1 Liceum Ogólnokształcące im. Oskara Kolberga w Kościanie
al. Kościuszki 3, 64-000 Kościan
tel. +48 65 512 04 04

Wybrane zagadnienia teorii szeregów formalnych

Dawid Bugajewski

adres e-mail: dawidbugajewski2005@gmail.com

Opiekun naukowy: Piotr Maćkowiak

Spis treści

1. Wstęp

W niniejszej pracy zajmuję się analizą formalną. Obiektem jej zainteresowania są głównie tzw. szeregi formalne. Analiza formalna obejmuje istotny obszar matematyki - m.in. formalne szeregi potęgowe, formalne szeregi Laurenta i formalne szeregi Fouriera, które znajdują zastosowanie w teorii równań różniczkowych cząstkowych. W literaturze formalny szereg Laurenta zwykle definiuje się jako odwzorowanie z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$ ($\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych). Definicja ta w pewnym sensie utrudnia zdefiniowanie formalnego szeregu Fouriera, który również należałoby zdefiniować jako pewien typ odwzorowania z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$. Ten fakt stał się dla mnie inspiracją do zdefiniowania ogólnego szeregu formalnego (będącego odwzorowaniem z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$), w którym definiujemy pojęcie typu szeregu tak, by można sformułować definicje formalnego szeregu Fouriera i formalnego szeregu Laurenta w jednolity sposób.
Badam podstawowe własności iloczynu szeregów formalnych opierając się na wynikach z [2] a także rozważam zagadnienie istnienia i jednoznaczności szeregów odwrotnych do szeregów formalnych. Przedstawiam rozważania przestrzeni szeregów formalnych jako przestrzeni metrycznej. Ostatni rozdział jest natomiast poświęcony wspomnianym wcześniej szeregom Fouriera i Laurenta - zestawiam w nim podejście analityczne i formalne do tych szeregów, a także pokazuję pewne zastosowania każdego z tych sposobów (korzystając m.in. z twierdzeń udowodnionych we wcześniejszych rozdziałach, poświęconych ogólnym szeregom formalnym).
Praca ma w całości charakter twórczy, oprócz pewnych twierdzeń zaczerpniętych z literatury (przy wszystkich takich twierdzeniach podane jest ich źródło).

2. Pojęcia wstępne. Iloczyn szeregów formalnych

W tym rozdziale formułuję wspomnianą we wstępie ogólną definicję szeregu formalnego (SF) oraz iloczynu szeregów formalnych, a także podaję pewne twierdzenia związane z iloczynem szeregów formalnych.
Przyjmujemy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ - zbiór liczb naturalnych. Stosujemy również następujące oznaczenia:

- $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

Definicja 2.1. Niech X będzie jakimkolwiek niepustym zbiorem. Ustalmy dowolną funkcję $\alpha : \mathbb{Z} \mapsto X$. Oznaczmy $\alpha(n) := \alpha_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Szeregiem formalnym typu α (α-SF) nazywamy każde takie odwzorowanie $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C} \times X$, że $\forall_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = (a_n^f, \alpha_n)$, gdzie $a_n^f \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \in X$. α-SF oznaczać będziemy również jako

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^f \alpha_n \text{ lub } f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^f \alpha_n$$

Element a_n^f nazywamy n-tym współczynnikiem szeregu f, natomiast liczbę n - indeksem współczynnika a_n^f.

Zbiór wszystkich szeregów formalnych typu α oznaczamy przez $\mathbb{F}(\alpha)$.

Definicja 2.2.

- Niech $f \in \mathbb{F}(\alpha)$. SF $f^+ \in \mathbb{F}(\alpha)$ zdefiniowany jako
$$\forall_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}} f^+(n) := (a_n^f, \alpha_n)$$
$$\forall_{n\in\mathbb{Z}^-} f^+(n) := (0, \alpha_n)$$
nazywamy częścią regularną szeregu f. Piszemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^f \alpha_n$ dla oznaczenia tego szeregu.
- Niech $f \in \mathbb{F}(\alpha)$. SF $f^- \in \mathbb{F}(\alpha)$ zdefiniowany jako
$$\forall_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}} f^+(n) := (0, \alpha_n)$$
$$\forall_{n\in\mathbb{Z}^-} f^+(n) := (a_n^f, \alpha_n)$$
nazywamy częścią zasadniczą szeregu f. Piszemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}^f \alpha_{-n}$ dla oznaczenia tego szeregu.

W celu uniknięcia nieporozumień, ciągi współczynników SF oznaczać będziemy literami alfabetu łacińskiego, a ciągi określające typ szeregu - literami alfabetu greckiego. Jeżeli z kontekstu wynika, że szereg f jest α-SF, będziemy pisać krócej, że f jest SF. Podobnie, jeśli z kontekstu wiadomo, że współczynniki dotyczą szeregu f, to będziemy pisać a_n zamiast a_n^f. Jeśli nie ma wątpliwości, jakiego typu jest dany szereg f, będziemy pisać $f \in \mathbb{F}$ zamiast $\mathbb{F}(\alpha)$.

Przykład 2.3. W praktyce mamy do czynienia z szeregami formalnymi określonych typów, np. typu e^{inx}, x^n.
Niech $\alpha_n := e^{inx}$. Szeregi formalne postaci $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ nazywać będziemy formalnymi szeregami Fouriera. Ogół formalnych szeregów Fouriera oznaczać będziemy przez $\mathbb{F}(e^{inx})$.
Niech $\alpha_n := x^n$. Szeregi formalne postaci $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ nazywać będziemy formalnymi szeregami Laurenta. Ogół formalnych szeregów Laurenta oznaczać będziemy przez $\mathbb{F}(x^n)$ (w literaturze zwykle funkcjonuje oznaczenie $\mathbb{L}$, jednak symbol $\mathbb{F}(x^n)$ ułatwi zapis rozważań w kontekście różnych typów szeregów formalnych).
Należy zwrócić uwagę, że symbolom e, i, x nie przypisujemy tu jeszcze konkretnego znaczenia, choć gdy rozważamy te obiekty w charakterze analitycznym, a nie formalnym, symbole e, i, x oznaczają ustalone obiekty (e - liczba Eulera, i - jednostka urojona, x - zmienna zespolona).

Na potrzeby kolejnych definicji ustalmy funkcję $\alpha : \mathbb{Z} \mapsto X$, gdzie X jest pewnym niepustym ustalonym zbiorem.

Definicja 2.4.
- Odwróconym SF szeregu formalnego $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$ nazywamy SF
$$\breve{f} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \breve{a}_n\alpha_n,$$
gdzie $\breve{a}_n := a_{-n}, n \in \mathbb{Z}$.
- Identycznościowym (jednostkowym) szeregiem formalnym nazywamy SF, którego współczynniki dane są następująco:
$$a_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$
Oznaczmy go S_1.
- Trywialnym (zerowym) szeregiem formalnym o współczynnikach a_n nazywamy SF, dla którego $a_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy go S_0.
- Skończonym szeregiem formalnym nazywamy SF o współczynnikach a_n, dla którego
$$\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{Z},|n|\geq N} a_n = 0.$$
Zbiór wszystkich skończonych szeregów formalnych typu α oznaczać będziemy przez $\mathbb{F}_{finite}(\alpha)$ (ew. $\mathbb{F}_{finite}$, jeśli wiadomo, o jaki typ szeregu chodzi).

Uwaga 2.5. Dla $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ definiujemy sumę nieskończoną $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ (równoważnie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$) następująco:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
o ile oba szeregi po prawej stronie są zbieżne. Wartością tej sumy jest wtedy suma wartości szeregów po prawej stronie. W przeciwnym razie mówimy, że szereg po lewej stronie jest rozbieżny (zob. [2]).

Definicja 2.6. Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n \in \mathbb{F}$, $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\alpha_n \in \mathbb{F}$, $c \in \mathbb{C}$.
- Sumą $f + g$ szeregów f i g nazywamy SF $f + g := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n + b_n)\alpha_n$.
- Iloczynem stałej $c \in \mathbb{C}$ i szeregu f nazywamy SF $cf := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (ca_n)\alpha_n$.

Definicja 2.7. Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n, g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\alpha_n \in \mathbb{F}$. Jeżeli $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nb_n \in \mathbb{C}$, to iloczyn punktowy szeregów f i g określamy jako
$$f \cdot g := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nb_n,$$
i mówimy, że iloczyn punktowy $f \cdot g$ istnieje. W przeciwnym razie mówimy, że iloczyn punktowy $f \cdot g$ nie istnieje.

Definicja 2.8. Niech $g \in \mathbb{F}$. Przez $DP(g)$ oznaczać będziemy zbiór takich $f \in \mathbb{F}$, że $f \cdot g$ istnieje.

Z Definicji 2.8 wynika, że S_1, $S_0 \in DP(g)$ oraz $\forall_{f\in\mathbb{F}_{finite}} f \in DP(g)$ dla każdego $g \in \mathbb{F}$, gdyż dla każdego z tych trzech SF tylko skończona liczba wyrazów jest różna od zera, więc tylko skończona liczba współczynników szeregów (liczbowych) $S_1 \cdot g$, $S_0 \cdot g$, $f \cdot g$ ($f \in \mathbb{F}_{finite}$)

jest różna od zera. Wynika stąd, że dla każdego $g \in \mathbb{F}$ zachodzi $DP(g) \neq \emptyset$. Jest też jasne, że $f \cdot g = g \cdot f$, o ile iloczyn punktowy $f \cdot g$ istnieje.

Definicja 2.9. Ustalmy $k \in \mathbb{Z}$. k-translacją szeregu formalnego nazywamy odwzorowanie $S_k : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ zdefiniowane następująco:

$$S_k(f) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n-k}\alpha_n, \text{ gdzie } f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\alpha_n \in \mathbb{F}.$$

Definicja 2.10. Niech $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\alpha_n \in \mathbb{F}$.

$$C(f) := \{g \in \mathbb{F} : S_k(\breve{g}) \in DP(f) \text{ dla każdego } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zauważmy, że

$$C(f) = \{g \in \mathbb{F} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m} \in \mathbb{C} \text{ dla każdego } k \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie b_n są współczynnikami szeregu f i a_n oznaczają współczynniki szeregu g.
Powyższe definicje oraz Twierdzenia 2.11, 2.14, wraz z dowodami pochodzą z [2], w niniejszej pracy są one jednak zapisane w sposób ogólny.

Twierdzenie 2.11. *Niech* $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n\alpha_n \in \mathbb{F}(\alpha)$. *Wtedy* $f \in C(g) \iff g \in C(f)$.

Dowód. Załóżmy, że $g \in C(f)$. Wtedy, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$,

$$f \cdot S_k(\breve{g}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} b_{k-(-m)} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_{k-m} =$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{-(s-k)} b_{-s} + \sum_{s=0}^{\infty} a_{k+s} b_s = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k-s} b_s = g \cdot S_k(\breve{f}),$$

(podstawiając $m = k - s$).
Mamy teraz:

$$f \in C(g) \Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\breve{f}) \in DP(g) \Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\breve{f}) \cdot g \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\breve{g}) \cdot f \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\breve{g}) \in DP(f) \Leftrightarrow g \in C(f),$$

co kończy dowód.

Definicja 2.12. Niech $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n\alpha_n \in \mathbb{F}$. Iloczynem szeregów f i g nazywamy szereg (o ile istnieje)

$$fg = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\alpha_k, \text{ gdzie } c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m} \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że w powyższej definicji iloczynu SF wymagamy, by szeregi były tego samego typu.
Równoważną definicją zbioru $C(f)$, $f \in \mathbb{F}$ jest:

$$C(f) = \{g \in \mathbb{F} : fg \in \mathbb{F}\}.$$

Przykład 2.13. Łatwo sprawdzić, że

- $S_1 S_1 = S_1$,
- dla każdego $f \in \mathbb{F}$: $fS_1 = f$, $fS_0 = S_0$.

Twierdzenie 2.14. *Niech $f, g, h \in \mathbb{F}$. Wtedy:*

(1) $C(f) \neq \emptyset$,
(2) $f \in C(g) \Rightarrow cf \in C(g)$ *dla każdego* $c \in \mathbb{C}$,
(3) $f, g \in C(h) \Rightarrow (f+g) \in C(h)$.

Dowód. (1) Niech $f \in \mathbb{F}_{finite}$. Wtedy oczywiście $S_k(\breve{f}) \cdot g \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, zatem $f \in C(g)$, więc $C(g) \neq \emptyset$.

(2) Ponieważ $S_k(\breve{cf}) = cS_k(\breve{f})$, zatem $S_k(\breve{f}) \cdot g \in \mathbb{C}$ implikuje $S_k(\breve{cf}) \cdot g = cS_k(\breve{f}) \cdot g \in \mathbb{C}$, co kończy dowód.

(3) Niech $s = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, $t = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_n\alpha_n$, $u = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} k_n\alpha_n \in \mathbb{F}(\alpha)$. Załóżmy ponadto, że istnieją iloczyny punktowe $s \cdot u$, $t \cdot u$. Wtedy

$$s \cdot u + t \cdot u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n k_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_n k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_n + d_n) k_n = (s+t) \cdot u \in \mathbb{C}.$$

Mamy zatem (przy założeniu $f, g \in C(h)$), dla każdego $k \in \mathbb{Z}$,

$$S_k(f \breve{+} g) \cdot h = S_k(\breve{f}) \cdot h + S_k(\breve{g}) \cdot h \in \mathbb{C}.$$

Z tego wynika, że $f + g \in C(h)$, co kończy dowód.

Powyższe twierdzenie pokazuje, że

- istnienie iloczynu fg implikuje istnienie iloczynu gf,
- istnienie iloczynu fg implikuje istnienie iloczynu cfg ($c \in \mathbb{C}$),
- istnienie iloczynów fh, gh implikuje istnienie iloczynu $(f+g)h$.

To, że te warunki można wzmocnić, jest pokazane w Twierdzeniu 2.15:

Twierdzenie 2.15. *Niech $f, g, h \in \mathbb{F}$. Wtedy:*

(1) *jeśli* $f \in C(g)$, *to* $g \in C(f)$ *oraz* $fg = gf$,
(2) $f \in C(g)$ *implikuje* $cf \in C(g)$ *oraz* $c(fg) = (cf)g$, *gdzie* $c \in \mathbb{C}$,
(3) $g, h \in C(f)$ *implikuje* $g + h \in C(f)$ *oraz* $(g+h)f = gf + hf$.

Dowód. Oznaczmy współczynniki szeregu f przez a_n, szeregu g przez b_n, szeregu h przez d_n. Implikacje dotyczące istnienia iloczynów uwzględnionych w twierdzeniu są bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 2.11. Pozostaje jeszcze udowodnić, że przy założeniu istnienia odpowiednich iloczynów, zachodzi $fg = gf$, $c(fg) = (cf)g$, $(f+g)h = fh + gh$.

(1) Zauważmy, że $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} b_s a_{n-s}$ (podstawiając $s = n - m$), co kończy dowód.

(2) Równość $c(fg) = (cf)g$ wynika bezpośrednio z definicji mnożenia szeregu formalnego przez stałą.

(3) Zachodzi $f(g+h) = fg + fh$ oraz $(f+h)g = fg + hg$, gdyż $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_m(b_{n-m} + d_{n-m}) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} + \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_m d_{n-m}$ oraz $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (b_m + d_m) a_{n-m} = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} b_m a_{n-m} + \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} d_m a_{n-m}$, co kończy dowód.

Iloczyn szeregów formalnych nie jest łączny (ma to znaczące konsekwencje w kontekście problemu szeregów odwrotnych szeregów formalnych) - zostanie to pokazane w następnym podpunkcie.
Należy zaznaczyć, że dla $f, g, h \in \mathbb{F}(\alpha)$, $f, g \in C(h)$ nie implikuje $fg \in C(h)$. Przykładowo, przyjmując $h = S_1$, założenie $f, g \in C(h)$ spełniają dowolne szeregi $f, g \in \mathbb{F}(\alpha)$, ale iloczyn fg może nie istnieć.
Z powyższych rozważań wynika, że działanie mnożenia szeregów formalnych jest przemienne i rozdzielne względem dodawania, czyli spełnia część własności analogicznych do mnożenia i dodawania np. liczb rzeczywistych, o ile przyjmiemy, że rozważane iloczyny istnieją.

Uwaga 2.16. Dla każdego $f \in \mathbb{F}$, $\check{\check{f}} = f$. Istotnie, zauważmy, że $a_n^{\check{\check{f}}} = a_{-(-n)}^f = a_n^f$.

Twierdzenie 2.17. *Istnieją takie $f, g \in \mathbb{F}$, że $f \neq S_0$, $g \neq S_0$ i $f \in C(g)$ oraz $fg = S_0$.*

Dowód. Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, gdzie $a_n = c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ i $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\alpha_n$, gdzie $d_n = \frac{1}{2^{|n|+1}}$ dla $n \neq 0$ i $d_0 = -1$. Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m d_{k-m} = c \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{k-m} = c \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_s$$

(podstawiając $s = k - m$)
Zauważmy teraz, że

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} d_s = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}(d_s + d_{-s}) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{|n|+1}} + \frac{1}{2^{|-n|+1}}\right) =$$

$$-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + 1 = 0, \text{ zatem}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{k-m} = c \sum_{s\in\mathbb{Z}} d_s = 0, \text{ więc}$$

$fg = S_0$, co kończy dowód.

3. Odwrotne szeregi formalne

Ustalmy funkcję $\alpha : \mathbb{Z} \mapsto X$ i - jak poprzednio - przyjmijmy $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\alpha)$.

Definicja 3.1. Niech $f \in \mathbb{F}$ będzie ustalone. Szeregiem odwrotnym do szeregu f nazywamy (o ile istnieje) taki szereg $f^{-1} \in \mathbb{F}(\alpha)$, że $ff^{-1} = S_1$.
O ile $ff^{-1} = S_1$, to $f^{-1}f = S_1$ (tw. 2.15).

Uwaga 3.2. Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, $f^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\alpha_n$ i $ff^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} k_n\alpha_n$. Wtedy $k_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{-m} = 1$ i, dla każdego $s \in \mathbb{Z}$ różnego od 0, $k_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{s-m} = 0$.

Pokażemy teraz, że dla danego szeregu f może zajść jedna z trzech sytuacji:
1. nie istnieje szereg $g \in \mathbb{F}$ taki, że $gf = S_1$ lub
2. istnieje dokładnie jeden szereg $g \in \mathbb{F}$ taki, że $gf = S_1$, lub
3. istneje wiele szeregów $g \in \mathbb{F}$ takich, że $gf = S_1$.

Istotnie, rozważmy następujące przykłady:

Przykład 3.3. Niech $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha_n$, gdzie $c_n = c$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, będzie danym SF. Załóżmy, że istnieje szereg $f^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \alpha_n$. Wtedy

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{-m} = c \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{-m} = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = 1,$$

czyli $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = \frac{1}{c} \neq 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zachodzi również

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m} = c \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{n-m} = c \sum_{t=-\infty}^{\infty} d_t = 0,$$

gdzie $t = n - m$, czyli $\sum_{t=-\infty}^{\infty} d_t = 0$.
Otrzymana sprzeczność dowodzi, że jeśli $c_n = c \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, to szereg $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha_n$ nie posiada szeregu odwrotnego.

Przykład 3.4. Niech $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha_n \in \mathbb{F}(\alpha)$ i $c_n = c_0 + nr$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, gdzie $c_0, r \in \mathbb{C}$. Wtedy szereg f^{-1} nie istnieje.
Załóżmy nie wprost, że szereg f^{-1} istnieje (oznaczmy współczynniki tego szeregu przez d_n). Zachodzi

$$ff^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n \alpha_n, \text{ gdzie } k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m c_{n-m}.$$

Oczywiście $k_0 = 1$ i $k_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Zauważmy, że

$$k_{n+1} - k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m (c_{n-m+1} - c_{n-m}) = r \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m, \text{ czyli}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m = \frac{k_{n+1} - k_n}{r} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}$$

Z tego wynika, że $\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m = \frac{k_1 - k_0}{r} = \frac{-1}{r} \neq 0$ oraz $\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m = \frac{k_2 - k_1}{r} = 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szereg f^{-1} nie istnieje.

Przykład 3.5. Niech $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha_n$ i $c_n = c_0 q^n$ (oczywiście musi zachodzić $q \neq 0$) dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, gdzie $c_0, q \in \mathbb{C}$. Wtedy nie istnieje szereg f^{-1}:
Załóżmy nie wprost, że szereg f^{-1} istnieje (oznaczmy jego współczynniki przez d_n). Oznaczmy

$$ff^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n \alpha_n, \text{ gdzie } k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m c_{n-m} \in \mathbb{C}.$$

Zauważmy, że

$$k_{n+1} - k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m(c_{n-m+1} - c_{n-m}) = (q-1)\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m c_{n-m} = (q-1)k_n, \text{ czyli}$$

$$k_{n+1} = qk_n, \text{ więc } k_1 = qk_0, \text{ czyli } 0 = q \cdot 1, \text{ więc } q = 0.$$

Z założenia jednak $q \neq 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli szereg odwrotny do f nie istnieje.

Przykład 3.6. Udowodnimy, że każdy szereg formalny $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \alpha_n$, dla którego $a_n \neq 0 \iff n = N$, gdzie N jest ustaloną liczbą całkowitą, posiada dokładnie jeden szereg odwrotny. Jest on dany wzorem $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \alpha_n$, dla którego $b_n \neq 0 \iff n = -N$, $b_{-N} = \frac{1}{a_N}$. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} = a_N b_{n-N}$$

Mamy też $a_N b_{n-N} = 1$ $(n = 0)$ i $a_N b_{n-N} = 0$ $(n \neq 0)$. Z tego wynika, że $f \in C(g)$ oraz $fg = S_1$.

Przykład 3.7. Rozważmy szereg formalny $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \alpha_n$, gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Załóżmy, że szereg $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \alpha_n$ jest szeregiem odwrotnym szeregu f. Wtedy

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{-m} = 1,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{n-m} = 1, \ n \neq 0.$$

Zauważmy, że jeżeli $fg = S_1$, to wszystkie powyższe szeregi są zbieżne, zatem

$$b_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} b_{n-m} - \sum_{m=0}^{\infty} b_{n-1-m} = 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\} \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_{1-m} - \sum_{m=0}^{\infty} b_{-m} = -1, & n = 1 \\ \sum_{m=0}^{\infty} b_{-m} - \sum_{m=0}^{\infty} b_{-1-m} = 1, & n = 0. \end{cases}$$

Z tego wynika, że jeśli f posiada co najwyżej jeden szereg odwrotny. Należy jeszcze sprawdzić, czy rzeczywiście $fg = S_1$. Istotnie, łatwo zaobserwować, że

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{-m} = 1$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{n-m} = 0 \ (n \neq 0)$$

To dowodzi, że szereg f posiada dokładnie jeden szereg odwrotny. Należy zaznaczyć, że nie implikuje to faktu, że szereg g posiada dokładnie jeden szereg odwrotny.

Przykład 3.8. Rozważmy szereg formalny $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$, gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & n \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Szereg $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\alpha_n$ jest szeregiem odwrotnym szeregu f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

co jest równoważne zależności

$$b_n - b_{n-1} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Spełnia ją szereg o współczynnikach

$$b_n = \begin{cases} c, & n \geq 0 \\ c - 1, & n < 0, \end{cases}$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$, co dowodzi, że szereg f posiada nieskończenie wiele szeregów odwrotnych.

Udowodnimy teraz, przy pomocy zagadnienia szeregów odwrotnych do szeregów formalnych, że mnożenie SF nie jest działaniem łącznym.

Twierdzenie 3.9. *Mnożenie szeregów formalnych nie jest działaniem łącznym.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że iloczyn SF jest łączny, tzn. jeśli $gh \in C(f)$, to $fg \in C(h)$ i $f(gh) = (fg)h$ dla każdych $f, g, h \in \mathbb{F}$.
Wykażemy teraz dwie własności wynikające z założonej łączności mnożenia szeregów formalnych:

(1) *Niech $g \in \mathbb{F}(\alpha)$. Jeśli dla pewnego $f \in \mathbb{F}(\alpha)$, $f \neq S_0$, zachodzi $fg = S_0$, to g^{-1} nie istnieje.*
Załóżmy, że istnieje szereg g^{-1}. Pomnóżmy więc równość $fg = S_0$ przez g^{-1}. Otrzymamy $fgg^{-1} = S_0g^{-1}$ (zauważmy, że $fgg^{-1} = f(gg^{-1}) = f \in \mathbb{F}$), czyli $fS_1 = S_0g^{-1}$, a stąd $f = S_0$, co jest sprzeczne z założeniem $f \neq S_0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że g^{-1} nie istnieje.

(2) *Dla każdego $f \in \mathbb{F}$, jeżeli istnieje szereg f^{-1}, to jest on jest określony jednoznacznie.*
Załóżmy nie wprost, że istnieją szeregi $g_1, g_2 \in \mathbb{F}$ takie, że $g_1 \neq g_2$ oraz $fg_1 = fg_2 = S_1$. Wtedy $f(g_1 - g_2) = S_0$. Z założenia mamy $g_1 - g_2 \neq S_0$, więc z *(1)* wynika, że nie istnieje szereg f^{-1}, co dowodzi tezy.

Otrzymaliśmy sprzeczność, bo wcześniej podaliśmy przykład szeregu, którego szereg odwrotny nie jest określony jednoznacznie. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że iloczyn szeregów formalnych nie jest łączny.

Brak własności łączności działania mnożenia szeregów formalnych oraz niejednoznaczność określenia szeregu odwrotnego bardzo utrudniają rozważanie zagadnienia szeregów odwrotnych szeregów formalnych - nie można np. jednoznacznie przyporządkować danemu szeregowi f jego szeregu odwrotnego f^{-1}, co czyni problem znalezienia warunku koniecznego/dostatecznego

istnienia f^{-1} oraz wzoru na współczynniki f^{-1} bardzo złożonym. Stwarza to także komplikacje w próbie zdefiniowania złożenia formalnych szeregów Laurenta (w literaturze znaleźliśmy jedynie zdefiniowane złożenie formalnego szeregu Laurenta i formalnego szeregu potęgowego [2]), gdyż występowałyby w nim wyrażenia postaci $f^{-n} := (f^{-1})^n := f^{-1} \cdot ... \cdot f^{-1}$ (n czynników), a szereg f^{-1} nie musi być określony jednoznacznie. Trudno też jest zdefiniować iloraz szeregów formalnych, gdyż niemożliwym w tej sytuacji jest zastosowanie "klasycznej" definicji $\frac{f}{g} = fg^{-1}$ (gdzie $f, g \in \mathbb{F}$, $g^{-1} \in \mathbb{F}$, $f \in C(g^{-1})$).
Można jednak sformułować pewne twierdzenia, jakie muszą spełniać w pewnych przypadkach szeregi odwrotne szeregów formalnych:

Twierdzenie 3.10. *Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\alpha_n \in \mathbb{F}$ i załóżmy, że istnieje $f^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\alpha_n$ (przy czym dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, $c_n, d_n \in \mathbb{R}$) oraz istnieją $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, dla których $c_n, c_m \neq 0$. Jeżeli, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \geq 0$, to istnieje takie $m \in \mathbb{Z}$, że $d_m < 0$.*

Dowód. Z definicji szeregu f^{-1} wynika, że $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{-m} = 1$ i, dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m} = 0$. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $d_n \geq 0$. Wtedy, aby zachodziła druga z przytoczonych w poprzednim zdaniu równości, dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ musi zachodzić $c_m = 0$ lub $d_{n-m} = 0$. Zauważmy jednak, że jeśli $c_m \neq 0$, to dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi $d_{n-m} = 0$, czyli dla każdego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-m\}$ $d_k = 0$. Ponieważ jednak istnieją dwie różne liczby całkowite n, m, dla których $c_m \neq 0$, więc $d_k = 0$ dla każdego $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{-m_1\}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \{-m_2\})$, czyli $d_k = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc $f^{-1} = S_0$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że istnieje takie $m \in \mathbb{Z}$, że $d_m < 0$.

Uwaga 3.11. Jeżeli dwa szeregi formalne f, g są różnych typów, ale mają takie same współczynniki, to jeżeli szereg o współczynnikach b_n jest szeregiem odwrotnym do f (niekoniecznie jedynym), to szereg o współczynnikach b_n (ale tego typu, co szereg g) jest szeregiem odwrotnym do g (niekoniecznie jedynym). Podobna własność dotyczy także innych operacji arytmetycznych na szeregach formalnych, np. dodawania, mnożenia, gdyż np. iloczyn szeregów formalnych zależy jedynie od współczynników szeregów, nie od ich typu (co wynika bezpośrednio z definicji iloczynu SF).

Uwaga 3.12. Niech $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\alpha_n$ będzie SF i niech $k \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{C}(f)$. Oznaczmy $g_k := S_k(\breve{g})$. Zachodzi $fg = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \cdot g_n)\alpha_n$ (gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn punktowy dwóch SF).

Uwaga 3.13. Alternatywna definicja szeregu odwrotnego. Oznaczmy współczynniki szeregu f^{-1} przez d_n, przy założeniu, że f^{-1} istnieje, a szeregu f przez c_n. Zauważmy, że zachodzi: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{-m} = f^{-1} \cdot f_0 = 1$, $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m} = f^{-1} \cdot f_n = 0$ (dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Szereg f^{-1} możemy zatem zdefiniować następująco:
szereg $g \in \mathbb{F}$ nazywamy szeregiem odwrotnym do szeregu $f \in \mathbb{F}(\alpha)$, o ile istnieje szereg formalny spełniający poniższe warunki:

- $g \cdot f_0 = g \cdot \breve{f} = 1$,
- dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $g \cdot f_n = 0$.

Można udowodnić również pewne twierdzenia związane z szeregami odwrotnymi szeregów formalnych, nie znając bezpośredniej postaci szeregu f^{-1} dla danego szeregu f. Poniżej przedstawiam przykład takiego twierdzenia.

Twierdzenie 3.14. *Niech* $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\alpha_n \in \mathbb{F}$, $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\alpha_n \in \mathbb{F}$ *i* $gf = S_1$ *(tzn. g jest szeregiem odwrotnym do f). Załóżmy ponadto, że istnieje granica* $\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m}$ *oraz granica podwójna* $\lim_{n,k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m}$. *Wtedy*

$$\lim_{n,k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = 0$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = 0.$$

Dowód. Z definicji szeregu odwrotnego do szeregu formalnego mamy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = \sum_{s=1}^{n} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m c_{s-m}) = 0$$

Z tego wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = 0$$

Z założeń twierdzenia granica $\lim_{k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m}$ oraz istnieje $\lim_{n,k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m}$.
Z powyższych rozważań, na mocy Twierdzenia 2.13 z [3] wynika, że

$$\lim_{n,k\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = 0$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} d_m c_{s-m} = 0,$$

co kończy dowód.

4. Szeregi formalne: ujęcie metryczne

Celem niniejszego paragrafu jest przedstawienie SF jako przestrzeni metrycznej. Pokażemy, że zastosowanie takiego spojrzenia na przestrzeń SF do szukania szeregów odwrotnych jest bardzo utrudnione z powodu struktury algebraicznej szeregów formalnych.
Z literatury znamy metrykę d_{ord} (np. [2]). Poniżej konstruujemy i rozważamy inną metrykę w przestrzeni SF, w pewnym sensie analogiczną do metryki stosowanej m.in. w przestrzeniach funkcji ograniczonych oraz omawiamy pewne podobieństwa i różnice tej metryki i metryki d_{ord}, rozważając obie z nich pod kątem podobnych własności.

4.1. **Metryka** $d(f,g) = 1 - \frac{1}{2^{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|}}$.

Uwaga 4.1. Przyjmować będziemy $2^\infty = \infty$, $\frac{1}{2^\infty} = 2^{-\infty} = 0$.

Lemat 4.2. Dane są ciągi (zawierające również wyrazy o indeksach ujemnych) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ o wyrazach zespolonych. Zachodzi wtedy

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x_n - y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}}|x_n - z_n| + \sup_{n\in\mathbb{Z}}|z_n - y_n|.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x_n - z_n| + \sup_{n\in\mathbb{Z}}|z_n - y_n| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \geq \sup_{n\in\mathbb{Z}}|x_n - y_n|,$$

co kończy dowód.

Lemat 4.3. Niech $x, y, z \in [0, +\infty) \cup \{\infty\}$ i niech $x + y \geq z$. Zachodzi $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$.

Dowód. Rozważmy następujące przypadki:

(1) $x, y, z < \infty$:
Przekształćmy nierówność $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$ równoważnie:

$$1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z},$$
$$2^x 2^y - 2^y - 2^x \geq -2^{x+y-z},$$
$$(2^x - 1)2^y - 2^x \geq -2^{x+y-z}.$$

Zauważmy, że $(2^x - 1)2^y - 2^x \geq 2^x - 1 - 2^x = -1$, natomiast $x + y - z \geq 0$, więc $-2^{x+y-z} \leq -1$, co kończy tę część dowodu.
Jeśli $x = +\infty$ lub $y = +\infty$ lub $z = +\infty$, to lemat jest prawdziwy w oczywisty sposób:

(2) $x, y, z < \infty$:
Nierówność $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$ sprowadza się do tożsamości $1 \geq 0$.

(3) $x, y = \infty$, $z < \infty$:
Nierówność $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$ sprowadza się do postaci $1 \geq -\frac{1}{2^z}$, której prawdziwość jest oczywista.

(4) $x, y < \infty$, $z = \infty$ - sprzeczność z założeniem $x + y \geq z$.

(5) $x = \infty$, $y, z < \infty$ (analogicznie rozpatrujemy przypadek $y = \infty$, $x, z < \infty$):
Nierówność $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$ sprowadza się do postaci $1 - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$; lewa strona tej nierówności jest nieujemna, a prawa- niedodatnia, co kończy tą część dowodu.

(6) $x, z = \infty$, $y < \infty$ (analogicznie rozpatrujemy przypadek $y, z = \infty$, $x < \infty$):
Nierówność $1 - \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \geq -\frac{1}{2^z}$ sprowadza się do postaci $1 - \frac{1}{2^y} \geq 0$, której prawdziwość jest oczywista, bo $y \geq 0$.

Ustalmy pewien dowolny, ustalony zbiór X, funkcję $\alpha : X \mapsto \mathbb{C}$; przyjmować będziemy również $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\alpha)$.
Rozważmy przestrzeń metryczną $(\mathbb{F}, d)$, gdzie $d : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest metryką daną wzorem

$$d(f,g) := 1 - \frac{1}{2^{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|}},\ \text{gdzie } a_n, b_n - \text{ współczynniki szeregów odpowiednio } f \text{ i } g.$$

Przestrzeń $(\mathbb{F}, d)$ jest faktycznie przestrzenią metryczną, gdyż dla każdych $f, g, h \in \mathbb{F}$:

(1) $d(f,g)=0 \iff 2^{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|}=1 \iff \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|=0 \iff \forall_{n\in\mathbb{Z}} a_n-b_n=0 \iff f=g$,

(2) $d(f,g)=d(g,f)$, ponieważ dla każdych $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $|a_n-b_n|=|b_n-a_n|$,

(3) $d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)$, na mocy Lematu 4.2 i Lematu 4.3,

czyli d spełnia aksjomaty metryki na $\mathbb{F}$.

W dalszych rozważaniach, o ile nie powoduje to nieporozumień, przez metrykę d rozumieć będziemy metrykę zdefiniowaną powyżej. W następnym podrozdziale wszystkie rozważania będą się natomiast koncentrowały wokół metryki d_{ord}.

Uwaga 4.4. Zauważmy, że na przestrzeni $\mathbb{F}$ nie możemy zdefiniować metryki analogicznej do klasycznej metryki supremalnej. Istotnie, oznaczmy współczynniki szeregu formalnego f przez a_n, a szeregu formalnego g przez b_n. Oczywiście można tak dobrać szeregi f, g, by $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|=+\infty$ (np. niech współczynniki szeregu f będą równe $a_n=n$, a szeregu g: $b_n=2n$), zatem funkcja $d_{sup}(f,g)=\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|$ nie spełnia definicji metryki na $\mathbb{F}$, gdyż metryka nie może przyjmować wartości nieskończonej.

Definicja 4.5. Dany jest ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,n}\alpha_k \in \mathbb{F}$. Szereg $g=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} b_k\alpha_k \in \mathbb{F}$ nazywamy granicą ciągu (f_n), gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} d(f_n,g)<\epsilon.$$

O ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mówimy wtedy, że jest zbieżny do szeregu formalnego g.

Twierdzenie 4.6. *Niech* $(f_n)=(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,n}\alpha_k)$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n = g = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k\alpha_k$, *to* $\forall k\in\mathbb{Z}\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_{k,n}=b_k$.

Dowód. Zachodzi $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n = g = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k\alpha_k \in \mathbb{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} 1-\frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|}}<\epsilon, \text{ czyli}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|<\log_2\frac{1}{1-\epsilon}.$$

Dla każdego $1>\epsilon>0$, $\log_2\frac{1}{1-\epsilon}>0$ oraz dla każdego $\epsilon>0$ $\alpha=1-\frac{1}{2^\epsilon}>0$ spełnia równanie $\epsilon=\log_2\frac{1}{1-\alpha}$. Z tego wynika, że jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} 1-\frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|}}<\epsilon, \text{ to}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|<\epsilon.$$

Stąd

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}\forall_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|<\epsilon, \text{ czyli}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,n}\alpha_k)=g=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\alpha_k \text{ implikuje}$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}\ \lim_{n\longrightarrow\infty} a_{k,n}=b_k,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie odwrotne do powyższego nie zachodzi. Istotnie, to że $\forall k \in \mathbb{Z} \lim_{n\longrightarrow\infty} a_{k,n} = b_k$ (czyli $\forall_{k\in\mathbb{Z}}\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}|a_{k,n}-b_k| < \epsilon$) nie implikuje $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}\forall_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k| < \epsilon$, więc w szczególności nie musi zachodzić $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}1-\frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|}} < \epsilon$, ani $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}1-\frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|}} < \epsilon$ (por. pierwsza część powyższego dowodu). Rozważmy przykładowo ciąg szeregów formalnych $(f_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}\alpha_m)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1, & |m| \geq n \\ 0, & |m| < n. \end{cases}$$

Dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 0$, jednak $d(f_n, S_0) = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem ciąg (f_n) nie jest zbieżny do S_0.

Uwaga 4.7. Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, $a_{k,n} \to b_k$, to $f_n \to g$ lub ciąg (f_n) nie posiada granicy (w metryce d).

Uwaga 4.8. Niech (S_n) oznacza ciąg szeregów częściowych szeregu f, tzn. dla $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n$ oraz dla każdego $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$S_m := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(m)}\alpha_n, \text{ gdzie}$$

$$a_n^{(m)} := \begin{cases} a_n, & |n| < m \\ 0, & |n| \geq m. \end{cases}$$

Zauważmy, że niekoniecznie $\lim_{n\to\infty} S_n = f$. Istotnie, ustalmy $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\alpha_m$, gdzie $a_m = 1$, $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy $d(S_n, f) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Z powyższego twierdzenia wynika jednak następujący fakt: jeżeli S_n to ciąg szeregów częściowych szeregu f, to $\lim_{n\to\infty} S_n = f$ lub ciąg S_n nie posiada granicy.

Twierdzenie 4.9. *Niech $(S_m)_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ oznacza ciąg szeregów częściowych szeregu $f \in \mathbb{F}$. Wtedy $\lim_{m\to\infty} S_m = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{m\to\infty} \delta_n = 0$ (gdzie $\delta_n = \sup_{n\in\mathbb{Z},|n|>m} |a_n|$, a_n to współczynnik szeregu f, $n \in \mathbb{N}$).*

Dowód. Oznaczmy współczynniki szeregu S_m przez $b_{m,n}$. Wtedy

$$d(S_m, f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |b_{n,m} - a_n|.$$

Zauważmy, że

$$|b_{n,m} - a_n| = \begin{cases} 0, & n \leq m \\ |a_n|, & n > m. \end{cases}$$

Z tego wynika, że

$$d(S_m, f) = \sup_{n\in\mathbb{Z},|n|>m} |a_n| = \delta_n.$$

Z definicji granicy ciągu SF wynika, że $S_m \to f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(S_m, f) \to 0$, czyli $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$, co kończy dowód.

Definicja 4.10. Dany jest ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,n}\alpha_k \in \mathbb{F})$. Ciąg (f_n) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} 1 - \frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-a_{k,m}|}} = d(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Uwaga 4.11. Analogicznie do dowodu Twierdzenia 4.6 można udowodnić, że jeżeli ciąg SF-ów ($f_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}\alpha_m$) jest ciągiem Cauchy'ego, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, ciąg $(a_{m,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, tj. dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $s, t > N$ $|a_{m,s} - a_{m,t}| < \epsilon$.

Uwaga 4.12. Jeżeli ciąg (f_n), $f_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}\alpha_m$, jest ciągiem Cauchy'ego, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, ciąg $a_{m,n}$ (ze względu na n) jest ciągiem Cauchy'ego, zatem dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, ciąg $a_{m,n}$ (ze względu na n) jest zbieżny. Nie dowodzi to jednak zbieżności ciągu (f_n), a co za tym idzie - zupełności przestrzeni $(\mathbb{F}, d)$. W dalszej części tego rozdziału pokażemy jednak innym sposobem, że przestrzeń $(\mathbb{F}, d)$ jest zupełna.

Uwaga 4.13. Zauważmy, że z dowodu Twierdzenia 4.6 wynika, że stwierdzenie

(1) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} 1 - \frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-b_k|}} < \epsilon$ jest równoważne stwierdzeniu

(2) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} \sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n} - b_k| < \epsilon$.

Analogicznie można sprawdzić, że

(1) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} 1 - \frac{1}{2^{\sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-a_{k,m}|}} < \epsilon$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(2) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} \sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n} - a_{k,m}| < \epsilon$

(gdzie $a_{k,n} \in \mathbb{C}$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).

Twierdzenie 4.14. *([1], Tw. 7.8), Ciąg funkcji (f_n) określonych na zbiorze E o wartościach zespolonych, jest na tym zbiorze jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\geq N, x\in E}|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon.$$

W dowodzie twierdzenia o zupełności przestrzeni (F, d) postępować będziemy podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 7.15 z [1], jednak rozważać będziemy nieco inny typ funkcji (szereg formalny ustalonego typu to w istocie funkcja $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$):

Twierdzenie 4.15. *Przestrzeń metryczna (F, d) (gdzie $d(f, g) = 1 - \frac{1}{2^{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|a_n-b_n|}}$) jest zupełna.*

Dowód. Niech $(f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{n,k}\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Wtedy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} d(f_n, f_m) < \epsilon, \text{zatem, na mocy uwagi 4.13,}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} \sup_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n} - a_{k,m}| < \epsilon, \text{ zatem}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n} - a_{k,m}| < \epsilon.$$

Ponieważ szereg formalny to funkcja z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$, to ciąg (f_n) można traktować jako ciąg funkcji (f_n) argumentu $k \in \mathbb{Z}$ ($a_{k,n} := f(n, k)$). Z dowodu Twierdzenia 4.6 oraz definicji jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego bezpośrednio wynika, że ciąg (f_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(f_{n,k})$ jest zbieżny jednostajnie ze względu na k. Wiemy, że

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\forall_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,n}-a_{k,m}|<\epsilon,$$

zatem, na mocy Twierdzenia 4.14, istnieje funkcja $f:\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{C}$, do której ciąg $(f_{n,k})$ jest jednostajnie zbieżny, zatem ciąg (f_n) jest zbieżny, co kończy dowód.

4.2. **Metryka d_{ord}.** Zdefiniujmy najpierw pojęcie rzędu szeregu formalnego oraz metrykę d_{ord}:

Definicja 4.16. [2] Niech $f=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}a_n\alpha_n\in\mathbb{F}$. Rzędem szeregu $f\neq S_0$ nazywamy liczbę

$$ord(f):=\min\{|n|:a_n\neq 0\}.$$

Przyjmujemy $ord(S_0)=+\infty$.

W przestrzeni szeregów formalnych można określić metrykę d_{ord} jako $d_{ord}(f,g)=2^{-ord(f-g)}$ dla każdych $f,g\in\mathbb{F}$. Dowód, że tak zdefiniowana funkcja d_{ord} spełnia aksjomaty metryki znajduje się np. w [2]. W książce [2] metryka d_{ord} jest zdefiniowana na zbiorze formalnych szeregów Laurenta. Wszelkie jej własności są jednak takie same, jak własności metryki d_{ord} zdefiniowanej na $\mathbb{F}$ (metryka zdefiniowana powyżej nie zależy od typu rozważanych szeregów). Dla metryki d_{ord} zachodzi mocniejsza wersja Twierdzenia 4.6:

Twierdzenie 4.17. *Niech (f_n), $f_n=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}a_{n,m}\alpha_m$ będzie ciągiem SF i niech $g=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}b_m\alpha_m\in\mathbb{F}$. Wtedy jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=g$ (w metryce d_{ord}), to dla każdego $m\in\mathbb{Z}$ istnieje takie $N\in\mathbb{N}$, że dla każdego $n>N$ $a_{n,m}=b_m$.*

Dowód. Na mocy definicji granicy w przestrzeni metrycznej, dla każdego $\epsilon>0$ istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n>N$, $2^{-ord(f_n-g)}<\epsilon$, czyli $ord(f_n-g)>M$, gdzie $M=-\log_2\epsilon$. Z tego wynika, że, dla każdego $m\leq M$, $a_{n,m}-b_m=0$. Ponieważ dla każdego $\epsilon\in(0,1)$ istnieje takie $\alpha>0$, że $-\log_2\epsilon=\alpha$, zatem dla każdego $m\in\mathbb{Z}$ można dobrać odpowiednie M, a co z tego wynika, odpowiednie ϵ i N, zatem dla każdego $m\in\mathbb{Z}$ istnieje takie $N\in\mathbb{N}$, że dla każdego $n>N$ $a_{n,m}-b_m=0$.

Uwaga 4.18. Zachodzi również twierdzenie odwrotne do powyższego twierdzenia. Istotnie, załóżmy, że dla każdego $m\in\mathbb{Z}$ istnieje takie $N\in\mathbb{N}$, że dla każdego $n>N$, $a_{n,m}-b_m=0$. Oznaczmy tę liczbę przez $N(m)$. Zauważmy, że dla danego $k\in\mathbb{Z}$ i $n>\max_{|s|<k,s\in\mathbb{Z}}N(s)$, $ord(f_n-g)\geq k$. Oznaczmy przez $K(n)$ maksymalną wartość k, dla której dana liczba n spełnia nierówność $n>\max_{|s|<k,s\in\mathbb{Z}}N(s)$. Wtedy $ord(f_n-g)\geq K(n)$. Gdy n dąży do nieskończoności, to $K(n)$ oczywiście również dąży do nieskończoności, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}ord(f_n-g)=+\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,g)=0$. Z tego wynika, że

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}d(f_n,g)<\epsilon,$$

co kończy dowód.

Uwaga 4.19. Analogicznie do dowodu Twierdzenia 4.6 można udowodnić, że jeżeli ciąg SF $(f_n=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}a_{m,n}\alpha_m)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to dla każdego $m\in\mathbb{Z}$, ciąg $a_{m,n}$ (ze względu na n) jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{F},d_{ord})$.

Przestrzeń $(\mathbb{F},d_{ord})$ jest zupełna. Fakt ten łatwo wynika z dowodu Proposition 6.6.5 w [2].

Definicja 4.20. Szereg $f \in \mathbb{F}$ nazywać będziemy szeregiem skończonym z lewej strony, jeżeli istnieje taka liczba całkowita N, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, współczynniki a_n szeregu f są równe 0, o ile $n < N$.

Zauważmy, że każdy szereg f skończony z lewej strony (różny od S_0) możemy zapisać w postaci $S_{-N}(g)$ (tj. $f = S_{-N}(g)$), $N \in \mathbb{N}$, dla pewnego szeregu g o współczynnikach b_n takich, że $b_n = 0$ dla każdego $n < 0$ i $b_0 \neq 0$. .

Definicja 4.21. Szeregiem S-O szeregu $f = S_{-N}(g)$ (przy oznaczeniach z obserwacji powyżej) skończonego z lewej strony nazywamy szereg $f_o = S_N(g^{-1})$, gdzie g^{-1} jest szeregiem odwrotnym do g o współczynnikach o indeksach ujemnych równych 0 i współczynniku o indeksie 0 różnym od 0 (tj. $gg^{-1} = S_1$ oraz, oznaczając współczynniki szeregu g^{-1} przez c_n, $c_n = 0$ dla każdego $n < 0$ oraz $c_0 \neq 0$). Tak zdefiniowany szereg g^{-1} jest określony jednoznacznie na mocy twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i postaci szeregu odwrotnego do formalnego szeregu potęgowego (Theorem 1.1.9, [2]) i uwagi 3.11).

Twierdzenie 4.22. *Jeżeli szereg g jest szeregiem S-O szeregu f skończonego z lewej strony (tj. $f = S_{-N}(g)$, $N \in \mathbb{N}$), to $fg = S_1$.*

Dowód. Oznaczmy współczynniki szeregu g przez a_n, szeregu g^{-1} przez b_n, szeregu gg^{-1} przez c_n, szeregu $S_{-N}(g)$ przez x_n, szeregu $S_N(g^{-1})$ przez y_n, a szeregu $(S_{-N}(g))(S_N(g^{-1}))$ przez k_n. Wtedy $x_n = a_{n+N}$, $y_n = b_{n-m}$, zatem

$$k_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m y_{n-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{m+N} b_{n-N-m}.$$

Wiemy jednak, że jeżeli dla pewnego n, $a_n \neq 0$ (lub $b_n \neq 0$), to $n \geq 0$, zatem

$$k_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{m+N} b_{n-N-m} = \sum_{m=-N}^{n-N} a_{m+N} b_{n-N-m} = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s}$$

(podstawiając $s = m + N$).
Mamy teraz

$$c_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m} = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}.$$

Z tego wynika, że $c_n = k_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, zatem

$$(S_{-N}(g))(S_N(g^{-1})) = gg^{-1} = S_1, \text{ co kończy dowód.}$$

Poniżej przedstawiam twierdzenie, które zdecydowanie utrudnia próby poszukiwania szeregów odwrotnych do danego SF, korzystając z metryki d_{ord}. Uniemożliwia ono obliczanie szeregu odwrotnego do szeregu f, który nie jest skończony z lewej strony, jako granicy ciągu szeregów S-O szeregów częściowych S_n szeregu f.

Twierdzenie 4.23. *Niech $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem szeregów częściowych szeregu $f \in \mathbb{F}$ (por. uwaga 4.8). Niech S_n^{-1}, $n \in \mathbb{N}$ oznacza szereg S-O szeregu S_n, o ile istnieje. Jeśli istnieje szereg odwrotny do f oraz istnieje granica $\lim_{n \to \infty} S_n^{-1} = g \in \mathbb{F}$ (w metryce d_{ord}) i $fg = S_1$, to f jest skończony z lewej strony.*

Dowód. W dowodzie stosujemy oznaczenia z definicji szeregu skończonego z lewej strony i szeregu S-O. Istnieje co najmniej jeden szereg odwrotny do szeregu f, więc $f \neq S_0$, zatem istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > M$, $S_n \neq S_0$. Dalsze części dowodu rozważać będziemy rozważać tylko dla $n > M$. Oznaczmy $S_n = S_{-N(n)}(g_n)$ ($-N(n)$-translacja szeregu g_n, $N(n) \in \mathbb{N}$, g_n to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ szereg formalny o współczynnikach o indeksach ujemnych równych 0 oraz współczynniku o indeksie 0 różnym od 0). Wtedy $S_n^{-1} = S_{N(n)}(g^{-1})$, zatem szereg S_n^{-1} ma niezerowe współczynniki tylko dla $n > N(n)$ (oczywiście niektóre współczynniki o indeksach $n > N(n)$ również mogą wynosić 0). Z tego wynika, że $ord(S_n^{-1}) \geq N(n)$. Łatwo sprawdzić, że jeżeli szereg f nie jest skończony z lewej strony, to $\lim\limits_{n\to\infty} N(n) = \infty$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} ord(S_n^{-1}) = \infty$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} d_{ord}(S_n^{-1}, S_0) = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{-1} = S_0$. Niemożliwym jest jednak, by $fS_0 = S_1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szereg f jest skończony z lewej strony, co kończy dowód.

Uwaga 4.24. Zauważmy, że nie istnieje analogiczny dowód dla metryki d z poprzedniego podrozdziału, gdyż wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} N(n) = \infty$ nie implikuje $\lim\limits_{n\to\infty} d(S_n^{-1}, S_0) = 0$.

Uwaga 4.25. Zbieżność ciągu SF w metryce d nie implikuje zbieżności w metryce d_{ord}. Istotnie, ustalmy ciąg szeregów formalnych $(f_n = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} c_{n,m}\alpha_m)$, gdzie $c_{n,m} = \frac{1}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Pokażemy, że w metryce d ciąg f_n jest zbieżny do S_0:
  Zauważmy, że $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} |c_{n,m} - 0| = \frac{1}{n}$, zatem $d(f_n, g) = 1 - \frac{1}{2^{1/n}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, g) = 0$.
- Udowodnimy, że w metryce d_{ord} ciąg (f_n) jest rozbieżny:
  Załóżmy nie wprost, że $g = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} a_m\alpha_m$ jest granicą ciągu (f_n). Rozpatrzmy następujące przypadki:
  (1) nie istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $a_0 = \frac{1}{n}$:
  Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $d(f_n, g) = 1$, gdyż $ord(f_n, g) = 0$, zatem ciąg (f_n) nie jest zbieżny do g.
  (2) $a_0 = \frac{1}{N}$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$. Wtedy
  $$ord(f_n, g) = \begin{cases} 0, & n \neq N \\ N, & n = N. \end{cases}$$
  Zatem dla każdego $n > N$, $d(f_n, g) = 2^{-ord(f_n,g)} = 2^0 = 1$. Z tego wynika, że ciąg (f_n) nie jest zbieżny do g.
  Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że ciąg (f_n) jest rozbieżny.

Uwaga 4.26. Zbieżność ciągu SF w metryce d_{ord} nie implikuje zbieżności tego samego ciągu w metryce d. Istotnie, ustalmy ciąg szeregów formalnych $(f_n = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} c_{n,m}\alpha_m)$, gdzie dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n,m} = \begin{cases} 1, & |m| \geq n \\ 0, & |m| < n. \end{cases}$$

- Udowodnimy, że w metryce d_{ord} ciąg f_n jest zbieżny do S_0:
  Zauważmy, że $ord(f_n - S_0) = ord(f_n) = n$, czyli $2^{-(ord(f_n-g))} = 2^{-n}$. Oczywiście ciąg $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do zera przy $n \to \infty$, zatem
  $$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} d(f_n, g) = 2^{-n} < \epsilon, \text{ co kończy tę część.}$$
- Udowodnimy, że w metryce d ciąg (f_n) jest rozbieżny:
  Dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,m} = 0$, zatem mocy Twierdzenia 4.6 i uwagi 4.7, ciąg (f_n)

jest zbieżny do S_0 lub nie posiada granicy. Mamy teraz

$d(f_n, g) = 1 - \frac{1}{2^{\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} |c_{n,m} - 0|}} = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$, zatem granicą ciągu (f_n) nie jest S_0.

Z tego wynika, że ciąg (f_n) jest rozbieżny.

5. Klasyczne i formalne szeregi Laurenta i Fouriera oraz ich zastosowania

Przypomnimy teraz definicję formalnego szereg Fouriera i formalnego szereg Laurenta z przykładu 2.3:

Definicja 5.1. Formalnym szeregiem Laurenta (FSL) nazywamy szereg formalny typu $\alpha_n := x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Formalnym szeregiem Fouriera (FSF) nazywamy szereg formalny typu $\alpha_n := e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Występuje pewna różnica między powyższą definicją a najczęściej używaną w literaturze definicją formalnego szeregu Laurenta. Zwykle definiuje się szereg Laurenta jako *każde* odwzorowanie z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$ (np. [2]). W teorii równań różniczkowych cząstkowych używa się jednak formalnych szeregów Fouriera $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. W świetle ogólnie stosowanej definicji formalnego szeregu Laurenta każde odwzorowanie $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$ jest szeregiem Laurenta, natomiast formalny szereg Fouriera również należałoby zdefiniować jako odwzorowanie z $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{C}$. To może stwarzać pewne nieścisłości, które nie występują w Definicji 5.1.
Zauważmy, że przy powyższej definicji formalnego szeregu Fouriera i Laurenta, wszystkie definicje oraz twierdzenia zawarte we wcześniejszej części pracy można stosować do przestrzeni formalnych szeregów Fouriera i formalnych szeregów Laurenta.
W przypadku klasycznych szeregów Laurenta i Fouriera symbol $\sum$ oznacza "zwykłe" sumowanie, w przeciwieństwie do szeregów formalnych, gdzie symbol ten nie ma ściśle określonego znaczenia.

5.1. O pewnych zastosowaniach klasycznych szeregów Laurenta i Fouriera.

Zagadnienie rozwijania funkcji w szeregi Fouriera i Laurenta będzie głównym tematem tej części pracy. W kolejnym podrozdziale pokażemy przykłady zastosowania pewnych twierdzenia analizy formalnej i użyjemy formalnej interpretacji szeregów Fouriera i Laurenta.
Zacznijmy od podstawowych twierdzeń związanych z rozwijaniem funkcji w szeregi Fouriera i Laurenta (pochodzą one z prac [5], [7], [8]):

Definicja 5.2. Szeregiem Fouriera funkcji 2π-okresowej $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ w postaci zespolonej nazywamy, o ile istnieje, szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt.$$

Uwaga 5.3. Występuje pewna różnica między szeregiem Fouriera definiowanym w literaturze (np. [1], Definicja 8.9) a szeregiem z powyższej definicji. Jest ona spowodowana różnymi definicjami sumy $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$ (czyli $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}$). W definicji znajdującej się np. w [1] przyjmuje się $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Jednak zgodnie z definicją stosowaną w analizie formalnej (np. [2], [8], por. uwaga 2.5) należałoby zapisać $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} c_n e^{inx} + \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx}$. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} c_n e^{inx}$ i $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx}$, to istnieje granica $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, natomiast implikacja w drugą stronę nie zachodzi (istotnie, ustalmy takie c_n, $n \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{C}$, że $c_n e^{inx} = 1$, $n \geq 0$, $c_n e^{inx} = -1$, $n < 0$. Wtedy $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = 1$, ale ciągi $(\sum\limits_{n=0}^{N} c_n e^{inx})_{N\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ i $(\sum\limits_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx})_{N\in\mathbb{N}}$ są rozbieżne). To pokazuje, że obie interpretacje szeregu $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ definiują szeregi o tych samych współczynnikach, oraz - o ile w świetle obu definicji są zbieżne - zbieżne do tej samej sumy. Mogą jednak istnieć takie $x \in \mathbb{C}$, dla których, w zależności od definicji sumy $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}$, szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ może być zbieżny lub rozbieżny. Dlatego szereg Fouriera traktowany w sposób formalny (czyli szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ oznacza szereg formalny typu e^{inx} o współczynnikach c_n, $n \in \mathbb{Z}$) jest niezależny od definicji sumowania od $-\infty$ do ∞, różnice pojawiają się jedynie przy rozważaniu zbieżności danego szeregu.

Należy zaznaczyć, że szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, przy przyjmowanej w całej pracy (por. uwaga 2.5), definicji sumy po $n \in \mathbb{Z}$, nie jest równoważny postaci trygonometrycznej szeregu Fouriera $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - w przeciwieństwie do szeregu rozważanego przy drugiej z przytoczonych definicji sumy nieskończonej. To oznacza, że zbieżność szeregu w postaci trygonometrycznej nie jest równoważna zbieżności szeregu $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ (przykład potwierdzający ten fakt znajduje się w dalszej części tego rozdziału, po tej uwadze).

W rozdziale tym używać będziemy definicji $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$, gdyż jest ona stosowana w teorii szeregów Laurenta i analizie formalnej (która jest tematem niniejszej pracy). Dlatego pisząc, że szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ jest zbieżny, mam na myśli właśnie taką zbieżność.

Przykład 5.4. Rozważmy następujący szereg S: $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ (czyli szereg Fouriera w postaci trygonometrycznej $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, dla którego $a_0 = 1$, $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $b_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$)). Aby zapisać ten szereg w postaci $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, ustalmy $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2}$. Wtedy szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} e^{inx}$ jest równoważny szeregowi S, o ile zdefiniujemy $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ (por. [5], strona 3). Zauważmy, że szereg S jest zbieżny dla $x = 0$, zatem szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} e^{inx}$ jest zbieżny dla $x = 0$ (dla definicji sumowania $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, z równoważności postaci trygonometrycznej i wykładniczej szeregu Fouriera). Jednak jeżeli zdefiniujemy $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} e^{inx} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{inx} + \sum\limits_{n=1}^{-\infty} e^{-inx}$, szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} e^{inx}$ będzie rozbieżny dla $x = 0$ (wtedy $e^{inx} = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$). To pokazuje, że zbieżności szeregu Fouriera w świetle obu definicji sumowania po $n \in \mathbb{Z}$ nie są równoważne.

Definicja 5.5. Szeregiem Laurenta funkcji $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ nazywamy, o ile istnieje, szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ taki, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

gdzie $\gamma \subset P$ jest dowolną krzywą zamkniętą (musi być ona jednak położona w całości w obszarze zbieżności danego szeregu Laurenta (por. twierdzenie o zbieżności szeregu Laurenta w dalszej części tego rozdziału) i zorientowaną dodatnio względem swojego wnętrza.

Uwaga 5.6. Pisząc w powyższych definicjach, że szereg Laurenta/Fouriera istnieje, mam na myśli możliwość obliczenia współczynników a_n/c_n (czyli istnienie i zbieżność całek, którymi te współczynniki się wyrażają), a nie - zbieżność danego szeregu.

Uwaga 5.7. Szereg Laurenta nie jest określony w punkcie $x = 0$. Dlatego pisząc, że szereg Laurenta jest zbieżny w obszarze $P \subset C$, mam na myśli, że szereg ten jest zbieżny w obszarze $P \setminus \{0\}$.

Uwaga 5.8. Nie można stwierdzić, że jeżeli szereg $L(x)$ jest szeregiem Laurenta funkcji f w pewnym pierścieniu P, to jest on szeregiem Laurenta tej funkcji w pierścieniu P' nie będącym podzbiorem pierścienia P. Istotnie, rozważmy funkcję $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Zauważmy, że w pierścieniu $0 < |z| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n,$$

natomiast w pierścieniu $1 < |z| < \infty$,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1/z}{1-1/z} = \sum_{n=1}^{-\infty} z^{-n}.$$

Powyższy przykład uzasadnia, że definicja szeregu Laurenta funkcji f musi uwzględniać pierścień, w którym tę funkcję rozwijamy - nie można jednoznacznie mówić o szeregu Laurenta funkcji f (trzeba uwzględnić również, na jakim pierścieniu rozwijamy tę funkcję w szereg Laurenta).

Przed rozpoczęciem dalszych rozważań warto również zbadać kwestię zbieżności szeregu Fouriera i Laurenta (warunek zbieżności szeregu Laurenta pochodzi z [8], warunek dla szeregu Fouriera formułujemy poniżej):

Twierdzenie 5.9. *Dany szereg Laurenta* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$, $x \in \mathbb{C}$ *jest*

- *zbieżny, dla* $|x| \in (r, R)$,

- *rozbieżny, dla* $|x| \notin [r, R]$,

gdzie $r := \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n}$, $1/R := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

Twierdzenie 5.10. *Dany szereg Fouriera* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *jest*

- *zbieżny dla* $x \in \mathbb{C}$ *takiego, że* $Im(x) \in (-\ln R, -\ln r)$,
- *rozbieżny dla* $x \in \mathbb{C}$ *takiego, że* $Im(x) \notin (-\ln R, -\ln r)$,

gdzie $r := \limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{1/n}$, $1/R := \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$.

Dowód. Zauważmy, że szereg Fouriera możemy zapisać w następujący sposób:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (e^{ix})^n$$

Zbieżność szeregu Fouriera można zatem badać poprzez analizę zbieżności otrzymanego szeregu Laurenta "nowej" zmiennej $t = e^{ix}$ i przekształcając równoważnie otrzymany warunek zbieżności tak, by zależał on jawnie od zmiennej x. Zapiszmy x w postaci $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mamy:

$$|t| = |e^{ix}| = |e^{ia-b}| = |\cos a + i \sin a||e^{-b}| = e^{-b}$$

Nierówność $R > e^{-b} > r$ jest równoważna nierówności $b \in (-\ln R, -\ln r)$. Korzystając z twierdzenia o zbieżności szeregu Laurenta otrzymujemy, że szereg $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in \mathbb{F}$ jest

- zbieżny, dla $x \in \mathbb{C}$ takiego, że $Im(x) \in (-\ln R, -\ln r)$,
- rozbieżny, dla $Im(x) \notin (-\ln R, -\ln r)$,

co kończy dowód.

Uwaga 5.11. Zauważmy, że powyższe twierdzenia nie rozstrzygają kwestii zbieżności szeregu Laurenta (Fouriera) na brzegach maksymalnego obszaru, wewnątrz którego jest on zbieżny.

Uwaga 5.12. Szereg Fouriera, w odróżnieniu od szeregu Laurenta, jest zbieżny nie w pierścieniu kołowym, a w pasie równoległym do osi $Re(x)$. Z tego wynika w szczególności, że każdy szereg Fouriera f jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$ lub jest rozbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Należy jednak zaznaczyć, że własność ta zachodzi tylko dla definicji sumy po $n \in \mathbb{Z}$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1}$, natomiast nie zachodzi dla definicji typowej dla "klasycznych" szeregów Fouriera (por. uwaga 5.3, przykład 5.4).

Uwaga 5.13. Z Twierdzenia 5.9 wynika, że jeżeli szereg Laurenta jest zbieżny w punkcie $x \in \mathbb{C}$ leżącym wewnątrz obszaru zbieżności tego szeregu, to jest on w tym punkcie bezwzględnie zbieżny. Fakt ten wynika bezpośrednio z twierdzenia o zbieżności szeregu Laurenta: wartości r, R zależą jedynie od wartości bezwzględnych współczynników a_n (nie od ich znaków), co więcej, $|x^n| = |x|^n$ dla każdego $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 5.14. Z Twierdzenia 5.10 wynika, że

- jeżeli $0 \in (-\ln R, -\ln r)$, to szereg Fouriera jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie leżącym wewnątrz obszaru zbieżności tego szeregu,
- jeżeli $0 \notin (-\ln R, -\ln r)$, to szereg Fouriera nie jest bezwzględnie zbieżny w żadnym punkcie leżącym wewnątrz obszaru zbieżności tego szeregu.

Fakt ten wynika bezpośrednio z twierdzenia o zbieżności szeregu Fouriera: wartości r, R zależą jedynie od wartości bezwzględnych współczynników c_n (nie od ich znaków), natomiast dla każdego $x \in \mathbb{C}$, $Im(|x|) = 0$.

Przykład 5.15. Rozważmy szereg $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}e^{inx}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Zbadajmy jego zbieżność. Na mocy powyższego twierdzenia wystarczy zbadać przypadek $x = bi$, $b \in \mathbb{R}$ (na mocy uwagi 5.12 zbieżność szeregu Fouriera dla $x = bi$ jest równoważna zbieżności tego szeregu dla $x = bi + c$, gdzie c jest dowolną liczba rzeczywistą). Mamy

$$R = (\lim_{n\to\infty} (a^{|n|})^{\frac{1}{n}})^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} (a^{|-n|})^{\frac{1}{n}} = a$$

Z tego wynika, że dla $a > 1$ szereg f jest rozbieżny dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Dla $a = 1$ szereg f może być zbieżny co najwyżej dla $x = \ln a = \ln 1 = 0$. Wtedy mamy $f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1$ - szereg ten jest rozbieżny. Dla $a < 1$ szereg f jest zbieżny dla $\frac{x}{i} \in (-\ln\frac{1}{a}, -\ln a)$, trzeba jeszcze zbadać jego zbieżność dla $x = -i\ln a$ oraz $x = -i\ln\frac{1}{a} = i\ln a$. Dla $x = -i\ln a$ mamy

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}e^{in\cdot(-i\ln a)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{n+|n|} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Szereg o wyrazach a^{2n} jest zbieżny (szereg geometryczny o ilorazie należącym do przedziału $(0, 1)$), jednak szereg o wyrazie ogólnym 1 jest rozbieżny. Zbadajmy teraz przypadek $x = i\ln a$. Mamy

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}e^{in\cdot(i\ln a)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}.$$

Szereg o wyrazach a^{2n} jest zbieżny (szereg geometryczny o ilorazie należącym do przedziału $(0, 1)$), jednak szereg o wyrazie ogólnym 1 jest rozbieżny. Podsumowując, szereg $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}e^{inx}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$ jest

- rozbieżny dla każdego $x \in \mathbb{C}$ dla $a \geq 1$,
- zbieżny dla $x \in \mathbb{C}$ takiego, że $Im(x) \in (-\ln\frac{1}{a}, -\ln a)$ dla $a < 1$.

Przykład 5.16. Rozważmy szereg $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^n e^{inx}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Zbadajmy jego zbieżność. Na mocy powyższego twierdzenia wystarczy zbadać przypadek $x = bi$, $b \in \mathbb{R}$ (na mocy uwagi 5.12 zbieżność szeregu Fouriera dla $x = bi$ jest równoważna zbieżności tego szeregu Fouriera dla $x = bi + c$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą). Mamy

$$R = (\lim_{n\to\infty} (a^n)^{\frac{1}{n}})^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} (a^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

Z tego wynika, że szereg ten może być zbieżny co najwyżej dla $x = i\ln a$ (na mocy powyższego twierdzenia). Zauważmy teraz, że

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^n e^{in\cdot i\ln a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{n\ln a - n\ln a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1.$$

Szereg ten jest rozbieżny, zatem szereg $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a^n e^{inx}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$ jest rozbieżny dla każdego $x \in \mathbb{C}$.

W kolejnym podpunkcie podajemy przykład zastosowania omówionych wyżej szeregów - stosujemy szeregi Fouriera i Laurenta do udowodnienia pewnego twierdzenia z rachunku całkowego.

5.1.1. *Szereg Fouriera jako złożenie szeregu Laurenta i funkcji wykładniczej.* W niniejszym paragrafie przedstawimy interpretację szeregu Fouriera jako swego rodzaju złożenia szeregu Laurenta i funkcji eksponencjalnej oraz korzyści płynące z prowadzenia rozważań z takiego punktu widzenia - nowy sposób obliczania pewnego typu całek. Powyższy dowód związany ze zbieżnością szeregów Fouriera przedstawia szereg Fouriera jako "złożenie" szeregu Laurenta i funkcji e^{ix}. Interpretacja szeregu Fouriera jako złożenia formalnego szeregu Laurenta i funkcji eksponencjalnej pozwala na udowodnienie następującego twierdzenia - stanowi on przykład zastosowania szeregów Fouriera i Laurenta w rachunku całkowym:

Twierdzenie 5.17. *Niech $f(z)$ będzie funkcją 2π-okresową określoną na zbiorze $\mathbb{C}$, dla której istnieje jej szereg Laurenta zbieżny w pierścieniu $P_1 = \{z : |z| \in (R_2^l, R_1^l)\}$ i szereg Fouriera zbieżny w pasie $P_2 = \{z : Im(z) \in (-\ln R_2^f, -\ln R_1^f)\}$. Wtedy, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$*

$$\oint_\gamma \frac{f(\frac{\xi}{i})}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2e\pi} \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} \frac{f(s)}{s^{in}} ds,$$

gdzie $\gamma \subset P_1$ jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio względem swojego wnętrza. (w szczególności

$$\oint_\gamma f(\frac{\xi}{i}) d\xi = \frac{1}{2e\pi} \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} \frac{f(s)ds}{s^{-i}}.$$

Dowód. Zauważmy, że jeżeli dla $x \in P_1$, $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$, to $f(e^{ix}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ (dla $e^{ix} \in P_1$, oznaczmy zbiór x spełniających ten warunek przez P_1', wtedy $P_1' = \{x \in \mathbb{C} : Im(x) \in (-\ln R_1^l, -\ln R_2^l)\}$), co oznacza, że funkcja $f(e^{ix})$ posiada szereg Fouriera zbieżny w każdym punkcie zbioru $P_1 \cap P_1'$, a współczynniki Fouriera funkcji $f(e^{ix})$ są równe odpowiednim współczynnikom Laurenta funkcji $f(x)$ w pierścieniu P_1. Należy zaznaczyć, że szereg Fouriera funkcji $f(e^{ix})$ istnieje i jest jednoznaczny na całym zbiorze $\mathbb{C}$ (w naszych rozważaniach nie jest potrzebne założenie o jego zbieżności), dlatego dopóki nie zakładamy zbieżności szeregu Fouriera funkcji $f(e^{ix})$, nie musimy się ograniczać w jego rozważaniu do zbioru $P_1 \cap P_1'$. Niech $x = -it = \frac{t}{i}$, gdzie $t \in \mathbb{R}_+$, $i^2 = -1$. Współczynniki Fouriera funkcji $f(e^t)$ są więc równe odpowiednim współczynnikom Laurenta funkcji $f(x) = f(\frac{t}{i})$, $e^t \in \mathbb{R}$, więc współczynniki Fouriera funkcji $f(e^t)$ możemy obliczyć następująco:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^\xi)}{e^{in\xi}} d\xi = \frac{1}{2e\pi} \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} \frac{f(s)}{s^{in}} ds$$

(dokonując podstawienia $s = e^{\xi}$, $ds = e^{\xi}d\xi$) natomiast współczynniki Laurenta funkcji $f(\frac{t}{i})$ możemy obliczyć następująco:

$$a_n = \oint_{\gamma} \frac{f(\frac{\xi}{i})d\xi}{\xi^{n+1}}.$$

Z powyższych rozważań wiemy, że $a_n = c_n$, zatem

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\frac{\xi}{i})d\xi}{\xi^{n+1}} = \frac{1}{2e\pi} \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} \frac{f(s)ds}{s^{in}},$$

co kończy dowód.

5.2. **O pewnych zastosowaniach szeregów Laurenta i Fouriera rozważanych w sensie formalnym.** W niniejszym paragrafie przedstawimy pewne zastosowania szeregów formalnych. Pokażemy na przykładach zalety stosowania twierdzeń udowodnionych dla "ogólnych szeregów formalnych" do badania funkcji rozwijalnych w szeregi Fouriera lub Laurenta; zastosujemy niektóre twierdzenia udowodnione we wcześniejszej części pracy (dotyczącej "ogólnych" szeregów formalnych).

5.2.1. *Obroty szeregów formalnych i ich zastosowanie.* W poniższym paragrafie sformułujemy pojęcie obrotu szeregu formalnego i pokażemy zastosowanie tego pojęcia w dowodzeniu jednoznaczności rozwiązania pewnego układu równań funkcyjnych. Nie będziemy szczegółowo rozważać tego pojęcia, pokażemy jednak, że samo zdefiniowanie obrotu szeregu formalnego zdecydowanie pomoże w udowodnieniu pewnego przykładowego twierdzenia.

Definicja 5.18. Obrotem szeregu formalnego względem ciągu $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, gdzie $a_n \in \mathbb{C}$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ nazywamy odwzorowanie $\phi_{\mathbf{a}} : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ zdefiniowane $\phi_{\mathbf{a}}(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n\alpha_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (e^{ia_n}a_n)\alpha_n$.

Zauważmy, że w powyższej definicji wprowadzamy ciąg jako funkcję zmiennej całkowitej, nie tylko naturalnej.
W powyższej definicji przyjmujemy, w przeciwieństwie do przykładu 2.3, że litery e, i odpowiadają konkretnym wartościom (stałej Eulera i jednostce urojonej).

Twierdzenie 5.19. *Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, 2π-okresowa, dla której istnieje odpowiadający jej szereg Fouriera (niekoniecznie musi być on zbieżny) i ciąg $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Istnieje co najwyżej jedna funkcja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, 2π-okresowa, dla której istnieje odpowiadający jej szereg Fouriera (niekoniecznie zbieżny) taka, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx}dx = e^{ia_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\ .$$

Dowód. Twierdzenie to wynika w oczywisty sposób z następujących faktów (wynikają one bezpośrednio z definicji szeregu Fouriera funkcji f i jego obrotu względem ciągu):

(1) dla każdej pary (f, a) (gdzie $f \in \mathbb{F}$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) szereg $\phi_a(f)$ jest określony jednoznacznie;

(2) dla każdej funkcji $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ rozwijalnej w szereg Fouriera, szereg Fouriera funkcji g jest określony jednoznacznie.

Powyższy dowód pokazuje, jak oczywistym stało się podane twierdzenie dzięki wprowadzeniu pojęcia obrotu szeregu formalnego. Zauważmy, że dzięki zdefiniowaniu szeregu formalnego możemy pominąć kwestię zbieżności szeregu Fouriera danej funkcji i rozszerzyć klasę funkcji, których dotyczy twierdzenie.

Definicja 5.20. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, 2π-okresowa, dla której istnieje odpowiadający jej szereg Fouriera (niekoniecznie musi być on zbieżny) i ciąg $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Jeżeli istnieje funkcja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, 2π-okresowa, dla której istnieje odpowiadający jej szereg Fouriera (niekoniecznie zbieżny) taka, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx}dx = e^{ia_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,$$

to funkcję g nazywamy funkcją f obróconą względem ciągu $a = (a_n)$ i pisać będziemy $g(x) = \phi_a(f(x))$.

5.2.2. *Zastosowanie twierdzeń związanych z szeregami odwrotnymi do szeregów formalnych.*

Twierdzenie 5.21. *Niech szeregi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$ będą szeregami Laurenta pewnych funkcji $f, g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Wtedy, o ile szereg $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m}$ jest zbieżny,*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)g(z)dz}{z^{n+1}}$$

dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

Powyższe twierdzenie pochodzi z [2] (strona 128).

Uwaga 5.22. Twierdzenie można zapisać również w innej postaci. Niech $L_P(f)$ oznacza formalny szereg Laurenta, którego współczynniki są równe odpowiednim współczynnikom Laurenta funkcji f w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $r, R \in \mathbb{R}_+$. Wtedy, jeżeli dla danych funkcji istnieje iloczyn formalny $L_P(f)L_P(g)$ (zdefiniowany we wcześniejszej części pracy dla ogólnych szeregów formalnych), to $L_P(fg) = L_P(f)L_P(g)$. Z tego twierdzenia wynika również następujący wniosek:
Niech f będzie funkcją, dla której istnieje odpowiadający jej szereg Laurenta (niekoniecznie zbieżny) w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $r, R \in \mathbb{R}_+$, taką, że w pierścieniu P funkcji $\frac{1}{f}$ (kreska ułamkowa oznacza dzielenie, nie funkcję odwrotną) można przyporządkować szereg Laurenta (niekoniecznie zbieżny). Wtedy

$$L_P(\frac{1}{f}) = (L_P(f))^{-1},$$

gdzie $(L_P(f))^{-1}$ oznacza szereg odwrotny do $L_P(f)$ (zdefiniowany we wcześniejszej części pracy dla ogólnych szeregów formalnych).

W poniższym przykładzie znajdują się problemy, w których rozwiązaniu zastosujemy twierdzenia z części pracy dotyczącej ogólnych szeregów formalnych:

Przykład 5.23. Nie istnieje taka funkcja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, że jej rozwinięciem Laurenta w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jest szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} cz^n$ $(c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Dowód. Rozważmy funkcję $f(z) = 1 - z$ $(z \in \mathbb{C})$ (oczywiście jej rozwinięciem Laurenta na całym zbiorze $\mathbb{C}$ jest $1 - z$. Z przykładu 3.8 wynika, że szereg formalny $1 - z$ posiada nieskończenie wiele szeregów odwrotnych. Dane są one ogólnym wzorem $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$, gdzie

$$b_n = \begin{cases} c, & n \geq 0 \\ c - 1, & n < 0 \end{cases}$$

(c to dowolna liczba zespolona). Łatwo jednak sprawdzić, że dla $z \in (-1, 1)$ szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ jest zbieżny do $(1 - z)^{-1}$, zatem rozwinięciem Laurenta funkcji $(1 - z)^{-1}$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jest $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (czyli $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$ dla $c = 0$). Gdyby natomiast szereg o współczynnikach b_n dla $c \neq 0$ był szeregiem Laurenta pewnej funkcji, to funkcją tą musiałaby być funkcja $\frac{1}{1-z}$ (por. uwaga 5.22), a to jest niemożliwe. Z tego wynika, że szereg o współczynnikach b_n nie jest szeregiem Laurenta żadnej funkcji f dla $|z| < 1$, a ponieważ szereg Laurenta sumy funkcji na danym pierścieniu P jest sumą szeregów Laurenta tych funkcji na pierścieniu P, szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} cz^n$ nie jest szeregiem Laurenta żadnej funkcji $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dla $|z| < 1$, co kończy dowód.

Wniosek: Nie istnieje funkcja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ rozwijalna w szereg Laurenta w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz krzywa zamknięta $\gamma \subset P$ zorientowana dodatnio względem swego wnętrza, takie że dla każdych $n, m \in \mathbb{C}$,

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z^{m+1}} \neq 0.$$

Należy zaznaczyć, że w podobny sposób można udowodnić analogiczne twierdzenie dla szeregów Fouriera.

Uwaga 5.24. Powyższy dowód można uprościć, uwzględniając fakt, że szereg $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} cz^n$, gdzie $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest rozbieżny dla każdego $z \neq 0$ (natomiast dla $z = 0$ nie jest w ogóle określony), jednak powyższy dowód pokazuje sposób, który można potencjalnie zastosować do innych szeregów, które niekoniecznie są rozbieżne w każdym punkcie (nie trzeba brać pod uwagę kwestii zbieżności szeregu).

Przykład 5.25. Dana jest funkcja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ rozwijalna w szereg Laurenta w pierścieniu P_1 (taka, że nie zachodzi $f \equiv 0$) oraz funkcja $\frac{1}{f}$ (gdzie kreska ułamkowa oznacza dzielenie) jest rozwijalna w szereg Laurenta w pierścieniu P_2 $(P_1 \cap P_2 \neq \emptyset)$. Wtedy jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}, \oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{f(z)z^{n+1}} \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} \geq 0$$

(gdzie $\gamma_1 \subset P_1 \cap P_2$ jest krzywą zamkniętą zorientowaną dodatnio względem swojego wnętrza), przy czym dla co najmniej dwóch różnych $n, m \in \mathbb{Z}$ można zastąpić znak $\geq$ znakiem $>$, to istnieje takie $N \in \mathbb{Z}$, że

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{f(z)z^{n+1}} < 0.$$

Dowód. Twierdzenie to wynika bezpośrednio ze wzoru na współczynniki szeregu Laurenta danej funkcji oraz Twierdzenia 3.10.
Należy zaznaczyć, że w ten sam sposób można udowodnić analogiczne twierdzenie dla szeregów Fouriera.

PODZIĘKOWANIA

Pragnę wyrazić serdeczne podziękowanie dr hab. Piotrowi Maćkowiakowi, prof. UAM w Poznaniu, za pomoc oraz cenne uwagi dotyczące pracy.

Literatura

[1] Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.
[2] Xiao-Xiong Gan, *Selected Topics of Formal Analysis*,Lecture Notes in Nonlinear Analysis Vol.15, Juliusz Schauder Center for Nonlinear Sudies, Toruń 2017.
[3] Eissa D. Habil, *Double Sequences and Double Series*, 2005 ($https : //www.researchgate.net/publication/242705642\_Double\_Sequences\_and_Double\_Series$).
[4] Ivan Niven, *Formal power series*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), no. 8, 871-889.
[5] $http : //prac.im.pwr.edu.pl/ agniesz/rachunek_prawd_MAEW104/wyklady/R\_Pr\_MAEW104\_wyklad2\_szeregi\_Fouriera.pdf$.
[6] Zbigniew Szafraniec, *Topologia I Notatki do wykładu*, $https : //mat.ug.edu.pl/ szafran/notatki.pdf$.
[7] Andrzej Lenda, $http : //www.ftj.agh.edu.pl/ lenda/skrypty/mmf\_rozdzial1.pdf$ (skrypt).
[8] $https : //pl.wikipedia.org/wiki/Szereg\_Laurenta$