Dziwny ciąg

Wojciech CZERWIŃSKI

Zapewne większość z nas bawiła się kiedyś w zgadywanie, jaki jest następny wyraz danego ciągu. Zapraszam zatem jeszcze raz do takiej zabawy... Pierwsze wyrazy pewnego ciągu to

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221.$$

Co następuje dalej? Zachęcam do zatrzymania się na chwilę nad tym pytaniem przed przejściem do dalszej części tekstu.

Reguła tworzenia ciągu jest trudna do zgadnięcia, ponieważ jest zupełnie inna niż te, do których jesteśmy przyzwyczajeni. Z drugiej strony jest to reguła niesamowicie prosta, banalna wręcz. Następny wyraz ciągu tworzymy, niejako czytając poprzedni. Pierwszy wyraz ciągu to „jedna jedynka", a więc drugi wyraz to 11. Drugi wyraz ciągu to „dwie jedynki", a więc trzeci wyraz to 21. Trzeci wyraz ciągu to „jedna dwójka, jedna jedynka", więc czwarty wyraz to 1211. Czytając ten wyraz, mamy z kolei: „jedna jedynka, jedna dwójka, dwie jedynki", czyli 111221. Po wyrazie 13112221 następuje zatem 1113213211.

O tym ciągu wspaniale opowiada John Conway, wybitny angielski matematyk i popularyzator matematyki – gorąco zachęcam do obejrzenia krótkiego filmu, w którym przedstawia opisany wyżej ciąg: `www.youtube.com/watch?v=ea7lJkEhytA`. John Conway po tym, gdy jego studenci przedstawili mu powyższą zagadkę, zadał sobie bardziej dogłębne pytania dotyczące naszego ciągu. Naturalnym pytaniem dla ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie (czyli takich, dla których kolejny wyraz zależy od poprzednich) jest, jak szybko rosną wartości kolejnych wyrazów. Przykładowo najbardziej znany ciąg rekurencyjny, czyli ciąg Fibonacciego, zdefiniowany jako

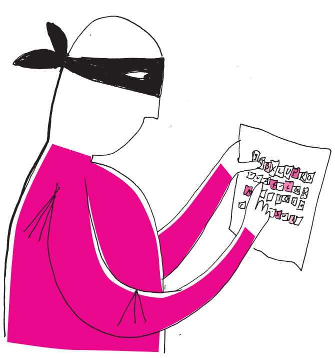
$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

może być, jak wiadomo Wytrawnym Czytelnikom, również zdefiniowany wzorem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^n - \hat{\varphi}^n\big),$$

przy czym $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Jak łatwo zobaczyć, wynika z tego, że dla dużych n ciąg Fibonacciego jest w przybliżeniu ciągiem geometrycznym o ilorazie φ. Liczba φ, zwana również złotym podziałem, jest *liczbą algebraiczną*, to znaczy pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych $x^2 - x - 1$, a inaczej mówiąc, rozwiązaniem równania

$$x^2 - x - 1 = 0.$$



Nietrudno wykazać, że każdy ciąg rekurencyjny zdefiniowany przy użyciu wzoru

$$F_{n+k} = a_{k-1}F_{n+k-1} + \ldots + a_1F_{n+1} + a_0F_n$$

ma podobną własność: dla dużych n iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest w przybliżeniu pewną liczbą r, która jest pierwiastkiem wielomianu

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \ldots - a_1x - a_0.$$

Zauważmy, że wyraz ciągu jest zależny od k poprzednich wartości, i w związku z tym stopień wielomianu jest również równy k. Naturalnie jest więc zapytać, czy podobna zależność ma miejsce dla ciągu opisanego przez Conwaya, w końcu tam następny wyraz zależy tylko od jednego poprzedniego wyrazu. Okazuje się, że owszem, przy czym nie sam ciąg zachowuje się w przybliżeniu geometrycznie, ale liczba cyfr wyrazów ciągu Conwaya rośnie w przybliżeniu geometrycznie. Iloraz liczby cyfr dwóch kolejnych wyrazów ciągu to w przybliżeniu pierwiastek pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, ale taki wielomian o najmniejszym stopniu ma stopień 71, a konkretnie jest następujący:

$$\begin{aligned}
&x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60}\\
&- x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49}\\
&+ 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38}\\
&- 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27}\\
&+ 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15}\\
&+ 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3}\\
&- 6x^{2} + 3x - 6.
\end{aligned}$$

Skąd tak skomplikowana postać dla tak prostej definicji ciągu? Nie wiadomo. Czasem patrząc na takie przykłady, zadaję sobie pytanie: „Czy twierdzenia, które dowodzimy, są nieraz tak proste i eleganckie, bo taki jest świat, czy też są proste dlatego, bo tylko takie my ludzie umiemy udowodnić?".

Wspomnienie o Andrzeju Fryszkowskim

2 listopada 2020 roku odszedł prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, pracownik Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, jeden z założycieli Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej oraz wieloletni członek Zarządu tego Stowarzyszenia. Przez wiele lat działał aktywnie w Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej i Komitecie Głównym Olimpiady Matematycznej Juniorów. Wielokrotnie był opiekunem polskiej reprezentacji na Olimpiadzie Matematycznej Państw Europy Środkowej, a wcześniej na zawodach polsko-austriackich. Straciliśmy dobrego kolegę i przyjaciela.

Finał LII OM w Stalowej Woli i wygrany turniej brydżowy

Pożegnaliśmy świetnego naukowca, ale też człowieka bardzo życzliwego, otwartego, obdarzonego niezwykłym poczuciem humoru, zaangażowanego w popularyzację matematyki i edukację, rewelacyjnego brydżystę.

O dokonaniach naukowych Andrzeja Fryszkowskiego tak pisze Tadeusz Rzeżuchowski, Jego przyjaciel i współpracownik z Wydziału:

„Andrzej miał wiele zainteresowań, którym oddawał się z entuzjazmem, ale Jego prawdziwą pasją była matematyka. W latach siedemdziesiątych XX wieku, kiedy zaczynał pracować, wielkim zainteresowaniem cieszyła się teoria sterowania optymalnego – dość nowa wtedy dziedzina. Jej zagadnienia wiązały się z nowymi problemami teoretycznymi – im właśnie poświęcił większą część swoich badań. Był doktorantem Czesława Olecha, wywodzącego się z krakowskiej szkoły równań różniczkowych Tadeusza Ważewskiego, którego prace były przełomowe w powiązaniu teorii sterowania z własnościami funkcji wielowartościowych (zwanych też multifunkcjami, polami orientorowymi) oraz z inkluzjami różniczkowymi. Funkcje wielowartościowe to odwzorowania, których wartościami są podzbiory jakiejś przestrzeni, a inkluzje różniczkowe od równań różniczkowych różnią się tym, że po prawej stronie jest nie jeden element, ale cały zbiór, który może zależeć od położenia i czasu. Centralnymi zagadnieniami w tamtych czasach było istnienie tak zwanych selekcji multifunkcji, to znaczy zwykłych funkcji, których wartości dla każdego argumentu leżą w zbiorze będącym wartością tej multifunkcji, a dla inkluzji różniczkowych udowodnienie istnienia rozwiązań przy różnych warunkach nakładanych na multifunkcję stojącą po prawej stronie.

Takie problemy pojawiały się już przed wojną w pracach Leszka Zaremby i francuskiego matematyka André Marchauda. Potężny impuls badaniom w tym zakresie dał Tadeusz Ważewski. Osią badań Andrzeja Fryszkowskiego było badanie funkcji wielowartościowych, których wartości nie są zbiorami wypukłymi, a jedynie domkniętymi podzbiorami przestrzeni unormowanej. To czyniło sprawę o wiele trudniejszą, niż gdy zakłada się wypukłość. Na tym polu uzyskał bardzo dobre osiągnięcia, co między innymi zaowocowało współpracą ze świetnymi włoskimi matematykami, jak Arrigo Cellina i Alberto Bressan. Wspólnie uzyskali zwięzłe i eleganckie wyniki podsumowujące i wyjaśniające wiele wcześniejszych publikacji. Jednym z centralnych zagadnień, którym zajmował się również w późniejszych latach, było badanie tak zwanych rozkładalnych