

delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 11 (570) 2021
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

7 3 4 0
str. 8

D O P A m o e n
S S o d L A Z o d
i T j E P e A a L
C i a K t E n S z A

u B m M R E W n Q



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (570)

Czy $\frac{dy}{dx}$ to iloraz dy i dx ?
Michał Miśkiewicz


str. 1

Blokowe cechy podzielności
Paweł Rafał Bieliński

str. 4

Skąd wiadomo, ile gwiazd rodzi się
w galaktyce?
Miguel Figueira

str. 5

 Zadania


str. 7

Z340
Bartłomiej Pawlik

str. 8

Asymetryczne systemy liczbowe – wygodna
praca z ułamkowymi bitami
Jarosław Duda

str. 10

 Jeszcze nie koniec
Magdalena Fikus

str. 13

Dziwny ciąg
Wojciech Czerwiński

str. 14

Wspomnienie o Andrzeju Fryszkowskim

str. 15

Matematyka i życie: punkty przegięcia
Mirosław Lachowicz

str. 18

Klub 44

str. 21

Niebo w listopadzie


str. 21

Prosto z nieba: Zrodzone z ognia. Jak mogą
powstawać atmosfery na super-Ziemiach?

str. 23

Aktualności
Fizyka zegarów z klocków Lego

str. 24

 Gdzie się podziały tamte funkcje...
Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W następnym numerze: Granice Poznania.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Czy $\frac{dy}{dx}$ to iloraz dy i dx ?

Michał MIŚKIEWICZ

If you have built castles in the air,
your work need not be lost; that is
where they should be. Now put the
foundations under them.

Henry David Thoreau

*Zgodnie z regułą, że odpowiedź na tytułowe pytanie zawsze jest przecząca.

Z mojego skromnego doświadczenia dydaktycznego wynika, że na pytanie postawione w tytule najbezpieczniej jest odpowiedzieć **nie***. Pochodna funkcji $y(x)$ definiowana jest jako granica ilorazów

$$(*) \quad \frac{dy}{dx}(x) := \lim_{x' \rightarrow x} \frac{y(x') - y(x)}{x' - x},$$

ale sama ilorazem nie jest. A przynajmniej nie w taki sposób, że jest ilorazem granic licznika i mianownika. Przypomnijmy – wzór na granicę ilorazu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

zachodzi, gdy ciągi a_n i b_n są zbieżne, przy czym granica b_n nie jest zerowa. To ostatnie zastrzeżenie służy wykluczeniu dzielenia przez zero, a z takim właśnie przypadkiem mamy do czynienia w definicji pochodnej. Gdyby dy było granicą $y(x') - y(x)$, a dx granicą $x' - x$, to jedno i drugie byłoby po prostu zerem.

Nie zmienia to faktu, że pochodna jako granica ilorazów dziedziczy wiele ich własności. Prawdziwe są m.in. wzory na pochodną złożenia i na pochodną funkcji odwrotnej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

które sugerują, że w wielu przypadkach $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak iloraz. Uzasadnia to na przykład metodę rozwiązywania równań różniczkowych *o zmiennych rozdzielonych*, czyli równań postaci $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, gdzie funkcje f i g są z góry zadane. Symbolicznie często zapisuje się ją jako ciąg przejść:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \implies \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Użyta w tym zapisie pośrednia forma $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$ może budzić kontrowersje, ponieważ sugeruje, że dx i dy są bytami, które można porównywać. Najprościej jest jednak uznać, że to tylko mnemotechnika, użyteczna zarówno w rozwiązywaniu równań różniczkowych, jak i w zapamiętaniu wspomnianych wyżej wzorów na pochodne, a przy tym zawierająca cenną intuicję dotyczącą samej definicji pochodnej. Równocześnie niech napisy $\frac{dy}{dx}$ i $\int f(x) dx$ pozostaną właśnie *napisami*, oznaczającymi odpowiednio pochodną $y'(x)$ i funkcję pierwotną (funkcję $F(x)$ spełniającą $F'(x) = f(x)$) – nic nas nie zmusza do przypisywania sensu pojedynczym składowym tych napisów.

I na tym można spokojnie zakończyć lekturę niniejszego tekstu... chyba, że chce się zobaczyć drugie dno.

Tło historyczne

Pojęcie pochodnej pojawiło się w XVII wieku za sprawą Isaaca Newtona (1642–1727) i Gottfrieda Leibniza (1646–1716). Do zapisu pochodnej stosowano (i stosuje się nadal) różne symbole, m.in. y' , \dot{y} , $\frac{dy}{dx}$. To ostatnie oznaczenie pochodzi od Leibniza i oddaje jego rozumienie pochodnej jako ilorazu nieskończenie małych wielkości dy i dx . Leibniz wprowadził bowiem liczby dodatnie nieskończenie małe, to znaczy mniejsze od odwrotności wszystkich liczb naturalnych. Zauważmy, że gdyby $\varepsilon > 0$ było taką właśnie liczbą spełniającą $\varepsilon < \frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to jej odwrotność $\frac{1}{\varepsilon}$ byłaby górnym ograniczeniem zbioru liczb naturalnych \mathbb{N} . Tymczasem tzw. *aksjomat Archimedesesa*, o którym jeszcze napiszę w dalszej części, mówi dokładnie tyle, że takie ograniczenie nie istnieje, więc w *naszej* matematyce nie ma miejsca na liczby nieskończenie małe.

Przykład zastosowania tej metody:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2xy, \\ \frac{dy}{y} &= -2x dx, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (-2x) dx, \\ \ln |y| &= -x^2 + A, \\ y &= B e^{-x^2}. \end{aligned}$$



Dalszy rozwój matematyki nie potoczył się torem wytyczonym przez Leibniza. Chociaż wprowadzona przez niego notacja się utrzymała, to w XIX wieku ściśle pojęcie pochodnej oparto na granicy, tak jak w (*). Samą granicę z kolei zdefiniowano poprzez znany uczniom warunek z epsilon i delta (ε i δ), co ostatecznie odarło tę dziedzinę z magii wielkości infinitezymalnych.

Ale nie jest to koniec historii – w latach 60. ubiegłego wieku Abraham Robinson (1918–1974) ugruntował idee Leibniza, budując teorię liczb i funkcji hiperrzeczywistych uwzględniającą liczby nieskończenie małe. Stworzoną w ten sposób teorię nazywa się *analizą niestandardową*, dla odróżnienia od analizy – no cóż – standardowej. Aksjomat Archimedesesa jest w tej teorii niespełniony, ale za to pochodną można ściśle definiować jako iloraz wielkości nieskończenie małych. Mianowicie liczbę S nazwiemy pochodną $y(x)$ w x , jeśli S jest *zaokrągleniem do najbliższej liczby rzeczywistej (standard part)* wartości $\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ dla każdej infinitezymalnej liczby $\Delta x \neq 0$. Przykładowo, dla $y = x^2$ mamy

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

a zaokrągleniem do liczby rzeczywistej jest $2x$ (niezależnie od Δx). Historię i obecny stan tego fragmentu matematyki można lepiej poznać dzięki źródłom podanym na marginesie.

Różniczka na ratunek

A czy w standardowej analizie można jakoś usprawiedliwić $\frac{dy}{dx}$ jako iloraz? W duchu stawiania fundamentów pod wiszącymi w powietrzu zamkami moglibyśmy to zrobić, definiując dy i dx jako liczby równe odpowiednio $y'(x)$ i 1. Skoro do tej pory nie przypisaliliśmy tym obiektom żadnego innego znaczenia, to wolno. I nikt nie zaprzeczy, że wówczas iloraz $\frac{dy}{dx}$ jest równy pochodnej, tyle że takie podejście jest zupełnie jałowe. Przekonamy się jednak, że nie jest ono dalekie od formalizmu *form różniczkowych*.

Meandry wielu wymiarów

W tym celu dodajmy jeden wymiar i rozważmy funkcję $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy wtedy o funkcji *dwóch zmiennych*, gdyż punkt w \mathbb{R}^2 możemy reprezentować jako parę liczb rzeczywistych (x_1, x_2) . Jeśli ustalimy wartość x_1 , to pozostaje nam funkcja jednej zmiennej $x_2 \mapsto y(x_1, x_2)$ – jej pochodną nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji y względem zmiennej x_2 :

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{x'_2 \rightarrow x_2} \frac{y(x_1, x'_2) - y(x_1, x_2)}{x'_2 - x_2}.$$

Istnieją też inne sposoby reprezentacji punktów \mathbb{R}^2 . Czytelnik na pewno spotkał się ze *współrzędnymi biegunowymi* (r, α) , w których r mierzy długość promienia wodzącego poprowadzonego z początku układu współrzędnych, a α odchylenie tego promienia od dodatniej półosi OX_1 (zob. wzory na marginesie). Z wyjątkiem początku układu i ewentualnej niejednoznaczności doboru α , współrzędne (r, α) w niczym nie ustępują współrzędnym (x_1, x_2) . Możemy więc myśleć o y jako o funkcji $y(r, \alpha)$ i definiować jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial y}{\partial r}$ i $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ wszędzie poza początkiem układu.

Skupmy teraz uwagę na dwóch funkcjach, x_2 oraz α , przyporządkowujących każdemu punktowi jego drugą współrzędną, odpowiednio kartezjańską lub biegunową. Postępując jak poprzednio, obliczamy pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(r \sin \alpha) = r \cos \alpha, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}(\arctg(x_2/x_1)) = \frac{1}{1 + (x_2/x_1)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Drugi wynik można przedstawić w formie $\frac{\cos \alpha}{r}$ i widać wtedy, że $\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}$ nie jest równe $(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha})^{-1}$. Intuicja – przynajmniej w tak naiwnym wydaniu – nas zawiodła.

Adepci studiów matematycznych i technicznych znają rozwiązanie tego problemu – *różniczkę*. Różniczka y w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem

Literatura:

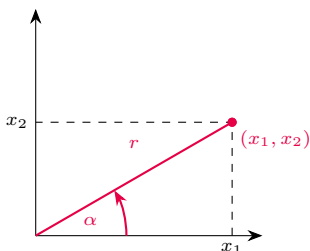
M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*.

L. Arkeryd, *Analiza niestandardowa*, Δ_{04}^7 .

T. Tao, *Nonstandard analysis as a completion of standard analysis*, artykuł dostępny online.

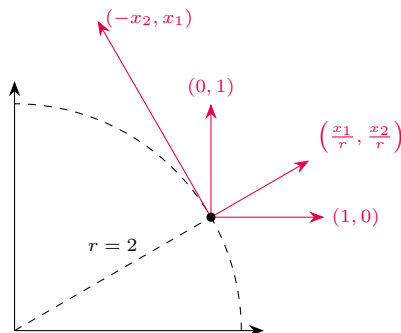
H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, książka dostępna online.

Przykładowo, dla $y = x_1 x_2^2$ mamy $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 x_2$ – na potrzeby obliczania pochodnej cząstkowej po x_2 zmienną x_1 niejako *zamrażamy*.



$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha \\ x_2 &= r \sin \alpha \\ r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \alpha &= \arctg(x_2/x_1) \text{ (nie zawsze)} \end{aligned}$$

Uwaga terminologiczna: wzór (**) nie jest definicją różniczki, tylko *pochoďnej kierunkowej*. Wiadomo jednak, że jeśli funkcja y posiada różniczkę, to (**) jest w mocy.



liniowym $dy_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, które na wektorze $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ przyjmuje wartość

$$(**) \quad dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - y(\mathbf{p})}{t}.$$

Wspomniane wcześniej pochodne cząstkowe dają się wyrazić jako szczególne przypadki powyższych pochodnych kierunkowych:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = dy(1, 0), \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = dy(0, 1), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = dy\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = dy(-x_2, x_1),$$

choć w dwóch ostatnich przypadkach nie jest to takie oczywiste. Warto jednak odnotować, że pojawiające się tu wektory odpowiadają kierunkom, w których porusza się punkt, gdy ustali się jedną współrzędną, a zaburzy drugą.

Różniczki są przekształceniami liniowymi, więc jako takie można je dodawać, mnożyć przez skalary, a przy odpowiednich warunkach również składać – to ostatnie jest odpowiednikiem mnożenia i pojawia się naturalnie przy obliczaniu różniczki złożenia. A czy można dzielić, jak w napisie $\frac{dy}{dx}$?

Może się zdarzyć na przykład, że w danym punkcie $dz_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 2dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ dla wszystkich $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, powiedzielibyśmy wtedy, że $\frac{dz_{\mathbf{p}}}{dy_{\mathbf{p}}} = 2$. To jednak rzadki przypadek – we wcześniej rozważonym przykładzie mamy

$$dx_2(v_1, v_2) = v_2, \quad d\alpha(v_1, v_2) = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

różniczki te nie są więc proporcjonalne (poza osią OX_1).

Dzielenie różniczek w jednym wymiarze

Dobra wiadomość! W przypadku jednowymiarowym wszystkie przekształcenia liniowe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są proporcjonalne, więc zawsze można je dzielić (chyba że dzielimy przez zero, to wtedy nie). W szczególności z definicji (**) wynika

$$dy_x(v) = y'(x)v, \quad dx_x(v) = v, \quad \frac{dy_x(v)}{dx_x(v)} = y'(x) \quad \text{dla } x, v \in \mathbb{R}, v \neq 0.$$

Różniczka pozwala zatem zarówno przypisać sens symbolom dx , dy , jak i nadać $\frac{dy}{dx}$ walory ilorazu. Jest nawet lepiej – po wykonaniu pewnej pracy (nadaniu \mathbb{R}^2 struktury *rozmaitości gładkiej*) można pozbyć się zależności definicji (**) od współrzędnych (x_1, x_2) , zależności kryjącej się w dodawaniu wektorów w \mathbb{R}^2 .

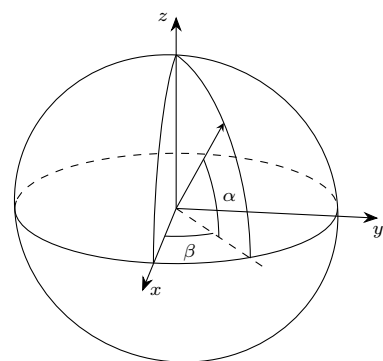
Tak samo w \mathbb{R} ! Jeśli funkcja $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma niezerującą się różniczkę, to można ją przyjąć jako współrzędną w miejsce x , tak samo jak współrzędne kartezjańskie można zamienić na biegunowe. Wtedy z konieczności porównanie różniczek dy i dz daje $dy = \frac{dy}{dz} dz$, przy czym $\frac{dy}{dz}$ jest pochodną y po z . W rezultacie

$$dy = \frac{dy}{dz} dz, \quad dz = \frac{dz}{dx} dx \implies dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} dx,$$

i wzór na pochodną złożenia okazał się faktem arytmetycznym. Czytelnik może się czuć oszukany, i słusznie – tak naprawdę wzór na pochodną złożenia jest już zakodowany we wspomnianej strukturze rozmaitości, która pozwoliła nam *oderwać różniczkę od współrzędnych*. Jeśli udało mi się Czytelnika zaciekawić, to polecam zagłębić się w geometrię różniczkową – dziedzinę zajmującą się wolnym od współrzędnych (przynajmniej w większości) opisem obiektów geometrycznych. A na początek proponuję zastanowić się nad poniższymi problemami:

Zadanie 1. Punkty na sferze jednostkowej $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ można opisywać przez geograficzną szerokość α i długość β (wzorami jak na marginesie). O funkcji $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ można wtedy myśleć jako o funkcji $f(\alpha, \beta)$ i obliczać jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$. Z drugiej strony, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ zadaje opis sfery (lub przynajmniej jej połowy) parą (x, y) , możemy więc też liczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Jak opisać zależność między jednym a drugim zestawem pochodnych?

Zadanie 2. Jak zmodyfikować definicję (**), by miała sens dla $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$? Jak wyrazić pochodne cząstkowe z poprzedniego zadania w terminach różniczek? *Wskazówka:* ograniczyć się do wektorów \mathbf{v} stycznych do \mathbb{S}^2 w \mathbf{p} , a następnie poprawić $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$, by punkt ten leżał na sferze.



Współrzędne sferyczne:
 $x = \cos \alpha \cos \beta$
 $y = \cos \alpha \sin \beta$
 $z = \sin \alpha$

Blokowe cechy podzielności

Paweł Rafał BIELIŃSKI

Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Szeroko znana jest cecha podzielności przez 3 i przez 9. Mianowicie: liczba n dzieli się przez 3 (lub 9) wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3 (odpowiednio 9). Można tę myśl wyrazić w sposób nieco bardziej skomplikowany, za to lepiej poddający się uogólnieniu: daną liczbę dzielimy, zaczynając od końca, na bloki jednocyfrowe, a następnie dodajemy bloki. Otrzymana liczba dzieli się przez 3 lub 9 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wyjściowa ma tę własność. Na przykład 145321 podzielimy na bloki 1, 4, 5, 3, 2, 1, których sumą jest $1 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 = 16$.

Nieco rzadziej mówi się o podobnej cesze podzielności przez 11. Jedyną różnicą jest to, że bloki podziału mają po dwie cyfry. Na przykład liczbę 7345891 podzielimy na bloki 7, 34, 58, 91 o sumie $7 + 34 + 58 + 91 = 190$. Weźmy bloki po 3 cyfry, a otrzymamy cechę podzielności przez 37.

Jak to działa?

Wprowadźmy odrobinę pożytecznej nomenklatury. Dla danej liczby liczbę utworzoną z jej k końcowych cyfr nazwiemy jej k -końcem, a utworzoną z pozostałych cyfr – k -początkiem. Zatem 1-koniec liczby 56743287 to 7, a jej 3-początek to 56743.

Zacznijmy od uzasadnienia cechy podzielności przez 3.

A jaką cechę podzielności uzyskamy dla d będącego dzielnikiem liczby $99 \dots 900 \dots 0$?

Czytelnik Uogólniający zauważy, że analogiczne rozważania pozostają słuszne w każdym systemie pozycyjnym.

Czytelnik Poprawiający dostrzeże, że przedstawioną obok argumentację można ulepszyć: potęgi liczby 10 nie mogą być podzielne przez d , więc można wykluczyć resztę d i uzyskać $t \leq d - 1$.

Więcej o funkcji Eulera można przeczytać np. w artykule Witolda Bednarka (Δ_{19}^{10}).

Zauważmy, że 3 jest dzielnikiem liczby 9, zatem liczba $10a + b$ daje tę samą resztę z dzielenia przez 3 co liczba mniejsza od niej o $9a$, czyli liczba $a + b$. To oznacza, że liczba naturalna, np. 32467, daje przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę co suma jej 1-początku i 1-końca, $3246 + 7$. Ale w ten sam sposób możemy stwierdzić, że i jej 1-początek 3246 daje tę samą resztę co suma jego 1-początku i 1-końca, czyli $324 + 6$. Wobec tego reszta z dzielenia wyjściowej liczby 32467 jest taka sama jak liczby $324 + 6 + 7$. Powtarzając rozumowanie jeszcze kilkukrotnie, stwierdzamy, że taką samą resztę daje też po prostu suma cyfr liczby wyjściowej.

Dla cechy podzielności przez 11 zauważmy, że liczba ta jest dzielnikiem liczby 99. Wobec tego reszta z dzielenia liczby $100a + b$ przez 11 jest taka sama jak liczby $100a + b - 99a = a + b$. Zatem każda liczba naturalna przy dzieleniu przez 11 daje tę samą resztę co suma jej 2-początku i 2-końca. Znowu, interesująca nas cecha wynika z kilkukrotnego zastosowania tej obserwacji.

Wreszcie cecha podzielności przez 37 bierze się stąd, że 999 jest wielokrotnością tej liczby. Zatem $1000a + b$ daje tę samą resztę co $1000a + b - 999a = a + b$, a jest to suma 3-początku i 3-końca liczby $1000a + b$. Jest to też prawdą dla każdego innego dzielnika liczby 999, w szczególności dla liczby 27.

Te rozważania możemy podsumować i uogólnić w postaci następującego stwierdzenia: jeśli liczba d jest dzielnikiem liczby $999 \dots 9$, składającej się z t dziewiątek, to reszta z dzielenia liczby n przez d jest zawsze taka sama jak dla sumy t -początku i t -końca tej liczby.

Celem 2-końca niniejszego artykułu jest pokazanie, że dla każdej liczby d względnie pierwszej z 10 można stworzyć cechę podzielności tego szczególnego, blokowego typu. Innymi słowy, musimy wykazać, że wśród wielokrotności takiej liczby d zawsze znajdziemy liczbę, której zapis dziesiętny składa się z samych dziewiątek. Proponujemy dwie metody dojścia do tego wniosku.

Zasada szufladkowa

Pierwszy sposób opiera się na szczególnym przypadku słynnej zasady szufladkowej, o której można przeczytać w Δ_{16}^{12} , Δ_{04}^8 i Δ_{18}^9 . Ustalmy liczbę d względnie pierwszą z 10. Rozważamy listę wszystkich liczb, których zapis dziesiętny składa się z samych dziewiątek: 9, 99, 999, 9999, ... Jest ich nieskończenie wiele, więc pewne dwie z nich muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez d . Wobec tego ich różnica, równa $999 \dots 9 - 999 \dots 9 = 99 \dots 900 \dots 0$, dzieli się przez d . Ale $99 \dots 900 \dots 0 = 99 \dots 9 \cdot 100 \dots 0$. Teraz skorzystamy z założenia, że d nie ma wspólnych dzielników z liczbą 10, a więc nie ma ich też z jej potęgą, $100 \dots 0$. Zatem d jest dzielnikiem liczby $99 \dots 9$, co kończy uzasadnienie.

Zauważmy jeszcze, że powtórzenie reszty z dzielenia przez d musi się zdarzyć już wśród $d + 1$ pierwszych liczb na liście 9, 99, 999, ..., ponieważ możliwych reszt jest $d < d + 1$. W takim razie wskazana powyżej liczba $99 \dots 900 \dots 0$ ma co najwyżej d dziewiątek. Widzimy więc, że poszukiwane t nie tylko istnieje, ale też że minimalne t jest nie większe niż sama liczba d . W kolejnej części, stosując bardziej zaawansowane metody, znajdziemy dokładniejsze oszacowanie.

Dalsza eliminacja

Wprowadźmy na scenę jednego z największych celebrytów klasycznej teorii liczb. Mowa tu o tzw. toczencie, znanym też jako funkcja Eulera i oznaczanym φ .



Dla danej liczby naturalnej n jej tocejnt $\varphi(n)$ wyraża liczbę liczb naturalnych dodatnich, które są mniejsze od n i są z tą liczbą względnie pierwsze. Na przykład $\varphi(5) = 4$, bo 5 jest względnie pierwsza z 1, 2, 3 i 4. Z kolei $\varphi(6) = 2$, bo 6 jest względnie pierwsza z 1 i 5, ale nie z 2, 3 ani 4.

Jeśli liczba a ma wspólny dzielnik z n , to jest on także dzielnikiem każdej liczby, która daje resztę a przy dzieleniu przez n . Istotnie, oznaczając ten wspólny dzielnik jako x i pisząc $a = xa'$, $n = xn'$, mamy $kn + a = kxn' + xa' = x(kn' + a')$. Oznacza to, że reszta z dzielenia przez n liczby względnie pierwszej z n jest też względnie pierwsza z n . Takich reszt jest, z definicji, $\varphi(n)$.

Zastosujmy ten fakt. Weźmy, jak zwykle, liczbę d , która jest względnie pierwsza z 10. Jest też ona względnie pierwsza z każdą potęgą liczby 10. Wobec tego każda liczba postaci $100\dots 0$ daje jedną spośród $\varphi(d)$ reszt z dzielenia przez d . Zatem któreś dwie z $\varphi(d) + 1$ liczb $1, 10, 100, \dots, 10\dots 0$ dają jednakową resztę z dzielenia przez d . Wobec tego d jest dzielnikiem ich różnicy, $99\dots 900\dots 0$, która ma co najwyżej $\varphi(d)$ cyfr, a więc co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek. Korzystając ze względnej pierwszości d i 10, stwierdzamy, że sam początek tej liczby, $99\dots 9$, złożony z co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek, jest podzielny przez d . Stąd minimalne t jest nie większe niż $\varphi(d)$.

Jest to pewna poprawa, bo $\varphi(d)$ to zazwyczaj liczba istotnie mniejsza niż d .

Wspomnijmy tu jeszcze słynne twierdzenie Eulera, mówiące, że jeśli liczby a i n są względnie pierwsze, to n jest dzielnikiem liczby $a^{\varphi(n)} - 1$. W szczególności biorąc $a = 10$, $n = d$, stwierdzamy, że można wybrać $t = \varphi(d)$. Da się też stąd wywnioskować, że minimalne t jest nawet dzielnikiem $\varphi(d)$.

Zadania (wskazówki do zadań można znaleźć na stronie 9)

1. Wykaż, że jeśli liczba $333\dots 333$, złożona z n trójek, jest podzielna przez 99, to n jest podzielne przez 6.
2. Uzasadnij, że dana liczba dzieli się przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica jej 3-początku i 3-końca dzieli się przez 7.
3. Uzasadnij, że jeśli zapis dziesiętny liczby podzielnej przez 9 składa się z samych dwójek, to liczba ta jest podzielna przez 37. Wskaż liczbę, której zapis dziesiętny składa się z samych dwójek i która dzieli się przez 37, ale nie przez 9.

Czytelnik Ciekawski dowie się, że minimalne t jest również dzielnikiem $\lambda(d)$, gdzie λ oznacza tzw. funkcję Carmichaela. Trudno natomiast, w ogólności, przewidzieć jego dokładną wartość.

Skąd wiadomo, ile gwiazd rodzi się w galaktyce?

Miguel FIGUEIRA

Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Masa Słońca to $1,989 \times 10^{30}$ kg.

O masywnych gwiazdach mówimy, gdy ich masa przekracza $8M_{\odot}$. Więcej na temat ewolucji masywnych gwiazd można przeczytać w artykule „Gwiazdne przedszkola – Obszary HII w galaktyce” (Δ_{20}^4).

Widmo ciała doskonale czarnego jest opisywane przez prawo Plancka. Relację między długością fali o maksymalnej mocy promieniowania a temperaturą ciała doskonale czarnego opisuje prawo Wiena.

Tworzenie i umieranie gwiazd odgrywa fundamentalną rolę w ewolucji galaktyk, dlatego też astrofizycy szukają najlepszych sposobów, aby precyzyjnie oszacować liczbę gwiazd tworzonych w danej galaktyce w określonym czasie. Ten parametr fizyczny nazywamy *tempem powstawania gwiazd* (*star formation rate*, SFR). Wyznaczoną wartość SFR wyrażamy w jednostkach mas Słońca tworzonych w ciągu jednego roku ($M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$). Ale w jaki sposób my, na naszej malutkiej planecie, możemy obliczyć tę wielkość, skoro interesujące nas galaktyki znajdują się miliony lat świetlnych od nas?

Gwiazdy mają różne masy początkowe – od 0,08 do kilkuset mas Słońca – a im masywniejsza gwiazda, tym szybciej przebiega jej ewolucja. Masywne gwiazdy są tak energetyczne, że ich światło jest mocniejsze od światła wszystkich innych gwiazd w danej galaktyce. Pomiar strumienia emitowanego światła mówi nam o liczbie takich masywnych gwiazd, a z pomocą kilku teoretycznych modeli astrofizycy są w stanie obliczyć, ile takich gwiazd średnio powstaje w galaktyce w ciągu roku.

Ale w jakim zakresie energetycznym emitowane jest światło masywnych gwiazd? Teoretycznie, promieniowanie pochodzące z gwiazd można opisać jako promieniowanie ciała doskonale czarnego – długość emitowanej fali światła jest dyktowana tylko przez temperaturę emitującego je obiektu. Masywne gwiazdy mają temperaturę około $\sim 30\,000$ K, toteż promieniają głównie w zakresie ultrafioletowym (UV, zakres długości fali od 10 nm do 400 nm).

Szerzej o blokowaniu promieniowania UV przez pył pisaliśmy w numerze Δ_{20}^6 – „O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk”.

O interakcjach promieniowania UV z materią w galaktykach pisaliśmy w numerach Δ_{20}^4 oraz Δ_{21}^2 .

Fotony z serii Lymana (LyC) mają energie nie większe niż 13,6 eV.

H α to linia emisyjna wodoru od stanu $n = 3$ do stanu $n = 2$, której towarzyszy emisja światła o długości fali 656 nm.

Obserwowana długość fali (λ^{obs}) zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$\frac{\lambda^{\text{obs}}}{\lambda^{\text{emi}}} = 1 + z,$$

przy czym λ^{emi} to wyemitowana długość fali, a z to przesunięcie ku czerwieni (*redshift*, Δ_{19}^4).

Promieniowanie kosmiczne to naładowane cząstki, których prędkość jest bliska prędkości światła.

O zasadzie działania interferometrów radiowych pisaliśmy w Δ_{21}^8 .

Problem wydaje się więc rozwiązany. Obserwacja światła UV galaktyki powinna wystarczyć do obliczenia SFR. Na naszej drodze stoją jednak dwie przeszkody. Po pierwsze atmosfera Ziemi blokuje promieniowanie UV, więc nie może ono dotrzeć do teleskopów naziemnych. Jedynym rozwiązaniem jest wykorzystanie teleskopów kosmicznych. Po drugie tylko niewielka ilość promieniowania UV jest w ogóle w stanie dotrzeć do naszej planety – pył galaktyki blokuje promieniowanie UV przed ucieczką i podróżą po Wszechświecie. To, co udaje się nam zaobserwować, to tylko część światła faktycznie wypromieniowanego przez gwiazdy. Żeby otrzymać prawdziwą wartość strumienia światła, musimy stosować pewne założenia i dodatkowe poprawki, co z kolei zwiększa niepewność pomiaru SFR.

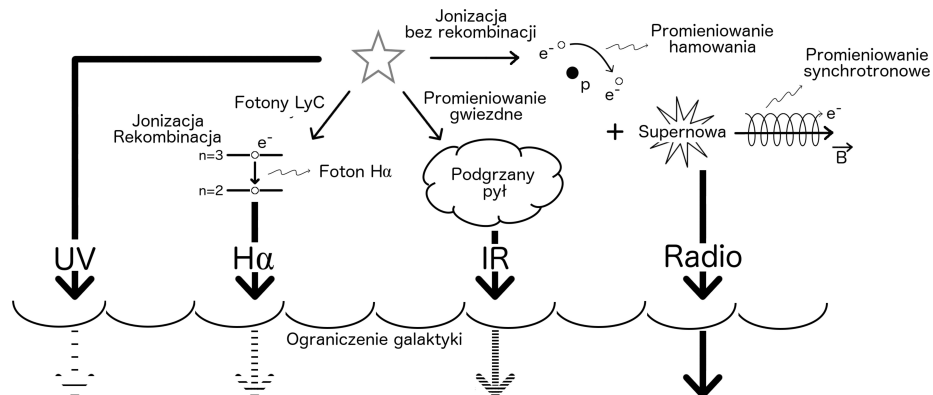
Czy istnieje więc inny sposób obliczenia liczby masywnych gwiazd? Zamiast bezpośredniego wykorzystania promieniowania UV możemy obserwować efekty interakcji gwiazd z materią galaktyki. Fotony kontinuum Lymana pochodzące z masywnych gwiazd jonizują otaczające je atomy wodoru i wybijają ich elektrony. Zdarza się również odwrotne zjawisko, podczas którego elektron rekombinuje z protonem, emitując fotony H α o długości fali charakterystycznej dla masywnych gwiazd. W przeciwieństwie do strumienia UV znaczna część tej emisji może uciekać z galaktyki. Fotony o tej konkretnej długości fali są nieliczne. Oznacza to, że obserwacja linii emisyjnej H α dla galaktyk jest czasochłonna i stosunkowo trudna. Istnieje również inny problem. Długość fali fotonu, który podróżuje w przestrzeni, zwiększa się w wyniku ekspansji Wszechświata i wzrost ten jest proporcjonalny do długości podróży (odległości od galaktyki). W rezultacie długość fali fotonów pochodzących z bardzo odległych galaktyk może osiągnąć wartości blokowane przez atmosferę Ziemi. Jako alternatywę astrofizycy wykorzystują fotony będące wynikiem jonizacji tlenu. Mogą one pokonać większą odległość, zanim zostaną zablokowane przez atmosferę. Niestety, ta metoda zależy od jednej z właściwości galaktyki – zawartości pierwiastków cięższych od helu, której obliczenie stawia nie lada wyzwanie.

Pył, który jest głównym składnikiem galaktyk, też może być używany do obliczenia liczby masywnych gwiazd – ich promieniowanie jest absorbowane przez chmury pyłu znajdujące się w pobliżu narodzin gwiazd. Absorbując promieniowanie, pył podgrzewa się i w konsekwencji emituje światło w zakresie podczerwonym (IR). Światło o tej długości fali nie może być obserwowane na Ziemi (jedynie przez teleskopy kosmiczne, podobnie jak promieniowanie w zakresie UV), lecz jego istotną zaletą jest, że prawie w całości ucieka z obserwowanej galaktyki. Problemem jest jednak to, że populacja innych typów gwiazd również podgrzewa pył, i nie jesteśmy w stanie rozróżnić, czy obserwowane promieniowanie podczerwone jest spowodowane tylko przez młode masywne gwiazdy.

Ostatnia z popularnych metod szacowania SFR opiera się na obserwacjach radiowych i wykorzystuje dwa zjawiska, które produkują ten sam typ fotonów. Pierwsze zjawisko jest związane z wybuchami supernowych – mogą one tworzyć promieniowanie kosmiczne. Cząstki tego promieniowania (w szczególności elektrony) poruszają się w polu magnetycznym supernowej i ich spiralny ruch w polu magnetycznym powoduje emisję promieniowania synchrotronowego w zakresie fal radiowych. Z uwagi na fakt, że supernowa to implozja masywnej gwiazdy, moc takiego promieniowania synchrotronowego daje nam szacunkową liczbę masywnych gwiazd (zobacz więcej w Δ_{20}^4). Drugie zjawisko pochodzi od elektronów i protonów materii znajdującej się w pobliżu masywnych gwiazd. Trajektoria elektronu, który przechodzi obok protonu, zmienia się nieznacznie z powodu przyciągania. Jeśli nie wystąpi rekombinacja, to elektron tylko hamuje, a strata energii kinetycznej obserwowana jest jako emisja fotonów w zakresie radiowym. Zjawisko to nosi nazwę *promieniowania hamowania* – wyemitowane w ten sposób fotony mogą uciekać z galaktyki i przejść przez atmosferę. Ponieważ rozdzielczość kątowa obserwacji jest proporcjonalna do długości fali, obserwacje tego promieniowania wymagają używania interferometrów radiowych.

Galaktyki eliptyczne są stare i tworzą bardzo mało gwiazd ($\sim 0,01 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$), natomiast galaktyki spiralne są młode i tworzą kilkanaście albo kilkaset gwiazd w ciągu roku. Istnieją również galaktyki, które tworzą ich aż kilka tysięcy. Dla porównania, SFR Drogi Mlecznej jest oszacowany między 1 a $10 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

Wszystkie cztery główne metody wyznaczania parametru SFR, opisane w tym artykule, przedstawione są na rysunku. Każda z nich ma oczywiście swoje wady i zalety, ale dają nam one możliwość oszacowania liczby gwiazd tworzonych w galaktykach różnego typu. Dlaczego takie pomiary są ważne? Wartość SFR zależy od typu galaktyki. Jego pomiar pozwala określić, z jaką galaktyką mamy do czynienia oraz jak przebiegała jej ewolucja.



Cztery najbardziej popularne metody pozwalające na oszacowanie parametru SFR. 1) Bezpośrednio z wykorzystaniem promieniowania UV pochodzącego z młodych, masywnych gwiazd. 2) Za pomocą pomiarów linii H α pochodzącej od rekombinacji wodoru. 3) Za pomocą tzw. ukrytego wskaźnika emisji SFR, czyli emisji podgrzanego pyłu w zakresie podczerwonym. 4) Przy wykorzystaniu detekcji promieniowania synchrotronowego emitowanego przez ruch elektronów w polu magnetycznym gwiazdy i promieniowania hamowania od straty energii kinetycznej elektronu. Widzialność strzałki przedstawia ilość strumienia promieniowania, który ucieka z galaktyki (im bardziej przezroczysta strzałka, tym większe straty promieniowania)



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1690. Na płaszczyźnie dane jest $3n$ punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych. Dowieść, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.

Rozwiązanie na str. 12

M 1691. Niech a, b, c będą długościami boków ostrokątnego trójkąta ABC . Załóżmy, że następujący układ równań

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + zx + x^2 = c^2 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich.

Wyznacz $xy + yz + zx$.

Rozwiązanie na str. 12

M 1692. Niech a, b, c będą takimi różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, że liczby

$$\frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}, \frac{1+ab}{a-b}$$

są całkowite. Udowodnij, że

$$\text{NWD} \left(\frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}, \frac{1+ab}{a-b} \right) = 1.$$

Rozwiązanie na str. 12



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1035. Podczas wyładowania atmosferycznego chmura–ziemia podstawa chmury burzowej (*cumulonimbus*) znajduje się na wysokości $h \approx 1$ km nad powierzchnią ziemi, a typowa średnica takiej chmury $D \approx 20$ km. Napięcie przebicia powietrza zależy od ciśnienia i wilgotności, istotną rolę odgrywa też promieniowanie jonizujące (np. promieniowanie kosmiczne). W warunkach towarzyszących burzy przebicie w postaci błyskawicy odpowiada polu elektrycznemu $E \approx 1 \cdot 10^5$ V/m. Oszacuj różnicę potencjału U między podstawą chmury i powierzchnią ziemi, ładunek elektryczny Q oraz energię W zgromadzoną w układzie chmura–ziemia. Przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Rozwiązanie na str. 11

F 1036. Szkielety ssaków, niezależnie od ich rozmiarów, są bardzo podobne – mają taką samą liczbę kości podobnie ze sobą połączonych. Materiał kości wytrzymuje nacisk $p \approx 170$ MPa. Jak grubość d kości kończyn roślaby z masą ssaka m , gdyby podczas ewolucji czynnikiem decydującym o wielkości ssaka był ciężar, jaki jest w stanie unieść jego szkielet?

Rozwiązanie na str. 11

Obok niesławnego Kuby Rozpruwacza jednym z najbardziej znanych nieuchwytnych, seryjnych morderców jest niewątpliwie postać o pseudonimie Zodiak. Jego posępna aktywność miała miejsce na przełomie lat 60. i 70. XX wieku w okolicach San Francisco. Duży wpływ na zakorzenienie się Zodiaka w świadomości publicznej miały listy, które wysyłał do lokalnych gazet. Oprócz gróźb kierowanych do kalifornijskiej społeczności w niektórych listach znajdowały się zaszyfrowane wiadomości. Morderca sugerował, że ich rozszyfrowanie pomoże władzom ustalić jego tożsamość. Znane są cztery kryptogramy Zodiaka – Z408, Z340, Z13 i Z32 (liczby oznaczają, z ilu symboli składają się poszczególne wiadomości).

Zaszyfrowane informacje składające się na Z408 zostały opublikowane 31 lipca 1969 roku w trzech lokalnych kalifornijskich gazetach. Niewiele ponad tydzień od publikacji szyfr został złamany przez małżeństwo Betty i Donalda Hardenów, którzy później stwierdzili, że nad swoim rozwiązaniem pracowali w sumie około 20 godzin. Okazało się, że w pierwszym szyfrogramie Zodiak zastosował *homofoniczny szyfr podstawieniowy*.

Szyfry podstawieniowe polegają na zamianie każdego symbolu wiadomości jawnej na inny symbol, zgodnie z ustaloną zasadą podstawiania. Na przykład, stosując podstawienie

$$A \rightarrow J, E \rightarrow +, K \rightarrow /, M \rightarrow \rho, T \rightarrow \bullet, Y \rightarrow \square,$$

możemy zaszyfrować słowo MATEMATYKA jako $\rho J \bullet + \rho J \bullet \square / J$. Oczywiście alfabet kryptogramu nie musi się różnić od alfabetu wiadomości jawnej – klasycznym przykładem prostego szyfru podstawieniowego jest tzw. *szyfr Cezara*.

W szyfrze Cezara każda litera alfabetu łacińskiego (za wyjątkiem trzech ostatnich) zastępowana jest literą znajdującą się trzy pozycje dalej w alfabecie, natomiast ostatnie trzy litery – odpowiadającymi im trzema pierwszymi literami. SURVWH.

Proste szyfry podstawieniowe cechują się tym, że można je bardzo łatwo złamać – wystarczy przeprowadzić analizę częstości występowania poszczególnych znaków. Przykładowo: najczęściej występującą literą w tekstach w języku polskim jest A, z częstotliwością wystąpień 8,91%. Jak widać na powyższym przykładzie, faktycznie najczęściej występujący znak J odpowiada literze A (mimo iż przykład sam w sobie nie jest reprezentatywny pod tym względem; im dłuższa jest zaszyfrowana wiadomość, tym dokładniej jej rozkład częstości występowania znaków odpowiada rozkładowi otrzymanemu z dowolnego równie długiego tekstu zapisanego w tym języku).

Wariantem odpornym na przedstawioną wyżej elementarną analizę częstości jest szyfr homofoniczny. W tej wersji poszczególne znaki mogą być szyfrowane na kilka sposobów w zależności od tego, jak często występują w tekstach w danym języku. I tak w szyfrze Zodiaka rzadko występującej w języku angielskim literze K (1,1%) przydzielono tylko jeden symbol $/$, natomiast najczęściej występującej literze E (11,16%) – aż siedem symboli: E, N, W, Z, 9, +, \odot .

Hardenowie skupili się na wyszukiwaniu par identycznych symboli. Zauważyli, że w Z408 występują dwie pary $\square\square$ oraz para $\bullet\bullet$. Najczęściej występującą parą w języku angielskim jest LL, więc założyli, że każdy z symboli \square oraz \bullet odpowiada literze L. Następnie, biorąc pod uwagę kontekst sytuacji, zaczęli wyszukiwać w szyfrogramie czterosymbolowych segmentów, które mogłyby odpowiadać słowu KILL. W ten sposób udało im się ustalić przyporządkowania $K \rightarrow /$, $I \rightarrow \{P, U, \Delta\}$ oraz $L \rightarrow B$. Mając częściowo rozszyfrowany tekst, Betty (wiedziona intuicją) odgadła, że wiadomość zaczyna się od słów ILIKEKILLING. Po odszyfrowaniu tego fragmentu Hardenowie mogli już bardzo łatwo ustalić pozostałe przyporządkowania. Wiadomość okazała się opisem okrutnych motywacji kierujących mordercą.

Trzy miesiące później, 8 listopada, został opublikowany kolejny kryptogram Zodiaka – Z340. Pierwsze propozycje „złamania” szyfru przedstawiono niedługo po publikacji, jednak ostatecznie przez ponad pół wieku nikomu nie udało się znaleźć przekonującego rozwiązania. Do najpopularniejszych błędnych rozwiązań Z340 należy rozwiązanie zaprezentowane przez Roberta Graysmitha.

Robert Graysmith jest autorem książki, która posłużyła za podstawę scenariusza filmu fabularnego *Zodiak* z 2007 roku w reżyserii Davida Finchera.

Fundamentalną wadą tego rozwiązania jest fakt, że Graysmith arbitralnie przepermutował 86% symboli znajdujących się w wiadomości w taki sposób, aby ich kolejność pasowała do obranej przez niego metody podstawiania (dodatkowo całkowicie zignorował niektóre z symboli). Słabość tej metody stanowi fakt, że może ona wygenerować olbrzymią liczbę różnych rozwiązań (wystarczy dokonać innych permutacji). Graysmith przez jakiś czas poprawiał swoje rozwiązanie, ale nigdy nie zrezygnował z wątpliwych metod deszyfracji.

Zodiak najprawdopodobniej postanowił usprawnić metodę szyfrowania wiadomości, gdy uświadomił sobie, jak niewiele czasu wymagało złamanie Z408. Ze statystycznego punktu widzenia szybko stało się jasne, że Z340 został zaszyfrowany co najmniej dwuetapowo. W międzyczasie belgijski programista Jarl van Eycke stworzył program *AZdecrypt*, służący do łamania homofonicznych szyfrów podstawieniowych (głównym elementem deszyfracji jest analiza częstości występowania identycznych par symboli). Zaszyfrowaną informację Z408 program van Eycke’a jest w stanie złamać w ułamku sekundy, nie radzi sobie jednak z szyfrem Z340, co dodatkowo wspiera tezę, że szyfr jest bardziej skomplikowany od swojego poprzednika. Jak się ostatecznie okazało, Zodiak użył homofonicznego szyfru podstawieniowego oraz pewnego wariantu *szyfru przestawieniowego*.

Szyfrowanie przestawieniowe polega na zmianie kolejności występujących w tekście symboli, zgodnie z precyzyjnie ustaloną zasadą. Jednym z najprostszych modeli szyfru przestawieniowego jest zapisanie tekstu

jawnego w prostokącie (np. od góry do dołu, od lewej do prawej) i odczytanie go względem innej orientacji (np. od lewej do prawej, od góry do dołu). Rozważmy tekst jawny **PROSTYSZYFRPRZESTAWIENIOWY** i zapiszmy go zgodnie z sugerowaną w nawiasie zasadą, w prostokącie o wysokości 4:

P T Y R T E W
R Y F Z A N Y
O S R E W I
S Z P S I O

Zapisując otrzymany tekst od lewej do prawej i od góry do dołu, otrzymujemy szyfrogram **PTYRTEWRYFZANYOSREWISZPSIO**. Szyfry przestawieniowe stosowane samodzielnie są niezwykle proste do złamania, o czym można się przekonać, rozszyfrowując poniższą wiadomość:

PCRKIOOANBLILCEEICMEŠTMMRNIZYEELRCACHSI.

Jednak zastosowanie pewnej modyfikacji szyfru przestawieniowego w **Z340** niezwykle skomplikowało zadanie osobom próbującym odtworzyć tekst jawny.

W 2020 roku pandemia COVID-19 zapewniła australijskiemu matematykowi Samowi Blake'owi trochę wolnego czasu od dotychczasowych obowiązków na Uniwersytecie w Melbourne. Blake zainteresował się też amerykańskiego informatyka Davida Oranchaka, który podczas jednego z wykładów zasugerował, że być może **Z340** jest nie tylko szyfrem podstawieniowym, ale również przestawieniowym. Przypuszczenie to wywodziło się z analizy statystycznej występowania par symboli przy pewnych rearanżacjach układu tekstu szyfrogramu. Matematyk skontaktował się z Oranchakiem i wspólnie zaczęli analizować **Z340** pod kątem szyfru przestawieniowego. Ich metoda polegała na przestawianiu symboli zawartych w **Z340** i analizie otrzymanych szyfrogramów za pomocą *AZdecrypt*. Gdy to podejście nie przyniosło rezultatu, badacze postanowili dzielić **Z340** na mniejsze części i analizować je osobno. Oryginalnie **Z340** został zapisany w prostokącie 20×17 . Po żmudnych obliczeniach, przy podzieleniu tekstu na trzy prostokąty 9×17 , 9×17 i 2×17 i zastosowaniu opisanego poniżej przestawienia, udało im się rozszyfrować pierwszych 9 linijek wiadomości. Kolejność zapisu symboli przez Zodiaka w tym prostokącie przypomina ruch skoczka na szachownicy – pierwszy symbol został zapisany w lewym górnym rogu, a każdy następny o jeden wiersz niżej i dwie kolumny dalej (z modularnym przejściem przez krawędzie prostokąta):

1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145
137	146	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128
120	129	138	147	3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111
103	112	121	130	139	148	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94
86	95	104	113	122	131	140	149	5	14	23	32	41	50	59	68	77
69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	6	15	24	33	42	51	60
52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	7	16	25	34	43
35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	8	17	26
18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	9

Jednak zastosowanie otrzymanego w tym prostokącie homofonicznego klucza do pozostałej części tekstu nie przynosiło rezultatów. Blake i Oranchak postanowili skontaktować się z van Eyce'em i przedstawić mu swoje częściowe rozwiązanie. Twórca *AZdecrypt* szybko odkrył, jak dwie drobne modyfikacje „ruchu skoczka szachowego” pozwolą rozszyfrować wiadomość ukrytą w drugim prostokącie. Natomiast w ostatnim – najkrótszym – fragmencie szyfrogramu wystarczyło niektóre otrzymane słowa odczytać od tyłu – zachęcamy do samodzielnego przeprowadzenia tego etapu (w rozwiązaniu znajduje się popełniony przez Zodiaka błąd ortograficzny):

EFIL WILL EB NA EASY ENO NI ECIDARAP DEATH

Ostatecznie okazało się, że tekst jawny **Z340** – podobnie jak **Z408** – nie zawiera żadnych bezpośrednich wskazówek dotyczących tożsamości mordercy.

Ostatnie dwa szyfrogramy Zodiaka pozostają wciąż nierozwiązane. Niestety są one zbyt krótkie, aby można było poddać je metodom kryptoanalitycznym. Rozwiązanie każdego z nich wymagałoby wiarygodnego uzasadnienia przyjętego klucza deszyfracji. W jednym ze swoich kolejnych listów Zodiak zawarł bezpośrednią wskazówkę do rozszyfrowania **Z32**, jednak do dzisiaj nie została ona przez nikogo przekonująco zinterpretowana.

Tekst jawny zawiera polskie tytuły książek składających się na pewną trylogię sci-fi (pierwszy tom zawiera intrygujący wątek matematyczny).

David Oranchak od wielu lat zajmuje się kryptologicznymi aspektami działalności Zodiaka. Między innymi jest autorem serii filmów poświęconych tej tematyce. Można je znaleźć na YouTube pod wspólną nazwą *Let's crack Zodiac*. Polecam je każdemu zainteresowanemu zagadnieniami omawianymi w niniejszym artykule.



Wskazówki do zadań z artykułu Blokowe cechy podzielności

1. Możesz zbadać, kiedy taka liczba dzieli się przez 9, a kiedy przez 11.
2. Kluczowe okaże się, że 1001 jest wielokrotnością liczby 7.
3. Ile cyfr może mieć taka liczba?

Asymetryczne systemy liczbowe – wygodna praca z ułamkowymi bitami

Jarosław DUDA*

* Autor jest adiunktem w Instytucie Informatyki i Matematyki Komputerowej na Uniwersytecie Jagiellońskim, a zarazem autorem ogólnej koncepcji ANS oraz wszystkich opisywanych w tekście jej wariantów.

Systemy liczbowe mają długą historię – zaczynając od liczb egipskich, chińskich, babilońskich, rzymskich i in. aż do współczesnej dominacji systemu dziesiętkowego dla ludzi oraz dwójkowego dla komputerów. To jeszcze nie koniec – w ostatnich latach dane w naszych komputerach coraz częściej zapisane są asymetrycznymi systemami liczbowymi: ANS, od ang. *Asymmetric Numeral Systems*.

Jest tak, ponieważ system dwójkowy jest idealny tylko dla zapisu ciągu nieskorelowanych 0 i 1 o jednakowym prawdopodobieństwie $\Pr(0) = \Pr(1) = 1/2$, gdyż takie zdarzenia rzeczywiście niosą po jednym bicie informacji. Natomiast w rzeczywistości operujemy na zdarzeniach o bardziej skomplikowanych rozkładach, statystykach, często niosących ułamkowe ilości bitów informacji, np. chociażby cyfra dziesiętna niesie $\lg(10) \approx 3,32$ bitów lub mniej ($\lg \equiv \log_2$). W takich przypadkach bezpośrednie zapisanie danych w systemie dwójkowym może okazać się (w sensie rozmiaru danych) dalece nieoptymalne. ANS próbuje więc uogólniać systemy liczbowe, optymalizując je do dowolnego wybranego rozkładu prawdopodobieństwa symboli reprezentujących zdarzenia. Dzięki temu ANS w ostatnich latach stał się podstawowym sposobem pracy na ułamkowych bitach w zapisie danych, które przechowujemy i przesyłamy – jako prostszy zastępuje kodowanie arytmetyczne (pl.wikipedia.org/wiki/Kodowanie_arytmetyczne), pozwalając na szybsze implementacje, nawet do 30 razy.

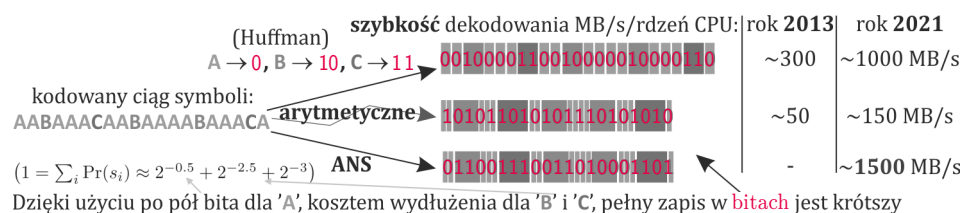
$M = 2^N$ różnych wartości wymaga $N = \lg M$ bitów do jednoznacznego zapisu. Mówimy więc, że jednostajne zdarzenie o n wartościach niesie $\lg(n)$ bitów informacji.

Zawartość informacyjną zwykle mierzymy entropią Shannona, którą chyba najłatwiej zrozumieć asymptotycznym zachowaniem dwumianu Newtona w następującym przypadku: rozważamy ciągi zero-jedynkowe o długości n , z których dokładnie p procent pozycji stanowią jedynki. Oszacujmy liczbę takich ciągów. Przybliżenie wzorem Stirlinga $n! \approx (n/e)^n$ daje nam:

$$\binom{n}{pn} = \frac{n!}{(pn)!((1-p)n)!} \approx \frac{(n/e)^n}{(pn/e)^{pn}((1-p)n/e)^{(1-p)n}} = 2^{n(-p \lg(p) - (1-p) \lg(1-p))} = 2^{nh(p)},$$

przy czym $h(p) := -p \lg(p) - (1-p) \lg(1-p)$ oznacza entropię Shannona. Aby optymalnie (możliwie krótko) opisać jedną z tych kombinacji, potrzebujemy około $\lg \binom{n}{pn} \approx nh(p)$ bitów informacji – gdyż ogólnie K bitów pozwala zakodować jedną z 2^K różnych możliwości. Otrzymany wynik pokazuje istotną różnicę między prostym zapisem kolejnych cyfr za pomocą kolejnych bitów (jeden znak – jeden bit) a takim, w którym bierzemy pod uwagę rozkład prawdopodobieństwa. W naszym przypadku – kodowanie trywialne dałoby n bitów, a takie uwzględniające liczbę jedynek – około $nh(p)$ bitów, czyli średnio około $h(p)$ bita na jeden znak ($h(0) = h(1) = 0$, $h(0,11) = h(0,89) \approx 0,5$, maksimum $h(1/2) = 1$).

Interpretując entropię Shannona jako średnią ważoną, z powyższych rozważań dostajemy ogólną praktyczną regułę: **symbol o prawdopodobieństwie p niesie $\lg(1/p)$ bitów informacji**, czyli na przykład 1 bit dla $p = 1/2$, 3 bity dla $p = 1/8$, ale może być też ułamkowa ilość, np. pół bita dla $p = 2^{-0,5} \approx 0,707$.



Rys. 1. Wizualizacja skrócenia zapisu dzięki uwzględnieniu ułamkowych bitów



Rozwiązanie zadania F 1035.

Napięcie między chmurą i powierzchnią ziemi w momencie rozpoczęcia wyładowania wynosi $U = h \cdot E = 1 \cdot 10^8 \text{ V}$. W celu oszacowania zgromadzonego ładunku potraktujemy układ chmura-ziemia jak kondensator płaski (jak zwykle, pomijamy efekty brzegowe) o pojemności

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h},$$

przy czym $S = \pi D^2/4$ jest powierzchnią podstawy chmury. Ładunek zgromadzony na kondensatorze pod napięciem U wynosi $Q = C \cdot U$, a energia $W = CU^2/2$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy oszacowanie: $Q \approx 280 \text{ C}$, $W \approx 1,4 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Rozładowanie takiego kondensatora podczas burzy następuje w kilkunastu do kilkudziesięciu wyładowaniach – przyjmijmy, że wyładowań jest 20. Otrzymujemy, że w pojedynczej błyskawicy przepływa ładunek około 14 C i wyzwalana jest energia rzędu $7 \cdot 10^8 \text{ J}$.

Otrzymane tu oszacowania są zbliżone do wyników pomiarów: C. R. Maggio, T. C. Marshall, M. Stolzenburg, *Journal of Geophysical Research* **114**, D14203 (2009).



Rozwiązanie zadania F 1036.

Kończyny muszą unieść ciężar ssaka $F = mg$, przy czym g jest przyspieszeniem ziemskim. Skoro kształty ssaków są podobne i gatunki różnią się głównie wielkością, to ciśnienie działające na kości kończyn jest proporcjonalne do masy m i odwrotnie proporcjonalne do pola przekroju kończyn proporcjonalnego do kwadratu jej grubości d^2 . Wynika stąd, że $pd^2 \propto mg$, przy czym p oznacza wytrzymałość kości na ściskanie, a więc:

$$d \propto \sqrt{\frac{mg}{p}}.$$

Jeśli za miarę wielkości zwierzęcia przyjmiemy jego „rozmiar liniowy” L , to jego masa byłaby proporcjonalna do L^3 , $m \propto L^3$, a masa kończyn $m_{nogi} \propto Ld^2$, czyli $m_{nogi} \propto m^{1/3} m = m^{4/3}$. Pomiar wykazują, że masa szkieletu (i kończyn) rośnie z masą ssaka, ale z wykładnikiem około 1,09, a nie 1,33, jak wynika to z naszej analizy. Można stąd wyciągnąć wniosek, że w przebiegu ewolucji wytrzymałość kości na ściskanie nie decyduje o rozmiarach zwierząt. Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważną są rozmiary zwierząt. Skalowanie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.

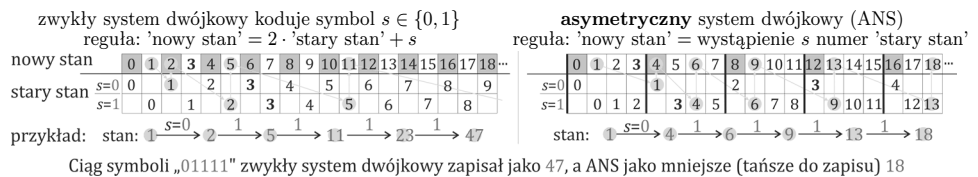
Nie wszystkie popularne systemy kodowania (kompresji) tekstów w sposób optymalny eksploatują to zjawisko. Rysunek 1 wizualizuje porównanie zachowania kilku algorytmów dla rozkładu literek $\Pr(A) \approx 2^{-0,5}$, $\Pr(B) = 2^{-2,5}$, $\Pr(C) = 2^{-3}$.

Na pewnym poziomie abstrakcji możemy sobie wyobrażać, że kodowanie polega na zapisaniu całej informacji w jednej bardzo dużej liczbie, którą będziemy oznaczać jako $x \in \mathbb{N}$. Na pytanie, ile niesie ona bitów informacji, chciałoby się ją zlogarytmować, po czym zaokrąglić do liczby naturalnej. Tutaj jednak chcemy uwzględnić ułamkowe bity, więc uciąglamy naszą odpowiedź i wyobrażamy sobie, że **liczba x zawiera dokładnie $\lg(x)$ bitów informacji**. Kluczowym pytaniem jest: co zrobić, gdy chcemy dołożyć do x nową informację na temat kolejnego symbolu s , o prawdopodobieństwie $\Pr(s) = p$. Wiedząc, że niesie on $\lg(1/p)$ bitów, wnioskujemy, że nowy stan $x' = C(x, s)$ zawierający informację z obu powinien nieść: $\lg(x') \approx \lg(x) + \lg(1/p)$ bitów, czyli $x' = C(x, s) \approx x/\Pr(s)$. Im lepsze to przybliżenie, tym krótszy dostaniemy zapis. Jak to wygląda w różnych znanych algorytmach?

Wracając do systemu dwójkowego, takie dołożenie nowej informacji z $s \in \{0, 1\}$ do informacji już zawartej w liczbie $x \in \mathbb{N}$ moglibyśmy wykonać poprzez dostawienie s jako najstarszej cyfry zapisu: $x' = x + s2^k$, przy czym k to pierwsza wolna pozycja. Tutaj s wybiera jeden z dużych przedziałów dla x' : $[0, 2^k)$ albo $[2^k, 2^{k+1})$. Kodowanie arytmetyczne optymalizuje to podejście dla dowolnego rozkładu s poprzez zmianę długości tych dwóch podprzedziałów – tak żeby ich proporcje zgadzały się z założonym rozkładem prawdopodobieństwa. Wymaga to pamiętania na przykład obu krańców aktualnego przedziału, ciąglego ich przetwarzania – co odpowiada dodatkowej kontroli pozycji k w $x' = x + s2^k$.

ANS upraszcza ten pomysł dzięki idei umieszczania nowej informacji z symbolu s na najmłodszej pozycji x , jednocześnie przesuwając pozostałe bity: $C(x, s) = x' = 2x + s$. Już nie wymaga to kontroli pozycji k – możemy pracować na pojedynczej liczbie, a to prowadzi do szybszych implementacji. Tutaj funkcja dekodująca to $D(x') = (\lfloor x'/2 \rfloor, \text{mod}(x', 2))$, co pozwala jednoznacznie odwrócić taki proces: $C(D(x')) = x'$, $D(C(x, s)) = (x, s)$.

Regułę $C(x, s) = x' = 2x + s$ możemy zapisać jako „ x przechodzi w $C(x, s)$ jako x -te wystąpienie liczby parzystej (I_0) lub nieparzystej (I_1)”. Uasymetryczniamy ją w ANS, po prostu przeddefiniowując ten rozłączny podział: $\mathbb{N} = \sqcup_s I_s$, tym razem tak, że rozmiar $|I_s \cap [0, x)| \approx p_s x$ dla dowolnego x i ustalonego $\Pr(s) = p_s \in (0, 1)$, już niekoniecznie $1/2$. Czyli wybieramy w miarę jednorodnie rozrzucenie symboli – funkcję $\bar{s} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ dla alfabetu \mathcal{A} , uogólniającą podział na liczby parzyste/nieparzyste, po czym $I_s = \{x : \bar{s}(x) = s\}$. Dekodowanie z x' wymaga najpierw znalezienia symbolu s takiego, że $x' \in I_s$, po czym odczytania, którym jest tam wystąpieniem. Dla zgrubnego wyobrażenia sobie, jak to działa, można zerknąć na rysunek 2, przy czym $I_0 = \{x : \text{mod}(x, 4) = 0\}$, $I_1 = \{x : \text{mod}(x, 4) \in \{1, 2, 3\}\}$.



Rys. 2. Przykład porównania zwykłego systemu dwójkowego i asymetrycznego

W praktyce trzeba zautomatyzować ten proces, na co jest kilka sposobów. Zaczniemy od bardziej dydaktycznego wariantu jednorodnego **uABS** (z 2006 r., *uniform, binary*). Dla dwuelementowego alfabetu: $\Pr(1) = p \in (0, 1)$, $\Pr(0) = 1 - p$, liczba wystąpień '1' do pozycji x powinna być mniej więcej $x \cdot p$, więc zaokrąglamy na przykład w górę: mówimy, że na pozycjach $[0, x)$ wystąpiło $\lceil x \cdot p \rceil$ razy, czyli '1' jest tam, gdzie $\lceil x \cdot p \rceil$ wzrasta, w pozostałych jest '0'. Daje to funkcję dekodującą D , dla której łatwo znaleźć odwrotność C :



Rozwiązanie zadania M 1690.

Oznaczmy punkty jako A_1, A_2, \dots, A_{3n} . Ze względu na to, że tych punktów jest skończenie wiele, możemy wybrać prostą ℓ taką, że rzuty prostokątne dowolnych dwóch punktów nie pokrywają się. Przez X_i oznaczmy rzut prostokątny punktu A_i na ℓ . Bez szkody dla ogólności przyjmijmy, że rzuty prostokątne leżą na prostej ℓ w kolejności: X_1, X_2, \dots, X_{3n} . Wówczas trójkąty $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ dla $i = 1, 4, 7, \dots, 3n - 2$ są parami rozłączne.



Rozwiązanie zadania M 1691.

Rozpatrzmy taki punkt O leżący wewnątrz trójkąta $A'B'C'$, że

$$\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle B'OC' = \sphericalangle C'OA' = 120^\circ$$

oraz x, y, z są długościami odcinków OA', OB', OC' , odpowiednio.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów $A'OB', B'OC'$ oraz $C'OA'$ wynikają następujące równości:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = A'B'^2 \\ y^2 + yz + z^2 = B'C'^2 \\ z^2 + zx + x^2 = C'A'^2 \end{cases}$$

Z układu danego w treści zadania wynika, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające!

Stosując teraz twierdzenie sinusów widzimy, że

$$\begin{aligned} [ABC] &= [AOB] + [BOC] + [COA] = \\ &= (xy + yz + zx) \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Wobec tego na podstawie twierdzenia Herona dostajemy

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{aligned}$$

gdzie $s = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.



Rozwiązanie zadania M 1692.

Zauważmy, że

$$(1) \quad \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ab}{a-b} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} = 1,$$

stąd jeśli

$$1 < d = \text{NWD} \left(\frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}, \frac{1+ab}{a-b} \right),$$

to d dzieli lewą stronę (1), czyli $d \mid 1 - \text{sprzeczność}$.

Jak można otrzymać równość (1)?

Zauważmy, że dla pewnych $x, y, z \in (0, \pi/2)$ zachodzą równości $a = \text{tg}(x)$, $b = \text{tg}(y)$ i $c = \text{tg}(z)$. Wówczas

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(y)}{1 + \text{tg}(x)\text{tg}(y)} = \text{tg}(x-y).$$

Podobnie

$$\frac{b-c}{1+bc} = \text{tg}(y-z), \quad \frac{c-a}{1+ac} = \text{tg}(z-x).$$

Ponieważ $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$, to ze wzoru na tangens sumy wynika, że

$$\text{tg}(x-y) + \text{tg}(y-z) + \text{tg}(z-x) = \text{tg}(x-y)\text{tg}(y-z)\text{tg}(z-x),$$

czyli (1).

$$\begin{aligned} D(x) &= (x_s, s) : s = \lceil (x+1)p \rceil - \lceil xp \rceil, \quad x_1 = \lceil xp \rceil, \quad x_0 = x - x_1, \\ C(x, 0) &= \lceil (x+1)/(1-p) \rceil - 1, \quad C(x, 1) = \lfloor x/p \rfloor. \end{aligned}$$

Wygodniej jest pracować na alfabecie większym niż dwójkowy, ale uogólnienie powyższego podejścia pozostaje problemem otwartym. Na szczęście w 2013 roku powstał powszechnie dziś używany wariant przedziałowy **rANS** – gorzej przybliżający $C(x, s) \approx x/\text{Pr}(s)$, ale wciąż wystarczająco dobrze dla dużych x . Dzielimy w nim \mathbb{N} na przedziały wielkości 2^n , każdy z nich w identyczny sposób na podprzedziały odpowiadające symbolom, zgodnie z założonym rozkładem prawdopodobieństwa. Czyli symbol s ma tam $f_s \approx 2^n \text{Pr}(s)$ wystąpień: pozycje $[c_s, c_{s+1})$ dla $c_s = f_0 + \dots + f_{s-1}$. Na przykład dla $2^n = 4$, $f_0 = 1$, $f_1 = 3$ (patrz prawy diagram rysunku 2). Dekodując x , korzystamy z tego, że jest on w $\lfloor x/2^n \rfloor$ dużym przedziale. Pozycja w tym przedziale to $\text{mod}(x, 2^n)$, trzeba sprawdzić, któremu symbolowi odpowiada: $s = \bar{s}(\text{mod}(x, 2^n))$ takie, że $c_s \leq \text{mod}(x, 2^n) < c_{s+1}$. Potem odpowiednio przesuwając, dostajemy funkcję dekodującą i kodującą:

$$\begin{aligned} s &= \bar{s}(\text{mod}(x, 2^n)), \quad D(x) = (f_s \lfloor x/2^n \rfloor + \text{mod}(x, 2^n) - c_s, s), \\ C(x, s) &= 2^n \lfloor x/f_s \rfloor + \text{mod}(x, f_s) + c_s. \end{aligned}$$

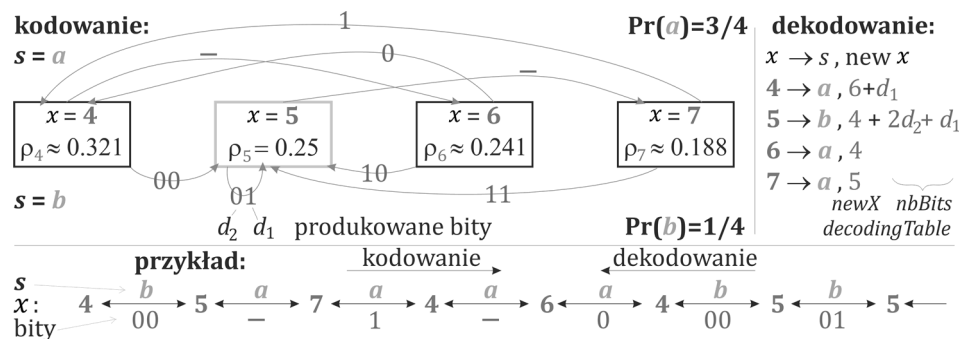
Dzięki użyciu szerokości 2^n część z tych operacji zamienia się m.in.

w przesunięciu bitowe. Moglibyśmy zakodować ciąg symboli, używając powyższych wzorów uABS lub rANS, i na końcu np. zapisać dwójkowo ostateczne x . Ale rośnie ono bardzo szybko: $\lg(x) \approx$ entropia sekwencji, więc w praktyce dodaje się zwykle tzw. **renormalizację**: pilnowanie, żeby $x \in I$ dla I będącego przedziałem np. $I = [2^{16}, 2^{32})$. Jeśli dokodowując nowy symbol, wyszlibyśmy z tego przedziału, to wcześniej *zrzucamy* najmłodsze 16 bitów: $\text{mod}(x, 2^{16})$ na strumień wyjściowy, po czym zmniejszamy stan $x \rightarrow \lfloor x/2^{16} \rfloor$ i kodujemy dalej. Ten proces łatwo można odwrócić: dekodery dla $x < 2^{16}$ przesuwają $x \rightarrow 2^{16}x$ oraz doczytują ze strumienia najmłodsze 16 bitów.

Takie zrzucanie zakumulowanych pełnych bloków na strumień wyjściowy pozwala też po prostu stabilizować całe zachowanie (wariant **tANS** z 2007 r.) na mniejszym przedziale, np. $I = [4, 8)$ na rysunku 3, w praktyce np.

$I = [2048, 4096)$ dla alfabetu o wielkości 256, czyli pracy na bajtach. Dostajemy automat skończony (już niewymagający mnożenia/dzielenia), zoptymalizowany dla wybranego rozkładu prawdopodobieństwa. Dodatkowo mamy olbrzymią swobodę wyboru w miarę jednorodnego rozrzucenia symboli – daje to dodatkowe specyficzne zastosowanie, gdy dane chcemy nie tylko zwięźle zapisać, ale i zaszyfrować: możemy wówczas wyżej opisany proces przeprowadzić zależnie od klucza kryptograficznego, przy okazji za darmo szyfrując tak zakodowane dane.

Współcześnie nasze dane są coraz częściej zapisywane w omawianym wariantcie tANS. Tak jest chociażby w produktach iPhone czy Mac firmy Apple (domyślny kompresor LZFS), w kompresorze Facebook Zstandard zastępującym podstawowy zip m.in. w jądrze systemu Linux czy produktach wielu firm, jak Amazon czy IBM, też w Oodle Kraken popularnym w grach komputerowych. Jest on dobry dla stałych rozkładów, w bardziej skomplikowanych sytuacjach jest używany rANS – m.in. w kompresji DNA (CRAM), Google Draco dla danych 3D, JPEG XL, którym niedługo będą zapisane nasze zdjęcia i grafiki.



Rys. 3. Przykład budowy i użycia automatu tANS dla $I = [4, 8)$

Jeszcze nie koniec

Tygodnik *Science* opublikował w sierpniu 2021 roku zbiorczy raport 293 autorów dotyczący pandemii SARS-CoV-2 na całym terenie Afryki – warto spojrzeć z europejskiej perspektywy cywilizacyjnej na opracowane statystycznie dane dla tego kontynentu. Warto też pamiętać, że chodzi o pandemię; lokalne rozwiązania, o czym świadczą przykłady Izraela czy Chin, nie wystarczają, konieczny jest wysiłek globalny.

Wszyscy wiemy, kiedy to się zaczęło: doniesienia o nowym koronawirusie zakażającym ludzi napłynęły pod koniec 2019 roku z Chin, z dużego uniwersyteckiego miasta Wuhan. W Wuhan znajduje się też instytut wirusologiczny, stąd też w ramach szeptanych informacji pojawiła się koncepcja, że to tam sfabrykowano tego wirusa. Koncepcja do dziś „sprawdzana”, choć myślę, że nie ludzie w laboratorium tego wirusa zaprojektowali. Sądzę też, że nigdy nie dowiemy się, jak to się stało, że pojawił się w tej „ludzkiej” formule. Bardzo szybko, bo w styczniu 2020 roku, podano sekwencję genomową wirusa SARS-Cov-2 z Wielkiej Brytanii zwanego **alfa**, opisano jego strukturę, części składowe (duży genom to RNA, ok. 30 tys. nukleotydów), kilkadziesiąt białek funkcyjnych i strukturalnych.

Wirus jest kulisty z „wrostkami” zewnętrznymi zbudowanymi z białka S i tworzącymi – koronę! Układ obronny zaatakowanego organizmu na pewno przede wszystkim rozpozna wyeksponowane na powierzchni białko S, jego gen (RNA) był naturalnym kandydatem na szczepionkę.

Niezwykle szybko opracowano i wprowadzono do produkcji kilka typów wydajnych szczepionek; poszukiwania leków trwają. Uzyskanie szczepionek umożliwił fakt, że wirus stosunkowo wolno mutuje. Wysoka częstotliwość mutacji sprawia trudności poszukiwaczom szczepionki przeciw HIV, a także dyktuje konieczność produkcji co roku nowej szczepionki wobec szybko mutującego wirusa grypy. Koronawirus nie jest tak szybki, ale każda replikacja w kolejnym pacjencie może skutkować powstaniem istotnych z punktu widzenia zakaźności wariantów. Dlatego tak ważne jest zahamowanie za pomocą szczepionki transmisji z chorego na zdrowego.

Pandemia szybko ruszyła i nadal się rozszerza. Sprzyja jej znaczna ruchliwość ludzi i towarów na całym świecie, a także wielka uciążliwość wszelkiego rodzaju obostrzeń i utrudnień, przeciw którym dość szybko buntują się ludzie. Wystarczy obejrzyć zdjęcia bałtyckich, greckich, brazylijskich plaż albo widowni wakacyjnych masowych imprez sportowych i kulturalnych – z komentarzami: „jak to dobrze, że mamy to już za sobą”. Otóż nie mamy. . .

W połowie września 2021 roku liczbę zakażonych na świecie oficjalnie oceniano na 219,5 mln, liczbę zgonów na 4,55 mln (w Polsce 2,89 mln zakażonych i 75,5 tysiąca zmarłych). W każdej takiej informacji dodaje się, że liczby te są prawdopodobnie wysoce niedoszacowane. Od początku pandemii poznano też kilka mutacji, przez WHO oznaczonych jako „szczególnej uwagi”. Wariant **beta** znaleziono w RPA, wariant **gamma** w Brazylii, wariant **delta** w Indiach i wariant **mu** w Kolumbii. Warianty różnią się zakaźnością i zapewne wrażliwością

na powszechnie stosowane szczepionki. Mutanty znajdują się dzięki masowemu sekwencjonowaniu RNA z próbek, co wymaga istnienia specjalistycznych laboratoriów. Sytuacja jest dynamiczna!

Dane dotyczące Afryki, które właśnie udostępniono, niepokojąco poszerzają naszą wiedzę o pandemii. Chłopski rozum podpowiada, że stan sanitarny kontynentu i zasoby higieniczno-medyczne mogą budzić obawy – grożą utrzymaniem się tam światowego rezerwuaru pandemii. Te intuicje potwierdzają się w bieżących badaniach.

Pierwsze przypadki zachorowań, wraz z sekwencją genomową wirusa (i białka S), odnotowano w marcu 2020 roku w Egipcie, Nigerii i Południowej Afryce. W kwietniu 2021 roku w Afryce rejestrowano 4,5 mln chorych i 120 tysięcy zgonów. Aktualne dane (z maja 2021) – dla 14 504 genomów afrykańskich wirusów – wskazują na to, że wirus przyniesiony został z Europy, ale bardzo szybko rozprzestrzenił się wewnątrz kontynentu. Co ciekawe – łatwo też nastąpił powrotny eksport z Afryki (do Europy 41%, do Azji 26%). Nie ma wątpliwości, że na prędkość rozprzestrzeniania się pandemii wpływa otwieranie i zamykanie linii lotniczych, a także praktyczny brak kontroli transportu samochodowego wewnątrz Afryki.

Podczas sesji ONZ Sekretarz Generalny Antonio Guterres tak ocenił sytuację nierównomiernej dostępności szczepionki: „Może naukowo test zdaliśmy, ale od strony etyki zasługujemy jedynie na pałę”.

Szczepienia w Afryce z różnych, raczej oczywistych, przyczyn dopiero się rozpoczynają – w kwietniu 2021 roku w Maroku zaszczepiono 16% ludności, w Rwandzie 2,5%, rekordowo na Seszelach 70% (tam też odnotowano rekordowo niską liczbę zgonów). Przyczyny ograniczonej liczby szczepień i wykonywanych testów identyfikujących wirusy są oczywiste: brak odczynników, aparatury, laboratoriów, kwalifikowanego personelu. . . Brak, brak, brak. . .

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Dziwny ciąg

Wojciech CZERWIŃSKI

Zapewne większość z nas bawiła się kiedyś w zgadywanie, jaki jest następny wyraz danego ciągu. Zapraszam zatem jeszcze raz do takiej zabawy... Pierwsze wyrazy pewnego ciągu to

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221.$$

Co następuje dalej? Zachęcam do zatrzymania się na chwilę nad tym pytaniem przed przejściem do dalszej części tekstu.

Reguła tworzenia ciągu jest trudna do zgadnięcia, ponieważ jest zupełnie inna niż te, do których jesteśmy przyzwyczajeni. Z drugiej strony jest to reguła niesamowicie prosta, banalna wręcz. Następny wyraz ciągu tworzymy, niejako czytając poprzedni. Pierwszy wyraz ciągu to „jedna jedynka”, a więc drugi wyraz to 11. Drugi wyraz ciągu to „dwie jedynki”, a więc trzeci wyraz to 21. Trzeci wyraz ciągu to „jedna dwójka, jedna jedynka”, więc czwarty wyraz to 1211. Czytając ten wyraz, mamy z kolei: „jedna jedynka, jedna dwójka, dwie jedynki”, czyli 111221. Po wyrazie 13112221 następuje zatem 1113213211.

O tym ciągu wspaniale opowiada John Conway, wybitny angielski matematyk i popularyzator matematyki – gorąco zachęcam do obejrzenia krótkiego filmu, w którym przedstawia opisany wyżej ciąg: www.youtube.com/watch?v=ea71JkEhytA. John Conway po tym, gdy jego studenci przedstawili mu powyższą zagadkę, zadał sobie bardziej dogłębne pytania dotyczące naszego ciągu. Naturalnym pytaniem dla ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie (czyli takich, dla których kolejny wyraz zależy od poprzednich) jest, jak szybko rosną wartości kolejnych wyrazów. Przykładowo najbardziej znany ciąg rekurencyjny, czyli ciąg Fibonacciego, zdefiniowany jako

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

może być, jak wiadomo Wytrawnym Czytelnikom, również zdefiniowany wzorem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \hat{\varphi}^n),$$

przy czym $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Jak łatwo zobaczyć, wynika z tego, że dla dużych n ciąg Fibonacciego jest w przybliżeniu ciągiem geometrycznym o ilorazie φ . Liczba φ , zwana również złotym podziałem, jest liczbą algebraiczną, to znaczy pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych $x^2 - x - 1$, a inaczej mówiąc, rozwiązaniem równania

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

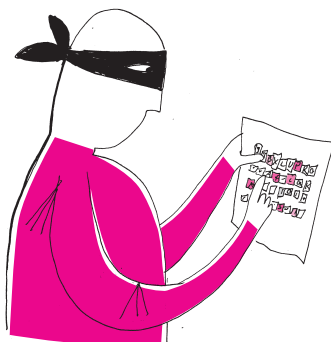
Nietrudno wykazać, że każdy ciąg rekurencyjny zdefiniowany przy użyciu wzoru

$$F_{n+k} = a_{k-1}F_{n+k-1} + \dots + a_1F_{n+1} + a_0F_n$$

ma podobną własność: dla dużych n iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest w przybliżeniu pewną liczbą r , która jest pierwiastkiem wielomianu

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \dots - a_1x - a_0.$$

Zauważmy, że wyraz ciągu jest zależny od k poprzednich wartości, i w związku z tym stopień wielomianu jest również równy k . Naturalnie jest więc zapytać, czy podobna zależność ma miejsce dla ciągu opisanego przez Conwaya, w końcu tam następny wyraz zależy tylko od jednego poprzedniego wyrazu. Okazuje się, że owszem, przy czym nie sam ciąg zachowuje się w przybliżeniu geometrycznie, ale liczba cyfr wyrazów ciągu Conwaya rośnie w przybliżeniu geometrycznie. Iloraz liczby cyfr dwóch kolejnych wyrazów ciągu to w przybliżeniu pierwiastek



pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, ale taki wielomian o najmniejszym stopniu ma stopień 71, a konkretnie jest następujący:

$$\begin{aligned} & x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} \\ & - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} \\ & + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} \\ & - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} \\ & + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} \\ & + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^9 + x^7 - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 \\ & - 6x^2 + 3x - 6. \end{aligned}$$

Skąd tak skomplikowana postać dla tak prostej definicji ciągu? Nie wiadomo. Czasem patrząc na takie przykłady, zadają sobie pytanie: „Czy twierdzenia, które dowodzimy, są nieraz tak proste i eleganckie, bo taki jest świat, czy też są proste dlatego, bo tylko takie my ludzie umiemy udowodnić?”

Wspomnienie o Andrzeju Fryszkowskim

2 listopada 2020 roku odszedł prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, pracownik Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, jeden z założycieli Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej oraz wieloletni członek Zarządu tego Stowarzyszenia. Przez wiele lat działał aktywnie w Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej i Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej Juniorów. Wielokrotnie był opiekunem polskiej reprezentacji na Olimpiadzie Matematycznej Państw Europy Środkowej, a wcześniej na zawodach polsko-austriackich. Straciliśmy dobrego kolegę i przyjaciela.



Finał LII OM w Stalowej Woli i wygrany turniej brydżowy

Pożegnaliśmy świetnego naukowca, ale też człowieka bardzo życzliwego, otwartego, obdarzonego niezwykłym poczuciem humoru, zaangażowanego w popularyzację matematyki i edukację, rewelacyjnego brydżystę.

O dokonaniach naukowych Andrzeja Fryszkowskiego tak pisze Tadeusz Rzeżuchowski, Jego przyjaciel i współpracownik z Wydziału:

„Andrzej miał wiele zainteresowań, którym oddawał się z entuzjazmem, ale Jego prawdziwą pasją była matematyka. W latach siedemdziesiątych XX wieku, kiedy zaczynał pracować, wielkim zainteresowaniem cieszyła się teoria sterowania optymalnego – dość nowa wtedy dziedzina. Jej zagadnienia wiązały się z nowymi problemami teoretycznymi – im właśnie poświęcił większą część swoich badań. Był doktorantem Czesława Olecha, wywodzącego się z krakowskiej szkoły równań różniczkowych Tadeusza Ważewskiego, którego prace były przełomowe w powiązaniu teorii sterowania z własnościami funkcji wielowartościowych (zwanych też multifunkcjami, polami orientorowymi) oraz z inkluzjami różniczkowymi. Funkcje wielowartościowe to odwzorowania, których wartościami są podzbiory jakiejś przestrzeni, a inkluzje różniczkowe od równań różniczkowych różnią się tym, że po prawej stronie jest nie jeden element, ale cały zbiór, który może zależeć od położenia i czasu. Centralnymi zagadnieniami w tamtych czasach było istnienie tak zwanych selekcji multifunkcji, to znaczy zwykłych funkcji, których

wartości dla każdego argumentu leżą w zbiorze będącym wartością tej multifunkcji, a dla inkluzji różniczkowych udowodnienie istnienia rozwiązań przy różnych warunkach nakładanych na multifunkcję stojącą po prawej stronie.

Takie problemy pojawiały się już przed wojną w pracach Leszka Zaremby i francuskiego matematyka André Marchauda. Potężny impuls badaniom w tym zakresie dał Tadeusz Ważewski. Osią badań Andrzeja Fryszkowskiego było badanie funkcji wielowartościowych, których wartości nie są zbiorami wypukłymi, a jedynie domkniętymi podzbiorami przestrzeni unormowanej. To czyniło sprawę o wiele trudniejszą, niż gdy zakłada się wypukłość. Na tym polu uzyskał bardzo dobre osiągnięcia, co między innymi zaowocowało współpracą ze świetnymi włoskimi matematykami, jak Arrigo Cellina i Alberto Bressan. Wspólnie uzyskali zwięzłe i eleganckie wyniki podsumowujące i wyjaśniające wiele wcześniejszych publikacji. Jednym z centralnych zagadnień, którym zajmował się również w późniejszych latach, było badanie tak zwanych rozkładalnych

zbiorów funkcji. Zbiór funkcji jest rozkładalny, jeśli biorąc dowolne dwie należące do niego funkcje i dzieląc dziedzinę na dwie części oraz tworząc nową funkcję, która na pierwszej części dziedziny jest równa pierwszej funkcji, a na drugiej części tej drugiej funkcji, otrzymujemy funkcję również należącą do tego zbioru.

Dodajmy – nie tylko tą „wielką”, naukową matematyką... Andrzej Fryszkowski z wielkim zaangażowaniem działał w Komitetach Olimpiad Matematycznych. Tak wspomina współpracę olimpijską z Nim Michał Krych z Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW:

„Andrzej Fryszkowski – mój kolega, młodszy o rok ode mnie... Był przez wiele lat członkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej. Wielokrotnie spotykaliśmy się na zebraniach Komisji Zadaniowej, na finałach OM. Często umieszczano nas w tym samym pokoju, więc rozmawialiśmy o tym i owym. Sprawdzaliśmy prace finalistów. Weryfikowaliśmy też wspólnie oceny z drugiego stopnia (wystawiane przez członków komitetów okręgowych). To dosyć ciężka praca, trwająca do późnych godzin nocnych, a czasem do wczesnych porannych. Zadania bywają trudne, finaliści mają ograniczony czas na napisanie rozwiązań, więc teksty często są niedopracowane, niektóre zdania są wieloznaczne i wtedy sprawdzający muszą przyjmować jedną z możliwych interpretacji. Chodzi o to, by zadanie, które uczeń faktycznie rozwiązał, zostało tak właśnie potraktowane, pomimo niedoróbek redakcyjnych. Andrzej był w tym dobry. Wgłębiał się w tekst, potrafił siedzieć nad pracą aż do momentu, w którym stawało się jasne, co rzeczywiście uczeń udowodnił, a co tylko napisał, bo wydało mu się, że jest to oczywiste. Potrafił przegryzać się przez wielostronicowe obliczenia, za pomocą których olimpijczycy dowodzili twierdzeń geometrycznych; np. 6 stron papieru kancelaryjnego, prawie same wzory, małe litery, jakiś błąd w połowie czwartej strony, ale w dalszej części błędnie udowodniony fakt nie został wykorzystany, więc w końcu błąd bez znaczenia. Dyskusje bywały długie, ale ostatecznie zawsze potrafiliśmy się porozumieć. Andrzeja bawiły zadania, chętnie sprawdzał geometrię, proponował na ogół zadania geometryczne. Dziesięć dni po finale 61. OM przysłał mi list z alternatywnym rozwiązaniem najtrudniejszego zadania finałowego. Jego rozwiązanie było krótsze i prostsze od autorskiego, a autor tego akurat zadania miał dar do podawania krótkich rozwiązań, zresztą pisywał rozwiązania „firmowe”. Przytoczę rozwiązanie Andrzeja, a Czytelników zainteresowanych dłuższymi zachęcam do zajrzenia do sprawozdania Komitetu Głównego z LXI Olimpiady Matematycznej.

Pasja brydżowa Andrzeja Fryszkowskiego przewija się przez wspomnienia wielu Jego znajomych i przyjaciół... Tak pisze o niej Waldemar Rożek, wybitny pedagog i nauczyciel matematyki z I LO im. KEN w Stalowej Woli:

„Andrzeja poznałem podczas jednego z finałów olimpiady matematycznej. To niesamowite, że po wymianie zaledwie kilku zdań odniosłem wrażenie, jakbyśmy znali się od dawna i mieli wiele wspólnych

Podsumowanie swoich badań, ale też dużo więcej, Andrzej Fryszkowski zawarł w monografii *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, wydanej w roku 2004 przez Kluwer Academic Publishers. Warto chyba na koniec powiedzieć, że zajmowanie się matematyką sprawiało Andrzejowi prawdziwą radość.”

Zadanie 6 (finał 61. OM). Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, \dots , w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki $a_{mn} = a_m a_n$ oraz $a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$ dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że $a_n = n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Zauważmy, że $a_4 = a_2 \cdot a_2 = 4$, $a_{2n} = a_2 \cdot a_n = 2a_n$ dla każdego numeru n , zatem $a_{2^k} = 2^k$. Prosta indukcja. Dalej $a_3^2 = a_9 \leq C(a_1 + a_8) = 9C$ i wobec tego $a_3 \leq 3\sqrt{C}$. Teraz pojawia się pomysł Andrzeja:

$$\begin{aligned} a_{m+n}^3 &= a_{(m+n)^3} = a_{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3} \leq \\ &\leq C(a_{m^3+3m^2n} + a_{3mn^2+n^3}) \leq \\ &\leq C^2(a_{m^3} + a_{3m^2n} + a_{3mn^2} + a_{n^3}) = \\ &= C^2(a_m^3 + a_3 a_m^2 a_n + a_3 a_m a_n^2 + a_n^3) \leq \\ &\leq C^2 \sqrt{C} (a_m^3 + 3a_m^2 a_n + 3a_m a_n^2 + a_n^3) = \\ &= C^{5/2} (a_m + a_n)^3, \end{aligned}$$

więc $a_{m+n} \leq C^{5/6} (a_m + a_n)$. Oznacza to, że stałą C można zastąpić przez liczbę $C^{5/6}$. Tę zaś przez liczbę $(C^{5/6})^{5/6} = C^{(5/6)^2}$. Łatwa indukcja przekona każdego, że liczbę C można zastąpić przez $C^{(5/6)^p}$ dla dowolnej liczby naturalnej p . Wobec tego można zastąpić stałą C przez $\lim_{p \rightarrow \infty} C^{(5/6)^p} = C^0 = 1$. Udowodniliśmy, że $a_{m+n} \leq a_m + a_n$. Stąd wynika, że $a_m \leq ma_1 = m$. A dalej już łatwo. Dla każdej liczby n istnieje taka liczba k , że $2^k > n$. Możemy więc napisać, że $2^k = a_{2^k} = a_{(2^k-n)+n} \leq a_{2^k-n} + a_n \leq 2^k - n + n = 2^k$. Skoro tak, to wszystkie te nierówności są równościami, w tym $a_n = n$, co kończy dowód.

Można jeszcze zauważyć, że rozwiązanie nie zmieniłoby się praktycznie wcale, gdyby założyć, że $C > 0$ zamiast $C > 1$, bo jeśli $a_1 = 1$ i $a_2 = a$, to również $2 = a_2 \leq C(a_1 + a_1) = 2C$, zatem $C \geq 1$, ale to drobiazg.

Dodam jeszcze, że Andrzej grywał też w brydża, organizował turnieje na Politechnice Warszawskiej, kilku brydżystów pojawiło się na cmentarzu, chcąc go pożegnać. Będzie mi brakowało Andrzeja, jego zaangażowania, spokoju...”

tematów do dyskusji. Był niezwykle miłym, otwartym, wyrozumiałym i pełnym optymizmu pasjonatem matematyki. Jego pasja połączona z ogromnym spokojem i opanowaniem udzielała się innym.

W roku 2000 pełniłem funkcję organizatora XXIII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, Andrzej był wiceprzewodniczącym delegacji polskiej. Przez tydzień, zakwaterowani w jednym pokoju na zamku w Baranowie Sandomierskim, dyskutowaliśmy o zadaniach, olimpiadzie, nauczaniu matematyki... no i o brydżu.

Był znakomitym brydżystą. Ja grywałem wyłącznie amatorsko. Przez ponad 20 lat spotykaliśmy się wielokrotnie na finałach olimpijskich, Szkołach Matematyki Poglądowej czy różnych konferencjach. Często wykorzystywaliśmy nawet krótkie przerwy pomiędzy wykładami na kilka rozdań brydża. Był i pozostanie dla mnie wzorem wyrozumiałości

i opanowania. Nawet po ewidentnym moim błędzie potrafił ze spokojem i uśmiechem powiedzieć: „no cóż, spróbowałeś i nie wyszło”. Ostatnio wiele godzin spędzaliśmy na brydżu on-line. Kiedyś, po dwóch kolejnych przegranych rozdaniach lekko poirytowany napisałem na czacie: „skoro nie umiemy grać tą konwencją, to może jej nie grajmy”. Andrzej natychmiast rozbijając i ze spokojem odpisał: „dlaczego mnie mieszasz do tego?”. No cóż, wszak rację miał. Na kolejny finał olimpiady przywiózł mi w prezencie książkę opisującą tę konwencję...

Będzie mi brakować tego wspaniałego poczucia humoru, delikatności, taktu i szacunku do drugiego człowieka.”

Ten szacunek i życzliwość dla innych podkreśla w swoim wspomnieniu również Małgorzata Misztal z Wojskowej Akademii Technicznej:

„Znałam Andrzeja przede wszystkim z turniejów brydżowych. Nie dało się go nie lubić. Grał doskonale, a jednocześnie był życzliwy i wyrozumiały dla partnerów i przeciwników – co przy zielonym stoliku wcale nie jest oczywistym połączeniem! Od stolika Andrzeja i Krystyny zawsze odchodziłam z uśmiechem, niezależnie od tego, czy złapaliśmy właśnie *zero*, czy *maksa*...”

Brydż połączył też Andrzeja Fryszkowskiego z Władysławem Wieczorkiem z Wydziału Chemicznego PW:

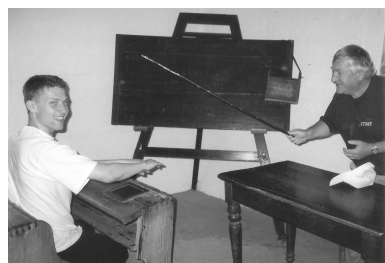
„Andrzeja poznałem pod koniec lat 90., kiedy obaj pełniliśmy funkcje prodziekanów ds. kształcenia. Jednakże nasza prawdziwa znajomość i przyjaźń datuje się od czasów, gdy wyjeżdżaliśmy z rodzinami do ośrodka wypoczynkowego PW w Sarbinowie Morskim. Poranne ćwiczenia gimnastyczne, wycieczki plażą do Chłopów i Gąsek, wspólne kąpiele w zimnym Bałtyku, ale przede wszystkim wieczorne sesje brydżowe cementowały naszą znajomość. Andrzej był bez wątpienia inicjatorem i propagatorem sesji brydżowych. Tradycją stały się mecze Wydziału MiNI kontra reszta Politechniki. Corocznie przegrywaliśmy z kretesem i stawaliśmy się fundatorami wspólnego wyjścia do lokalnej cukierni, które kończyło turnus brydżowy. Efektem tych wakacyjnych eskapad była reaktywacja klubu brydżowego PW *Wektor* i coroczne turnieje brydżowe rozgrywane w Dużej Auli PW z okazji Święta Politechniki oraz Juwenaliów. Turnieje te, najpierw o charakterze lokalnym, z czasem uzyskały status Grand Prix Mazowsza o puchar JM Rektora Politechniki Warszawskiej. Andrzej z ogromnym entuzjazmem organizował te zawody. Mam nadzieję, że ich tradycja zostanie utrzymana, mimo że Andrzeja nie ma już wśród nas. Dzięki tym turniejom poznałem wielu wspaniałych ludzi reprezentujących kilka pokoleń związanych z Politechniką.

Z sarbinowskim brydżem, obok wątku politechnicznego, wiąże się także mój wątek rodzinny. Otóż Andrzej odkrył talent brydżowy u mojej córki Ewy, która z powodu braków kadrowych w zespole Politechniki któregoś roku została członkiem naszego zespołu. Tak więc teza tego krótkiego wspomnienia o moim nieodżałowanym przyjacielu, Profesorze Andrzeju Fryszkowskim, ma wymiar zarówno politechniczny, jak i rodzinny.”

Andrzej całym swoim życiem, pracą naukową i działalnością na rzecz edukacji matematycznej zapisał się na kartach historii polskiej matematyki.

Profesor Andrzej Fryszkowski na zawsze pozostanie w naszej pamięci!

Redagowały Barbara ROSZKOWSKA-LECH i Renata JURASIŃSKA

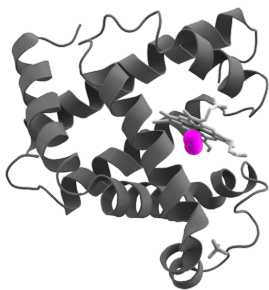


W starej szkole i starymi metodami... (skansen w Sanoku – XXIII APZ)

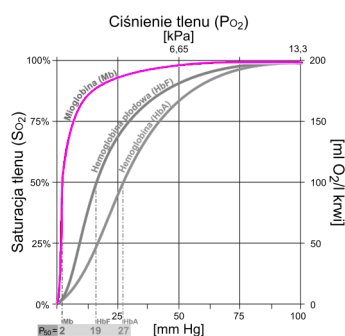


Zadania można sprawdzać wszędzie – przed wejściem na Połoninę Wetlińską (XXIII APZ)

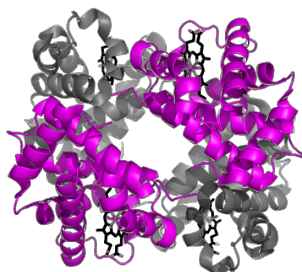




Rys. 1. Cząsteczka mioglobiny, źródło: Wikipedia



Rys. 2. Krzywa saturacji cząsteczek mioglobiny została oznaczona kolorem



Rys. 3. Struktura hemoglobiny. Kolorem zaznaczono podjednostki α , na szaro są podjednostki β . Hem oznaczono kolorem czarnym. Źródło: Wikipedia

Matematyka i życie: punkty przegięcia

Miroslaw LACHOWICZ*

Życie

Do klasycznych pytań: „Skąd przyszliśmy?”, „Kim jesteśmy?”, „Dokąd idziemy?” można dorzucić – Paul Gauguin i poprzednicy wybaczyliby – pytanie „Co to jest życie?”. Nie podejmuję się odpowiedzieć, ale myślę, że bez wątplenia życie ma coś wspólnego z tlenem (o co chodzi z *Henneguya zschokkei*, w tym momencie nie wiadomo). Skoro o tlenie mowa, to warto omówić mioglobinę i hemoglobinę – substancje (białka), które biorą udział w magazynowaniu (mioglobina) lub transportowaniu (hemoglobina) tlenu.

Mioglobina

Dokładnie jedna cząsteczka tlenu może być zmagazynowana w jednej cząsteczce mioglobiny. Istotną rolę w wiązaniu tlenu spełnia hem, na rysunku 1 zaznaczony kolorem. Zadaniem mioglobiny jest magazynowanie tlenu w mięśniach czerwonych. Jej rolę doceniają nie tylko sportowcy.

John Kendrew wraz ze współpracownikami wyznaczył strukturę mioglobiny za pomocą rentgenografii strukturalnej, za co otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii w roku 1962.

Skoro w jednej cząsteczce mioglobiny może być zmagazynowana tylko jedna cząsteczka tlenu, to jasne jest, że trudno tu oczekiwać jakiegoś szczególnie ciekawego zachowania (z punktu widzenia matematycznego) – nie ma szansy na żadne wewnętrzne oddziaływania, które wydobyte ze świata zjawisk mikroskopowych do świata zjawisk makroskopowych mogłyby dawać ciekawe efekty. Jak zobaczymy – rzeczywiście mioglobina takich efektów nie daje.

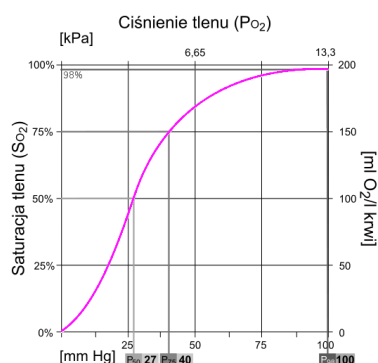
Krzywa saturacji, tzn. procent zajętych tlenem cząsteczek mioglobiny w zależności od ciśnienia tlenu, została przedstawiona na rysunku 2. Można powiedzieć – kompletny banal.

Hemoglobina

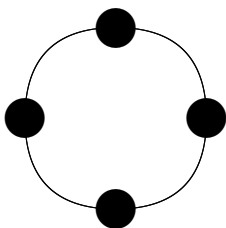
Zdecydowanie ciekawszą, z punktu widzenia opisu matematycznego, jest hemoglobina, której strukturę przedstawia rysunek 3. Prawda, że aż się prosi, by ją opisać matematycznie? W cząsteczce hemoglobiny są dwie białkowe podjednostki α i dwie podjednostki β . Każda z tych 4 podjednostek zawiera hem.

Hemoglobina jest białkiem obecnym we krwi (w erytrocytach). Barwi krew na czerwono. Jej rola polega na przenoszeniu tlenu – przyłączaniu w płucach (gdzie ciśnienie tlenu jest duże) i uwalnianiu w tkankach (gdzie ciśnienie tlenu jest małe). Zatem hemoglobina, bardziej niż mioglobina, musi być sprawnie działającą maszynką. W przeciwieństwie do mioglobiny – hemoglobina zawiera 4 hemy, i można się spodziewać ich oddziaływania (na poziomie mikroskopowym). Jednym słowem można spodziewać się ciekawych efektów do modelowania matematycznego.

Jedna cząsteczka hemoglobiny może przyłączyć do 4 cząsteczek tlenu (gdy wszystkie hemy – miejsca wiązania – są zajęte). Okazuje się, że istnieje zależność pomiędzy różnymi miejscami wiązania. Mogą one przekazywać informację na przemian, tzn. podjednostka α – podjednostce β i na odwrót. Podjednostki tego samego typu „nie widzą się”. Gdy ciśnienie tlenu jest małe i cząsteczka tlenu przyłącza się do cząsteczki hemoglobiny, to prawdopodobieństwo przyłączenia innej cząsteczki tlenu jest małe. Chodzi o to, by nie wypłukać tlenu z miejsc, w których jest go niewiele. Natomiast dla dużych ciśnień tlenu (jak w płucach) prawdopodobieństwo to jest duże. W rezultacie hemoglobina zbiera tlen z płuc i roznosi do miejsc, w których tlen jest potrzebny, bo tam jest go mało. Bardzo to ładny i prosty mechanizm, wdzięczny obiekt matematycznego modelowania.



Rys. 4. Krzywa saturacji dla hemoglobiny



Rys. 5. Ilustracja „matematycznej hemoglobiny”

Więcej o modelu Isinga można przeczytać w artykule Jacka Miększa w Δ_{15}^5 .

Krzywą saturacji dla hemoglobiny – procent zajętych miejsc wiązania w zależności od ciśnienia – przedstawia rysunek 4. Uzbrojeni w powyższą wiedzę możemy zaproponować „matematyczną hemoglobinę”. Byłby to abstrakt ujmujący cechy opisywanego obiektu (tu cząsteczki hemoglobiny), które nas interesują. Takie jest typowe postępowanie w modelowaniu matematycznym. Tworzy się obiekt, możliwie najprostszy, ujmujący te cechy, które chcemy opisać. W ten sposób powstaje model matematyczny, który nie odzwierciedla, i nie może odzwierciedlać, wszystkich cech badanego obiektu. Bo przecież „model, który odzwierciedlałby wszystkie cechy opisywanego obiektu, byłby do opisu równie przydatny, jak sam obiekt, czyli wcale”. Model jest i musi być uproszczeniem. Model Fiata 500, który byłby po prostu Fiatem 500, dla właściciela może byłby przydatniejszy, ale z punktu widzenia opisu mało użyteczny. Warto powtórzyć ten banał, bo gdy przychodzi „co do czego”, to się o tym nie pamięta. Naszą „matematyczną hemoglobinę” (czyli pewnym modelem hemoglobiny) może być tzw. okresowy model Isinga. Model Isinga (niekoniecznie okresowy) pochodzi z fizyki i był wprowadzony do opisu zjawiska ferromagnetyzmu. Model ten polega na tym, że z każdym węzłem (zaznaczonym na rys. 5 czarnym kółkiem) wiążemy funkcję (zmienną losową), która przyjmuje wartość 1 (gdy węzeł jest zajęty przez cząsteczkę tlenu) lub wartość -1 (gdy węzeł jest niezajęty), z prawdopodobieństwami, które należy określić z uwzględnieniem oddziaływań pomiędzy węzłami (najbliższymi sąsiadami na okręgu). Prawda, że to jest po prostu prawie hemoglobina?

Dla matematyków obiekt ten (choć porażająco prosty) powinien być szczególnie ciekawy, gdyż struktury okresowe są w matematyce bardzo ważne. Wiele procesów w przyrodzie wykazuje okresowość, ale żadna wiosna nie jest podobna do następnej. W przypadku mioglobiny mamy pełną (tzn. nieprzybliżoną) okresowość „za darmo”.

Tu mamy coś, co zdecydowanie jest okresowe, więc możemy doświadczać pełnej radości. Można badać ten model podobnie, jak bada się modele Isinga (byłby to poziom mikroskopowy), i otrzymać na poziomie makroskopowym krzywe podobne do tych określających saturację dla hemoglobiny i pochodzących z eksperymentu. Osoby zainteresowane odsyłam do książki Colina Thompsona *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton 1972, gdzie w rozdziale 7 jest to bardzo ładnie opisane. Jest to jednocześnie bardzo prosty i elegancki przykład przejścia „od mikro do makro”.

Punkty przegięcia

Porównując krzywe saturacji dla mioglobiny z krzywymi saturacji dla hemoglobiny, zauważamy, że te drugie są matematycznie ciekawsze – mają punkty przegięcia (po jednym na krzywą), czyli mają kształt „S-owaty” (lub sigmoidalny).

Dla osób niewtajemniczonych: punkty przegięcia to punkty, w których krzywa się przegina, czyli zmienia swoją wypukłość: z wypukłej (po szkolnemu „uśmiechniętej”) staje się wklęsła („smutna”) lub odwrotnie. O wadze punktów przegięcia każdy może się przekonać, choćby śledząc obecne dyskusje o Covid-19 (o czym będzie poniżej). Dla mioglobiny i hemoglobiny różnica pomiędzy odpowiednimi krzywymi ma fundamentalne znaczenie. Jak już wspomniałem, mioglobina tylko magazynuje – co podłeci, to proporcjonalnie wleci. Natomiast hemoglobina działa w bardziej wyrafinowany sposób: jak Janosik, odbiera bogatym i oddaje biednym – tlen. Nie może odwrotnie! Zatem istnienie (lub nie) punktów przegięcia staje się istotnym elementem funkcjonowania życia.

(wewnętrzna) niezależność	zależność (krzywa „S-owata”)
mioglobina	hemoglobina
enzymy klasyczne	enzymy allosteryczne
	denaturacja DNA

Ciekawe, że podobne modele jak dla hemoglobiny (z punktami przegięcia na poziomie makroskopowym) można rozsądnie formułować dla zupełnie innych procesów biologicznych, jak działanie enzymów allosterycznych lub denaturacja DNA (z odpowiednią liczbą „miejsc wiązania”). Ponadto, tak jak dla mioglobiny, można konstruować modele dla enzymów klasycznych.

Istnienie, lub nieistnienie, punktów przegięcia można łatwo przetestować na bardzo ważnych w biologii (od ekologii po kinetykę enzymów) funkcjach Hilla:

$$h_n(x) = a \frac{x^n}{b^n + x^n}, \quad x > 0,$$

przy czym a , b są stałymi dodatnimi, a określa stałą nasycenia, b – stałą połowicznego nasycenia,

$$h_n(b) = \frac{a}{2},$$

$n \geq 1$ jest współczynnikiem Hilla i najczęściej przyjmuje się, że jest liczbą naturalną. Licząc pochodną i drugą pochodną funkcji h_n , otrzymujemy

$$h'_n(x) = a \frac{nb^n x^{n-1}}{(b^n + x^n)^2}$$

oraz

$$h''_n(x) = a \frac{nb^n x^{n-2}}{(b^n + x^n)^3} \left((n-1)b^n - (n+1)x^n \right).$$

Funkcje h_n więc rosną, dla każdego $n \geq 1$ (pochodne są dodatnie), i mają punkt przegięcia dla $n \geq 2$ w punkcie

$$x_p = b^n \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Rzeczywiście, dla $n \geq 2$, funkcja h''_n w punkcie x_p przyjmuje wartość 0 i zmienia w tym punkcie znak – dla $x \in (0, x_p)$ jest dodatnia (czyli h_n jest wypukła), a dla $x > x_p$ jest ujemna (h_n jest wklęsła).

Dla $n = 1$ funkcja h_1 nie ma punktu przegięcia – jest wklęsła na całej swojej dziedzinie ($x > 0$). Przypadek $n = 1$ jest bardzo istotny w tzw. kinetyce enzymów w teorii Michaelisa i Menten (Leonor Michaelis (1875–1949), Maud Menten (1879–1960)).

Wyprowadzenie funkcji Michaelisa–Menten (czyli funkcji Hilla z $n = 1$) jest wdzięcznym wstępem do matematycznej dziedziny – analizy

zagadnień osobliwie zaburzonych. Okazuje się, że nieprzewidyżone, jakby się wydawało na pierwszy rzut oka, problemy pojawiające się w klasycznym wyprowadzeniu Michaelisa i Menten są związane z wystąpieniem tzw. efektu warstwy początkowej.

Typowym przykładem funkcji o kształcie „S-owatym” jest dystrybuanta rozkładu normalnego (rozkładu Gaussa). Centralne twierdzenie graniczne uzasadnia powszechność występowania rozkładów zbliżonych do rozkładu normalnego.

Warto, choćby pokrótce, omówić zjawisko denaturacji DNA, bardzo istotne w biotechnologii, na przykład w procedurze PCR.

Schemat DNA został opracowany przez Jamesa Watsona, Francisca Cricka i Maurice'a Wilkina (Nagroda Nobla w 1962 r.).

Na każdym z 2 łańcuchów DNA umieszczone są zasady azotowe: A – adenina, C – cytozyna, G – guanina, T – tymina. Są one połączone wiązaniami wodorowymi, przy czym możliwe są tylko połączenia A–T (lub T–A) – podwójnym wiązaniem i C–G (lub G–C) – potrójnym wiązaniem. Zatem wiązania A–T (lub T–A) są słabsze niż C–G (lub G–C). Pod wpływem różnych czynników, np. wysokiej temperatury, wiązania pękają. Jest to proces denaturacji DNA. Temperatura, w której połowa wiązań uległa pęknięciu, nazywa się temperaturą topnienia. Określenie temperatury topnienia charakteryzuje DNA.

W pracy: R. G. Rutledge, D. Stewart, *Critical evaluation of methods used to determine amplification efficiency refutes the exponential character of real-time PCR*, BMC Molecular Biology, 9, 2008 określono krzywe przedstawiające zależności (odpowiednio mierzone) procentu pękniętych wiązań od temperatury. Wszystkie krzywe, odpowiadające różnym typom DNA, mają idealne kształty „S-owate”.

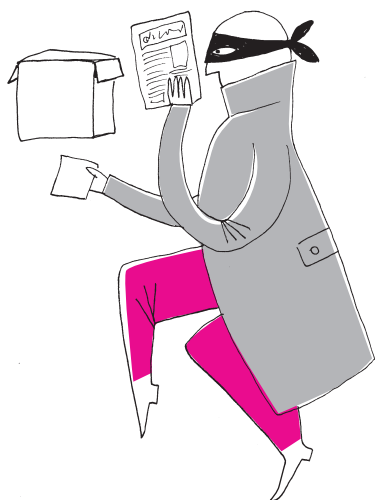
Wiele punktów przegięcia

Sytuacja jest jeszcze bardziej ciekawa, gdy punktów przegięcia jest więcej. Jacques Lucien Monod (1910–1976) – francuski biochemik, laureat Nagrody Nobla z dziedziny fizjologii i medycyny w 1965 roku za odkrycie mechanizmów genetycznej kontroli działania komórek – rozpatrywał sytuację 2 punktów przegięcia (choć nie używał pojęcia punktu przegięcia). Wprowadził pojęcie *wzrost dwufazowy* (diauxic growth) dla takiego zachowania. W pracy J. Monod, *The growth of bacterial cultures*, Annu. Rev. Microbiol. 1949 podał wykres wzrostu bakterii pałeczki okrężnicy (*Escherichia coli*). Pałeczki były odżywiane glukozą, którą lubią, i sorbitolem, za którym raczej nie przepadają. Przy okazji, by odżywiać się sorbitolem, gdy zabraknie glukozy, muszą się na ten sorbitol przestawić, czego też nie lubią. Krzywe eksperymentalne były idealnie dwufazowe.

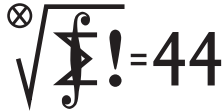
Okazuje się, że można rozważać zachowanie typu dwufazowego w cyklu komórkowym, czyli „to, co się dzieje” w komórce podczas procesu jej podziału. Na poziomie matematycznym badanie tego typu zachowania jest dużym wyzwaniem.

Polecam przyjrzeć się danym dotyczącym wszystkich przypadków Covid-19 pod koniec 2020 roku według danych z Johns Hopkins University. Wykresy, szczególnie dla wybranych krajów europejskich, obfitują w punkty przegięcia, natomiast dla niektórych krajów pozaeuropejskich zachowanie jest inne.

Nie wiem, czy udało mi się przekonać Czytelnika, że punkty przegięcia mogą wyrażać pewne aspekty życia. Mam nadzieję, że nauka jeszcze nas zadziwi w tym zakresie. Należałoby sobie życzyć, aby krzywe opisujące wszystkie przypadki Covid-19 osiągnęły jak najszybciej swoje ostateczne punkty przegięcia i stały się „smutnymi”, w przeciwieństwie do udęconej Ludzkości.



Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 819 ($WT = 2,37$) i 819 ($WT = 1,76$)
z numeru 4/2021

Mikołaj Pater	Opole	46,40
Piotr Kumor	Olsztyn	40,09
Łukasz Merta	Kraków	38,74
Witold Bednarek	Łódź	36,36
Błażej Żmija	Kraków	35,54
Kacper Morawski	Warszawa	34,50
Paweł Najman	Kraków	34,25

Pan Mikołaj Pater – już drugi raz.

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2022

Zadania z matematyki nr 829, 830

Redaguje Marcin E. KUCZMA

829. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$, jest wpisany w okrąg o środku O ; odcinek CD jest wysokością. Punkt E jest symetryczny do B względem D ; punkt M jest środkiem boku AC . Okrąg przechodzący przez O, D, M przecina prostą AC w punktach M i P . Udowodnić, że trójkąty DCP i DEP mają równe promienie okręgów opisanych.

830. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych x, y, z , spełniające równanie

$$\arccos x + \arccos y + \arccos z = \frac{\pi}{4}.$$

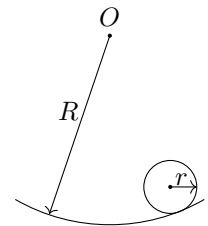
Zadanie 830 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Zadania z fizyki nr 726, 727

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

726. Cienka obręcz o promieniu r toczy się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni walca o promieniu R i wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi (rysunek). Znaleźć okres tych drgań.

727. W zwojnicy o liczbie zwojów N , długości L i promieniu $R \ll L$ płynie prąd o natężeniu I . Jaka jest wytrzymałość drutu, z którego zrobiono zwojnicę, skoro nie ulega ona rozerwaniu?



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Niebo w listopadzie

Wraz z początkiem listopada w wielu krajach północnej półkuli Ziemi, w tym w większości krajów europejskich, zaczął obowiązywać czas zimowy. W związku z tym Słońce wstaje i zachodzi o godzinę wcześniej, niż to miało miejsce jeszcze przed kilkoma dniami. Tak samo pozostałe ciała niebieskie wschodzą, górują i zachodzą godzinę wcześniej. W trzeciej dekadzie miesiąca Słońce przecina równoleżnik -20° deklinacji w drodze ku przesileniu zimowemu i przez następne dwa miesiące, gdy ponownie przetnie ten równoleżnik w drodze na północ, zmieni wysokość górowania jedynie o $3,5^\circ$, nie wznosząc się wyżej niż kilkanaście stopni ponad widnokrąg.

Listopad jest kolejnym miesiącem z korzystnym nachyleniem ekliptyki do widnokregu rano i niekorzystnym wieczorem. Na początku miesiąca warto wstawać przed świtem, korzystając z dobrej widoczności cienkiego sierpa Księżyca i planety Merkury. Srebrny Glob 4 listopada po godzinie 22 naszego czasu przejdzie przez now i przez pierwsze 3 dni miesiąca zaprezentuje swoją tarczę w bardzo małej fazie.

Na początku świtu cywilnego 1 listopada Księżyc znajdzie się na pograniczu gwiazdozbiorów Lwa i Panny, na wysokości ponad 35° , mając tarczę oświetloną w 17%. W odległości 8° od niego, na godzinie 10 towarzystwa Księżycowi dotrzyma Denebola, druga co do jasności gwiazda Lwa, o jasności obserwowanej $+2,1^m$. Dobę później Srebrny Glob przejdzie do gwiazdozbioru

Panny, zbliżając się na 6° do Porrimy, gwiazdy o jasności $+3,5^m$. O tej samej porze Księżyc wznie się na wysokość 25° , prezentując fazę 10%. Już dwie noce później, 3 listopada, tarcza naturalnego satelity Ziemi dotrze na wysokość 13° , mając tarczę oświetloną już zaledwie w 4%. Dodatkowo 7° pod tarczą Księżyca parę o rozwarości 4° utworzą Merkury i Spica, najjaśniejsza gwiazda Panny.

Księżyc można próbować dostrzec nawet 4 listopada, jednak nie będzie to proste, gdyż wtedy do nowiu pozostanie 16 godzin i o godzinie 6 Srebrny Glob zdąży się wznieść na wysokość zaledwie 2° . Tym razem to Merkurego można wykorzystać do odnalezienia Księżyca. Srebrnego Globu należy szukać 6° od Merkurego, na godzinie 7 względem planety. Możliwe, że $1,5^\circ$ na prawo od Księżyca uda się dostrzec powracającą na poranne niebo planetę Mars. Jednak nie jest to łatwa sztuka, gdyż jasność Marsa to tylko $+1,7^m$ i do jego odszukania niezbędną może okazać się lornetka.

Merkury 25 października oddalił się na 18° od Słońca i na początku listopada dąży już do koniunktacji ze Słońcem. Jak zawsze przy widoczności porannej planeta dąży do koniunktacji górnej, którą osiągnie dopiero 29 listopada. Merkury pozostanie widoczny mniej więcej do połowy listopada, utrzymując jasność $-0,9^m$, przy stale zmniejszającej się tarczy (około $5''$) i rosnącej fazie (ponad 90%).

Merkury 10 i 11 listopada przejdzie w odległości 1° od Marsa. Czerwona Planeta powraca na poranne niebo po kilkumiesięcznym okresie niewidoczności, ale w listopadzie jej warunki obserwacyjne nie są korzystne: do końca miesiąca na godzinę przed wschodem Słońca planeta nie przekroczy wysokości 4° , utrzymując jasność $+1,6^m$. Pod koniec miesiąca, 22 listopada, Mars przejdzie zaledwie $4'$ od jaśniejszego składnika układu Zuben Elgenubi, czyli drugiej co do jasności gwiazdy Wagi.

Wieczorem nachylenie ekliptyki jest słabe. Dlatego po nowiu Księżyc pokaże się dopiero 7 listopada, w fazie 11%, zajmując godzinę po zachodzie Słońca pozycję na wysokości 3° . Srebrny Glob zacznie widoczność wieczorną od zbliżenia z Wenus. Tego wieczora Księżycowi zabraknie do niej 8° . Dobę później Księżyc wymiśnie Wenus i pokaże się w odległości 6° po jej drugiej stronie. W listopadzie **Wenus** wreszcie zacznie wznosić się wyżej, spędzając prawie cały miesiąc w gwiazdozbiorze Strzelca. Początkowo godzinę po zachodzie Słońca planeta pokaże się na wysokości 5° , ale do końca miesiąca zwiększy wysokość do 9° . W tym czasie jasność planety zwiększy się od $-4,4$ do $-4,7^m$, średnica tarczy zwiększy się z 26 do $39''$, faza natomiast spadnie z 48 do 29%. W swojej wędrówce 19 listopada planeta zbliży się na $15'$ do gwiazdy Nunki o jasności $+2^m$.

Nocą w Święto Niepodległości, 11 listopada, Księżyc przejdzie przez I kwadrę i wieczorem pokaże się 6° na południe od **Jowisza**. Dzień wcześniej, przy fazie 40%, Srebrny Glob przejdzie 5° na południe od **Saturna**.

Dwie największe planety Układu Słonecznego wędrują przez gwiazdozbiór Koziorożca w odległości 16° od siebie. Na początku nocy astronomicznej obie planety są już po górowaniu i zbliżają się do horyzontu. Saturn zajmuje pozycję na wysokości 17° , Jowisz jest 8° wyżej. W listopadzie Saturn świeci blaskiem $+0,7^m$, a jego tarcza ma średnicę $16''$, Jowisz natomiast do końca miesiąca osłabnie do $-2,3^m$, a jego tarcza skurczy się do średnicy $39''$, czyli takiej samej jak średnica Wenus. Obie planety są dość blisko siebie i w teleskopach łatwo można porównać wygląd ich tarcz.

Przez cały miesiąc dobrze widoczne są dwie ostatnie planety Układu Słonecznego. **Neptun** przeszedł przez opozycję względem Słońca w połowie września, **Uran** zaś znajdzie się po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce 4 listopada. Stąd Uran jest widoczny całą noc, lecz Neptuna można obserwować gdzieś do godziny 2. Obie planety poruszają się ruchem wstecznym. Neptun kreśli swoją pętlę $1,5^\circ$ od gwiazdy 96 Aqr i gdy przecina południk lokalny, wznosi się na wysokość prawie 35° . Planeta Uran góruje ponad 3 godziny po Neptunie na wysokości 53° , wędrując przez gwiazdozbiór Barana, i do końca miesiąca oddali się od gwiazdy o Ari na 2° , zbliżając się jednocześnie do gwiazdy 29 Ari na 1° . Neptun świeci z jasnością $+7,8^m$, Uran jest o ponad 2^m jaśniejszy. Księżyc spotka się z Neptunem 14 listopada w fazie 75%, a z Uranem 4 dni później w fazie 98%. Oznacza to, że środek miesiąca nie jest dobrym czasem na obserwowanie obu planet.

Księżyc przejdzie przez pełnię 19 listopada i jednocześnie zahaczy o cień Ziemi. Niestety nie schowa się weń całkowicie, w maksymalnej fazie 3% średnicy Księżyca ominie cień naszej planety. Całe zaćmienie można obserwować z Ameryki Północnej, basenu Pacyfiku oraz północno-wschodniej Rosji. W Polsce Księżyc zajdzie zaraz po rozpoczęciu fazy półcieniowej, a zatem w praktyce niczego nie da się dostrzec.

W nocy z 26 na 27 listopada bliski ostatniej kwadry Srebrny Glob wejdzie w gwiazdozbiórze Lwa. W północno-wschodniej Polsce tuż po swoim wschodzie zakryje jasną gwiazdę η Leo. Na pozostałym obszarze kraju Księżyc wejdzie już po jej zakryciu. Około godziny 22:45 gwiazda wyłoni się zza ciemnego brzegu księżycowej tarczy. Do końca miesiąca Księżyc pozostanie ozdobą porannego nieba, stopniowo zmniejszając fazę do 22% 30 dnia miesiąca.

W ostatnich dniach listopada w opozycji względem Słońca znajdzie się planeta karłowata (1) **Ceres**, osiągając jasność $+7,1^m$, czyli wyraźnie więcej od Neptuna. Ceres w listopadzie pokona na niebie 6° na tle gwiazdozbioru Byka, przechodząc 3 dnia miesiąca zaledwie $7'$ na południe od Aldebarana, a potem przecinając Hiady i kończąc miesiąc 2° na północny zachód od gwiazdy γ Tauri, czyli najbardziej na zachód wysuniętej jasnej gwiazdy Hiad. A zatem na początku i pod koniec miesiąca, przy nieobecności Księżyca, Ceres powinno dać się łatwo odnaleźć przez lornetkę.

Ariel MAJCHER

Prosto z nieba: Zrodzone z ognia. Jak mogą powstawać atmosfery na super-Ziemiach?

Szacuje się, że w naszej Galaktyce każdą gwiazdę podobną do Słońca okrąża średnio 0,4–0,9 skalistych planet znajdujących się w tzw. „ekosferze”, czyli w takiej odległości od rodzimej gwiazdy, która pozwala na istnienie wody w stanie ciekłym. Oznacza to, że w Drodze Mlecznej może istnieć potencjalnie 300 milionów planet nadających się do zamieszkania! Jest tylko jeden problem. Woda to nie wszystko. Na planecie, na której chcielibyśmy zamieszkać, musi jeszcze istnieć odpowiednio gruba warstwa atmosfery. Niestety wciąż nie znamy odpowiedzi na wiele pytań dotyczących mechanizmów jej formowania.

Jak do tej pory odkryto 1350 super-Ziem. Najbliższa z nich znajduje się niecałe 4 lata świetlne od nas i orbituje wokół najbliższego nam układu gwiazd – Proxima Centauri.

Zagadnieniem tym zajęli się naukowcy z University of Chicago. Badali oni możliwe sposoby powstawania atmosfer na tzw. super-Ziemiach – skalistych planetach większych i bardziej masywnych niż Ziemia, jednak zdecydowanie lżejszych niż Neptun czy Uran.

Uważa się, że super-Ziemia zaczyna swoje życie jako „prawie-Neptun” – krzemianowe kule magmy otoczone grubą warstwą atmosfery wodorowej. Ponieważ cząsteczki wodoru są stosunkowo lekkie, to atmosfera taka jest szybko tracona w przestrzeni kosmicznej (poprzez ucieczkę atmosferyczną), pozostawiając po sobie „gołą” super-Ziemię. Planeta może (ale nie musi) w późniejszym czasie odzyskać atmosferę dzięki aktywności wulkanicznej lub uderzeniom komet. Przynajmniej tak sądzono do tej pory. A gdyby istniał sposób na to, by super-Ziemia wykształciła stabilną atmosferę już na początku, zanim zostanie jej pozbawiona?

Gdy magma spotyka się z wodorem...

... tlenki żelaza w magmie reagują z atmosferycznym wodorem, tworząc żelazo i... wodę. Ciężkie żelazo szybko opada do jądra planety. A co z wodą? Część w postaci pary wodnej ucieka do atmosfery, gdzie miesza się z wodorem, ale zdecydowana większość pozostaje uwięziona w magmie. W rezultacie otrzymujemy planetę będącą kulą wodnistej magmy otoczonej wilgotną atmosferą. Ale tak jak wspomnieliśmy wcześniej, atmosfera jest nieustannie tracona (wywiewana z planety), więc co to zmienia?

Tracona atmosfera z czasem staje się coraz cieńsza, przez co zmniejsza się też ciśnienie wywierane na powierzchnię planety, co z kolei pozwala na stopniową ucieczkę pary wodnej uwięzionej w magmie. Tracony wodór atmosferyczny jest więc szybko zastępowany przez parę wodną. Para wodna ma zdecydowanie większą masę cząsteczkową niż wodór – jej ucieczka atmosferyczna przebiega znacznie wolniej. Dlatego po pewnym czasie atmosfera wodorowa zamienia się w atmosferę o grubości 150–500 km całkowicie zdominowaną przez wodę!

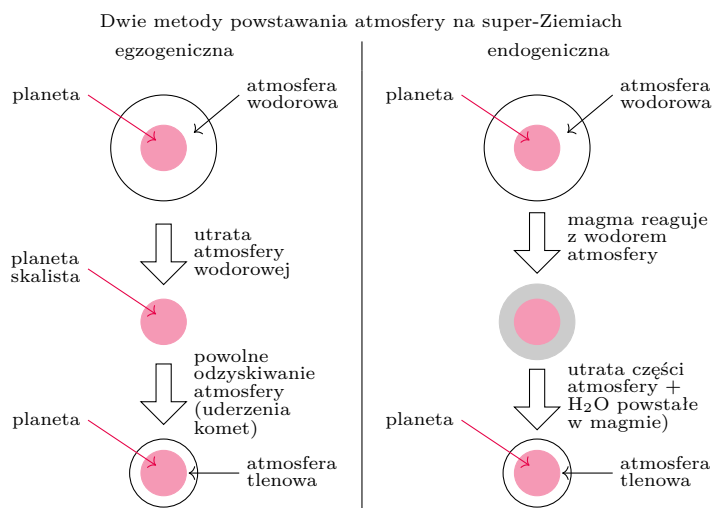
Woda! Wszędzie woda!

Długość okresu, w którym super-Ziemia mogłaby mieć atmosferę zdominowaną przez wodę, zależy od tego, jak agresywnie przebiega proces jej utraty. Mniejsze planety, znajdujące się bardzo blisko swoich gwiazd, są bardziej zagrożone ze względu na silne wiatry gwiazdowe. Planety znajdujące się w większych odległościach od swoich gwiazd są bezpieczniejsze i potencjalnie mogą zachować swoje wilgotne atmosfery przez miliardy lat.

Jeszcze nie wiemy, czy takie planety istnieją. Ale bardzo możliwe, że zaobserwowanie jednej z nich jest tylko kwestią czasu. Światło gwiazdy przechodzące przez atmosferę bogatą w wodę miałoby bardzo charakterystyczne widmo spektroskopowe, a tego rodzaju obserwacje będą możliwe już niedługo dzięki uruchomieniu teleskopu kosmicznego James Webb Telescope.

Anna DURKALEC

Tekst oparty na publikacji: Edwin S. Kite, Laura Schaefer, *Water on Hot Rocky Exoplanets*.



Fizyka zegarów z klocków Lego

Czas ucieka nieubłaganie. Ludzkość zaś od stuleci stara się jak najdokładniej mierzyć tempo tej ucieczki. Przez stulecia zadanie to spełniały zegary mechaniczne. Najbardziej rozpowszechnione konstrukcje takich zegarów zapewniają jednostajny ruch wskazówek, wykorzystując okresowy ruch wahadła. W procesie tym kluczową rolę odgrywa tzw. wychwyty, czyli element, który spełnia naraz dwie funkcje: systematycznie popycha do przodu mechanizm zegarowy i równocześnie oddaje wahadłu traconą w ten sposób energię, korzystając z zapasu energii potencjalnej ciężarków lub naciągniętej sprężyny.

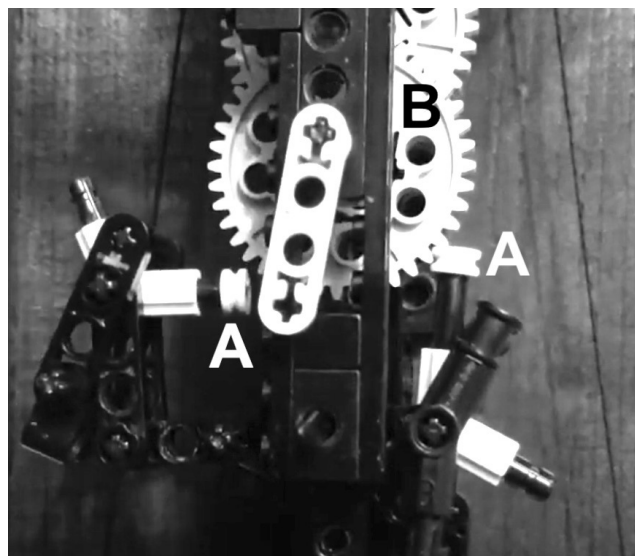
Ciekawy mechanizm wychwyty został zaproponowany przez Johna Harrisona dwa wieki temu. Wyglądał on nieco podejrzanie: amplituda drgań wahadła była stosunkowo duża i pozostawało ono w ciągłym kontakcie z napędzającym je kołem zębatym. Tym samym wahadło nigdy nie było swobodne, co mogło sprawiać wrażenie, iż jest mało dokładne – jak można odmierzać czas wahadłem, które jest bez przerwy popychane? Zapewne dlatego pomysł ten nigdy nie doczekał się upowszechnienia. Dopiero niedawno uświadomiono sobie, że jego istota polegała na zminimalizowaniu sił tarcia, a nowo budowane zegary z wychwytem Harrisona (ang. *grasshopper escapement*, od charakterystycznego kształtu kotwicy z paletami, przypominającej skaczącego pasikonika) dzierżą obecnie rekord Guinnessa w konkurencji dokładności zegarów mechanicznych wynoszący jedną sekundę na 100 dni. Nie ma tu oczywiście porównania z dokładnością zegarów atomowych, która jest rzędu sekundy na 100 milionów lat, ale i tak robi ona wrażenie, jeśli pomyślimy, że chodzi (!) o makroskopowy układ fizyczny, którego pojedyncze części możemy ująć w ręce.

Czy jednak poważny fizyk powinien tracić czas na rozważania nad zegarami z czasów, gdy zasady dynamiki Newtona dopiero przebijały się do świadomości naukowców? David Ziemkiewicz z Politechniki Bydgoskiej im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich błyskotliwie pokazał ostatnio, że o żadnym traceniu czasu nie może być tu mowy! Nie tylko zbudował przykuwający uwagę model zegara z wychwytem Harrisona, używając do tego klocków Lego [1], ale także

przeanalizował numerycznie dynamikę takiego zegara, prezentując wyniki w uznanym czasopiśmie naukowym z fizyki [2]. Wśród ciekawych wyników tej pracy zwraca uwagę m.in. potraktowanie całego układu wahadło-wychwyty jako układu chaotycznego i zbadanie jego atraktorów. Można też sądzić, że optymalizacja parametrów układu może doprowadzić do dalszego zwiększenia dokładności zegarów mechanicznych – i dalszych rekordów dokładności.

Odkryć fizycznych można dokonywać na wiele różnych sposobów. Aby stwierdzić istnienie nowej cząstki w LHC, trzeba być członkiem wielkiej korporacji uczonych pracującym nad małym wycinkiem projektu. W nauce jest jednak dość miejsca na indywidualne fascynacje i nieco ekstrawaganckie projekty wynikające z chwilowych zauroczeń rzeczywistością. Można spierać się, który sposób działania jest bardziej wydajny – taka dyskusja faktycznie toczy się od paru lat, nie prowadząc wszakże do jednoznacznych wniosków. Czas pokaże.

Krzysztof TURZYŃSKI



Wychwyty Harrisona konstrukcji D. Ziemkiewicza; palety (A) pozostają w stałym kontakcie z kołem zębatym (B) napędzającym wahadło (na podstawie [1])

Uprzejmie dziękuję dr. inż. Davidowi Ziemkiewiczowi za konsultację opisu wychwyty Harrisona.

[1] <https://www.youtube.com/channel/UC4Q1E2q0Mf9Ha2m0RdWvYvJg>

[2] D. Ziemkiewicz, „Numerical Analysis of Grasshopper Escapement”, *Physical Review E* **103**, 062208 (2021)



Gdzie się podziały tamte funkcje...

Bartłomiej BZDEGA

... gdzie te dziedziny, gdzie tamten świat?

Rozwiązywanie olimpijskich równań funkcyjnych zwykle polega na przejściu od ogółu do szczegółu – jeśli poszukiwane funkcje mają spełniać dane równanie dla wszystkich, powiedzmy, $x, y \in \mathbb{R}$, to w miejsce x i y możemy podstawić dowolne liczby rzeczywiste, a nawet dowolne wyrażenia, które przyjmują wartości rzeczywiste. Najlepiej to ilustruje poniższy przykład.

Zadanie. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y .

Rozwiązanie. Niech $c = f(0)$. Podstawiając $x = y = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - 0) = f(0) + f(f(0) - f(0)) + 0,$$

czyli $f(c) = f(f(0)) = 2f(0) = 2c$. Po podstawieniu $x = 0$ i $y = c$ mamy

$$f(f(0) - c) = f(0) + f(f(c) - c) + 0,$$

co w świetle równości $f(0) = c$ i $f(c) = 2c$ daje $c = 3c$, czyli $c = 0$. Udowodniliśmy więc, że $f(0) = 0$. Następnie, podstawiając $x = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0,$$

co po uproszczeniu i wykorzystaniu równości $f(0) = 0$ daje $f(-y) = f(f(y))$.

W tej równości y jest dowolne, więc również $f(-x) = f(f(x))$. Wreszcie, podstawiając $y = f(x)$, otrzymujemy

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(f(x)) - f(-x)) + x,$$

co na mocy ostatnio dowiedzionej równości sprowadza się do $0 = f(x) + x$, czyli $f(x) = -x$. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy ta funkcja spełnia zadane równanie.

Należy więc sprawdzić równość

$$-(-x - y) = -x - (-y - (-(-x))) - x,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y . Zatem dane równanie spełnia funkcja $f(x) = -x$ i tylko ona.

Podstawienie $y = f(x)$ nie było przypadkowe. Po lewej stronie równości mamy wyrażenie $f(f(x) - y)$, które sprowadza się wówczas do $f(0) = 0$. Ogólnie, należy szukać takich podstawień, które pozwolą, dzięki wcześniej zdobytym informacjom, nieco uprościć rozwiązywane równanie. Na początku wygląda to jak metoda prób i błędów, ale po rozwiązaniu kilku takich zadań można nabrać nieco intuicji. Sprawdzenie, czy otrzymana funkcja spełnia zadane równanie, jest konieczne – ma ona je spełniać dla wszystkich par (x, y) , a otrzymaliśmy ją, korzystając tylko z pewnych szczególnych par.

Na koniec wymienię kilka najczęściej spotykanych błędów, których należy się wystrzeżać:

- Podstawianie $f(x) = ax + b$ (lub podobne) do równania funkcyjnego, następnie obliczanie a i b – jest to błąd, ponieważ wtedy wyznaczymy jedynie funkcje liniowe.
- Wnioskowanie, że jeśli $f(A) = f(B)$ dla pewnych liczb/wyrażeń A i B , to $A = B$. Tak można robić tylko wtedy, gdy dana funkcja jest różnowartościowa.
- Zakładanie, że dla ustalonego y_0 z przeciwdziedziny istnieje takie x , że $f(x) = y_0$. Tak można robić tylko wtedy, gdy wiemy, że funkcja f osiąga wartość y_0 dla jakiegoś argumentu.

Zadania. W każdym zadaniu należy wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dane równanie dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ oraz ewentualnie dopisane założenie.

1. $yf(x - 1) - xf(y - 1) = f(x - y)$.
2. $f(x) + f(y) = x^2 + xy + y^2$.
3. $f(xf(y)) = f(xy) + x$.
4. $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
5. $f(f(x) + y) = f(f(y)) + x$.
6. $f(f(x) - y) + f(f(y) - x) = 0$, f – różnowartościowa.
7. $f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2$.
8. $f(f(x) - y) + f(x + y) = 0$, f – nierosnąca.

Wskazówki do zadań
1. Po podstawieniu $y = 0$ dostaniemy wzór $f(x) = ax$ dla pewnej liczby rzeczywistej a .
2. Dla $y = 0$ otrzymamy wzór $f(x)$.
3. Dla $y = 0$ otrzymamy wzór $f(x)$.
4. Po podstawieniu $x = y$ możemy wywnioskować, że jeśli $f(x) \neq 0$, to $f(x) = 0$ dla $x = 0$.
5. Biorąc $y = 0$, dostaniemy wzór $f(f(x)) = ax$.
6. Dla $x = y$ otrzymamy $f(f(x)) = ax$.
7. Podstawiając $x = c$, $y = -c$, otrzymamy $f(c) = 0$. Dalej dla $y = c - x$ mamy $f(x) = c - x$.
8. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
9. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
10. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
11. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
12. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
13. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
14. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
15. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
16. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
17. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
18. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
19. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
20. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
21. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
22. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
23. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
24. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
25. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
26. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
27. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
28. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
29. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
30. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
31. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
32. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
33. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
34. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
35. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
36. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
37. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
38. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
39. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
40. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
41. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
42. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
43. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
44. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
45. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
46. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
47. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
48. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
49. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
50. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
51. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
52. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
53. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
54. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
55. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
56. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
57. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
58. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
59. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
60. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
61. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
62. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
63. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
64. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
65. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
66. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
67. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
68. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
69. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
70. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
71. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
72. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
73. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
74. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
75. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
76. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
77. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
78. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
79. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
80. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
81. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
82. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
83. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
84. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
85. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
86. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
87. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
88. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
89. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
90. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
91. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
92. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
93. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
94. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
95. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
96. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
97. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
98. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
99. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.
100. Wstawiając $x = 0$, otrzymamy wzór $f(f(x) - y) = c - y$.

