\ p(3t-2) & \text{dla } \frac{2}{3} \leqslant t \end{cases}$$

Zauważmy, że γ jest oczywiście ciągła. Ponadto, dla każdego $y \in Y$ odwzorowanie $\gamma(y, \cdot) : I \to X$ leży w $P(X)$, ponieważ $\gamma(y, \left[0, \frac{1}{3}\right]) = \alpha(y, I) =$

$X = p(I) = \gamma(y, \left[\frac{2}{3}, 1\right])$. Podobnie, zdefiniujmy teraz $\phi\colon I \times I \to I$ jako

$$\phi(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t(1+4s) & \text{dla } s < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}t(5-4s) + \frac{1}{3}(4s-2) & \text{dla } s \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ponownie, ϕ jest oczywiście ciągła. Zauważmy, że $\phi(0,t) = \frac{t}{3}$ oraz $\phi(1,t) = \frac{t+2}{3}$, zaś przedziały $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ zawierają się w $\phi(s, I)$ dla, odpowiednio, $s < \frac{1}{2}$ i $s \geq \frac{1}{2}$. Przedstawmy wykres $\phi(s,1)$ i $\phi(s,0)$:



Stąd już wynika, że funkcja

$$\beta(y,s,t) = \gamma(y, \phi(s,t))$$

jest szukaną homotopią, mamy bowiem

$$\beta(y,0,t) = \gamma\left(y, \frac{t}{3}\right) = \alpha(y,t)$$
$$\beta(y,1,t) = \gamma\left(y, \frac{t+2}{3}\right) = p(t)$$

i ponadto nie opuszcza ona $P(x)$:

$$X = \gamma\left(y, \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subseteq \gamma(y, \phi(s,I)) = \beta(y,s,I) \quad \text{dla } s < \frac{1}{2}$$
$$X = \gamma\left(y, \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \subseteq \gamma(y, \phi(s,I)) = \beta(y,s,I) \quad \text{dla } s \geq \frac{1}{2}$$

co kończy dowód. $\square$

3. Wnioski.

Konsekwencją powyższego twierdzenia jest rozwiązanie problemu postawionego na wstępie.

Wniosek 4. *Przestrzenie klasycznych krzywych Peano $P(I^n)$ są ściągalne, ponieważ I^n są ściągalne.*

Zauważmy, że typ homotopii X jest istotny dla ściągalności $P(X)$.

Obserwacja 5. *Przestrzeń $P(\mathbb{S}^1)$, surjekcji na okrąg, nie jest ściągalna.*

Dowód. Istotnie, nie znika jej grupa podstawowa. Gdyby bowiem funkcja $\mathbb{S}^1 \ni \phi \mapsto (I \ni t \mapsto \phi \cdot e^{2\pi i t}) \in P(\mathbb{S}^1)$ była homotopijna do odwzorowania stałego (to znaczy pewnej surjektywnej krzywej $k(t)$) przez homotopię $H(\phi, t, s)$, to $H(\phi, 0, s)$ byłoby homotopią identyczności na $\mathbb{S}^1$ z funkcją stałą, co nie może mieć miejsca. □

Twierdzenie 6. *Niech Y będzie zwartą, spójną i lokalnie spójną przestrzenią metryczną. Jeśli $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{C}(Y, P(X))$ są homotopijne w $\mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, X))$ to są też homotopijne w $\mathcal{C}(Y, P(X))$.*

Dowód. Z homotopijności istnieje funkcja ciągła $\beta \colon I \mapsto \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, X))$ taka, że $\beta(0) = \alpha_0$ i $\beta(1) = \alpha_1$. Równoważnie $\beta(s, y, t) \colon I \times Y \times I \mapsto X$ jest ciągła oraz $\beta(0, y, t) = \alpha_0(y, t)$, $\beta(1, y, t) = \alpha_1(y, t)$. Chcemy skonstruować funkcję $\beta'(s, y, t) \colon I \times Y \times I \mapsto X$, która ponadto ma tę właściwość, że $\beta'(s, y, I) = X$ (czyli $\beta'(s, y)$ jest surjekcją). Podobnie jak poprzednio konstruujemy funkcję ciągłą $\gamma \colon Y \times I \mapsto X$ przez

$$\gamma(y,t) = \begin{cases} \beta(0, y, 3t) & \text{dla } t < \frac{1}{3} \\ \beta(3t-1, y, 2-3t) & \text{dla } \frac{1}{3} \leqslant t < \frac{2}{3} \\ \beta(1, y, 3t-2) & \text{dla } \frac{2}{3} \leqslant t \end{cases}$$

Tak jak poprzednio $\gamma(y, \left[0, \frac{1}{3}\right]) = \alpha_0(y, I) = X = \alpha_1(y, I) = \gamma(y, \left[\frac{2}{3}, 1\right])$. Definiujemy teraz $\phi(s, t)$ dokładnie tak jak wcześniej:

$$\phi(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t(1+4s) & \text{dla } s < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}t(5-4s) + \frac{1}{3}(4s-2) & \text{dla } s \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tak jak poprzednio, przedziały $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ zawierają się w $\phi(s, I)$ dla, odpowiednio, $s < \frac{1}{2}$ i $s \geq \frac{1}{2}$. Ponadto $\phi(0, t) = \frac{t}{3}$ oraz $\phi(1, t) = \frac{t+2}{3}$. Stąd znów wynika, że funkcja

$$\beta'(s, y, t) = \gamma(y, \phi(s, t))$$

jest szukaną homotpią, gdyż:

$$\beta'(0, y, t) = \gamma\left(y, \frac{t}{3}\right) = \alpha_0(y, t)$$

$$\beta'(1, y, t) = \gamma\left(y, \frac{t+2}{3}\right) = \alpha_1(y, t)$$

Ponadto nie opuszcza ona $P(X)$:

$$X = \gamma\left(y, \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subseteq \gamma(y, \phi(s, I)) = \beta'(y, s, I) \quad \text{dla } s < \frac{1}{2}$$

$$X = \gamma\left(y, \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \subseteq \gamma(y, \phi(s, I)) = \beta'(y, s, I) \quad \text{dla } s \geq \frac{1}{2}$$

co kończy dowód. □

Łatwo zauważyć, że Twierdzenie 3 jest wnioskiem z Twierdzenia 6, jednak zdecydowaliśmy się zaprezentować je najpierw, by od prostszego i bardziej namacalnego problemu ściągalności przestrzeni krzywych Peano przejść do bardziej abstrakcyjnej sytuacji.

Twierdzenie 6 mówi ponadto, że typ homotopii $P(X)$ jest ściśle powiązany z typem homotopii $\mathcal{C}(I, X)$, czyli z typem homotopii X. Można domniemywać, że w większości przypadków będzie to dokładnie ten sam typ homotopii, jednak w ogólności ten problem wydaje się trudny.

References

[1] H. Sagan, *Space-filling curves*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] M. Bader, *Space-filling curves. An introduction with applications in scientific computing*, Texts in Computational Science and Engineering 9. Springer, Heidelberg, 2013.

[3] J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2011.

,,