Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2022

Zadania z matematyki nr 831, 832

Redaguje Marcin E. KUCZMA

831. (**a**) Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki: $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 1$; $bc < ad$. Ustalić, która z liczb A, B jest większa:

$$A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}; \qquad B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}.$$

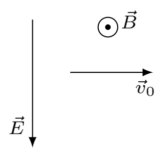
(**b**) Pokazać, że dla dowolnie zadanych liczb $a > d \geqslant 1$ oraz $q > 1$ można znaleźć takie liczby $b, c \in (d, a)$, że $bc < qad$, ale wartości wyrażeń A, B określonych w części (**a**) nie spełniają uzyskanej tam nierówności.

832. Numerujemy wierzchołki n-kąta wypukłego liczbami $1, \ldots, n$ (każda występuje raz; kolejność dowolna). Każda krawędź (bok wielokąta) otrzymuje etykietę ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$, określoną jako wartość bezwzględna różnicy liczb będących numerami jej końców.

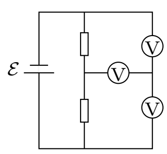
Dla każdego $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą liczbę k, dla której istnieje takie ponumerowanie wierzchołków, że każda liczba ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$ pojawia się jako etykieta pewnej krawędzi, przy czym etykieta k (i tylko ona) pojawia się dwa razy.

Zadanie 832 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Klub 44 F



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 728, 729

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

728. Dodatnio naładowana cząstka porusza się w jednorodnych, wzajemnie prostopadłych polach: elektrycznym o natężeniu E i magnetycznym o indukcji B. W pewnej chwili prędkość cząstki wynosi $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ i $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$; rys. 1), przy czym $E = v_0 B$. Ile wynosi wartość wektora prędkości cząstki w tych chwilach, gdy tworzy on kąt π z wektorem $\vec{v}_0$?

729. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 wszystkie woltomierze są identyczne. Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E} = 5$ V, jej opór wewnętrzny jest zaniedbywalny. Górny woltomierz wskazuje napięcie $U_1 = 2$ V. Co wskazują pozostałe woltomierze?

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Rozwiązanie zadania M 1693. Odpowiedź: $BC = CD = DA = 1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 72^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 108^\circ$.

Ponieważ środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ADC leżą na symetralnej odcinka AC, trójkąty te są równoramienne. Ponieważ środki okręgów opisanych leżą na zewnątrz tych trójkątów, to kąty przy wierzchołkach B i D są rozwarte.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy

$$\sphericalangle AOC = 360^\circ - 2\sphericalangle B.$$

Z drugiej strony O to środek okręgu wpisanego w trójkąt ADC, czyli

$$\sphericalangle AOC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle D}{2}.$$

Zatem

$$360^\circ - 2\sphericalangle B = 90^\circ + \frac{\sphericalangle D}{2}.$$

Podobnie dostajemy, że

$$360^\circ - 2\sphericalangle D = 90^\circ + \frac{\sphericalangle B}{2}.$$

Łącząc te równości, dostajemy, że $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 108^\circ$ oraz $ABCD$ jest rombem.