Gdzie się podziały tamte funkcyje…

Bartłomiej BZDĘGA

…gdzie te dziedziny, gdzie tamten świat?

Rozwiązywanie olimpijskich równań funkcyjnych zwykle polega na przejściu od ogółu do szczegółu – jeśli poszukiwane funkcje mają spełniać dane równanie dla wszystkich, powiedzmy, $x, y \in \mathbb{R}$, to w miejsce x i y możemy podstawić dowolne liczby rzeczywiste, a nawet dowolne wyrażenia, które przyjmują wartości rzeczywiste. Najlepiej to ilustruje poniższy przykład.

Zadanie. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

Rozwiązanie. Niech $c = f(0)$. Podstawiając $x = y = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - 0) = f(0) + f(f(0) - f(0)) + 0,$$

czyli $f(c) = f(f(0)) = 2f(0) = 2c$. Po podstawieniu $x = 0$ i $y = c$ mamy

$$f(f(0) - c) = f(0) + f(f(c) - c) + 0,$$

co w świetle równości $f(0) = c$ i $f(c) = 2c$ daje $c = 3c$, czyli $c = 0$. Udowodniliśmy więc, że $f(0) = 0$. Następnie, podstawiając $x = 0$, otrzymamy

$$f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(-0)) + 0,$$

co po uproszczeniu i wykorzystaniu równości $f(0) = 0$ daje $f(-y) = f(f(y))$. W tej równości y jest dowolne, więc również $f(-x) = f(f(x))$. Wreszcie, podstawiając $y = f(x)$, otrzymujemy

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(f(x)) - f(-x)) + x,$$

co na mocy ostatnio dowiedzionej równości sprowadza się do $0 = f(x) + x$, czyli $f(x) = -x$. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy ta funkcja spełnia zadane równanie. Należy więc sprawdzić równość

$$-(-x - y) = -x - (-y - (-(-x))) - x,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y. Zatem dane równanie spełnia funkcja $f(x) = -x$ i tylko ona.

Podstawienie $y = f(x)$ nie było przypadkowe. Po lewej stronie równości mamy wyrażenie $f(f(x) - y)$, które sprowadza się wówczas do $f(0) = 0$. Ogólnie, należy szukać takich podstawień, które pozwolą, dzięki wcześniej zdobytym informacjom, nieco uprościć rozwiązywane równanie. Na początku wygląda to jak metoda prób i błędów, ale po rozwiązaniu kilku takich zadań można nabrać nieco intuicji. Sprawdzenie, czy otrzymana funkcja spełnia zadane równanie, jest konieczne – ma ona je spełniać dla wszystkich par (x, y), a otrzymaliśmy ją, korzystając tylko z pewnych szczególnych par.

Na koniec wymienię kilka najczęściej spotykanych błędów, których należy się wystrzegać:

- Podstawianie $f(x) = ax + b$ (lub podobne) do równania funkcyjnego, następnie obliczanie a i b – jest to błąd, ponieważ wtedy wyznaczymy jedynie funkcje liniowe.
- Wnioskowanie, że jeśli $f(A) = f(B)$ dla pewnych liczb/wyrażeń A i B, to $A = B$. Tak można robić tylko wtedy, gdy dana funkcja jest różnowartościowa.
- Zakładanie, że dla ustalonego y_0 z przeciwdziedziny istnieje takie x, że $f(x) = y_0$. Tak można robić tylko wtedy, gdy wiemy, że funkcja f osiąga wartość y_0 dla jakiegoś argumentu.

Zadania. *W każdym zadaniu należy wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dane równanie dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ oraz ewentualnie dopisane założenie.*

1. $yf(x - 1) - xf(y - 1) = f(x - y)$.
2. $f(x) + f(y) = x^2 + xy + y^2$.
3. $f(xf(y)) = f(xy) + x$.
4. $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
5. $f(f(x) + y) = f(f(y)) + x$.
6. $f(f(x) - y) + f(f(y) - x) = 0, \quad f$ – różnowartościowa.
7. $f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2$.
8. $f(f(x) - y) + f(x + y) = 0, \quad f$ – nierosnąca.

Wskazówki do zadań
(*we wszystkich wskazówkach $c = f(0)$*)

1. Po podstawieniu $y = 0$ dostaniemy wzór $f(x) = ax$ dla pewnej liczby rzeczywistej a.
2. Dla $y = 0$ otrzymamy wzór $f(x)$. Żadna funkcja nie spełnia danego równania.
3. Po wstawieniu $y = 0$ wykazać, że $c \neq 0$ i dalej podstawić $x = t/c$.
4. Po podstawieniu $x = y$ możemy wywnioskować, że jeśli $x \neq 0$, to $f(x) \in \{0, 1\}$. Jeżeli $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \neq 0$, to dla każdego rzeczywistego y mamy $f(y) = 0$; w przeciwnym razie dla każdego $x \neq 0$ zachodzi równość $f(x) = 1$. Są zatem dwie klasy rozwiązań: funkcja $f(x) = 0$ i funkcja $f(x) = 1$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = c$. Wystarczy sprawdzić, że obie spełniają wyjściowe równanie.
5. Biorąc $y = 0$, dostaniemy wzór $f(f(x))$, a więc i $f(f(y))$, który możemy podstawić do wyjściowego równania. Po tym podstawieniu przyjąć $y = -f(x)$.
6. Dla $x = y$ otrzymamy $f(f(x) - x) = 0$, więc 0 należy do przeciwdziedziny funkcji f. Stąd $f(b) = 0$ dla pewnego b i $f(x) - x = b$ z różnowartościowości f.
7. Podstawiając $x = c$, $y = -c$, otrzymamy $f(c) = 0$. Dalej dla $y = c - x$ mamy $f(2x - c) = f(x) - f(x)^2 \leqslant \frac{1}{4}$, z czego wnioskujemy, że $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$ dla wszystkich rzeczywistych x. Indukcyjnie dla $n = 4, 5, 6, \ldots$ dowodzimy, że $f(x) \leqslant \frac{1}{n}$ dla wszystkich rzeczywistych x. Z tego wynika, że funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości niedodatnie. Wstawiając $x = 0$ i $y = -c$ do wyjściowego równania, otrzymamy $c^2 = f(f(-c))$, co daje $c = 0$. Aby dokończyć rozwiązanie, można podstawić $x = y$ i wywnioskować, że $f(x) = 0$.
8. Wstawiając $x = 0$, przekonujemy się, że wykres funkcji f jest środkowosymetryczny względem punktu $(c/2, 0)$, w szczególności $f(c) = -c$. Biorąc $y = -x$, otrzymamy $f(f(x) + x) = -c$. Ponieważ funkcja f jest monotoniczna, przyjmuje ona wartości $-c$ na pewnym (być może nieograniczonym lub zdegenerowanym do punktu) przedziale I, przy czym $c \in I$. Możemy zatem określić funkcję $g(x) = f(x) + x : \mathbb{R} \to I$. Zamieniając wszystkie $f(A)$ na $g(A) - A$ w zadanym równaniu i podstawiając $y = t - x$, dochodzimy do wniosku, że jeśli pewne dwie liczby należą do I, to ich różnica też. Stąd $I = \{0\}$ lub $I = \mathbb{R}$ – w pierwszym przypadku $f(x) = -x$, w drugim $f(x) = 0$.