



Dla danej liczby naturalnej n jej tojent $\varphi(n)$ wyraża liczbę liczb naturalnych dodatnich, które są mniejsze od n i są z tą liczbą względnie pierwsze. Na przykład $\varphi(5) = 4$, bo 5 jest względnie pierwsza z 1, 2, 3 i 4. Z kolei $\varphi(6) = 2$, bo 6 jest względnie pierwsza z 1 i 5, ale nie z 2, 3 ani 4.

Jeśli liczba a ma wspólny dzielnik z n , to jest on także dzielnikiem każdej liczby, która daje resztę a przy dzieleniu przez n . Istotnie, oznaczając ten wspólny dzielnik jako x i pisząc $a = xa'$, $n = xn'$, mamy $kn + a = kxn' + xa' = x(kn' + a')$. Oznacza to, że reszta z dzielenia przez n liczby względnie pierwszej z n jest też względnie pierwsza z n . Takich reszt jest, z definicji, $\varphi(n)$.

Zastosujmy ten fakt. Weźmy, jak zwykle, liczbę d , która jest względnie pierwsza z 10. Jest też ona względnie pierwsza z każdą potęgą liczby 10. Wobec tego każda liczba postaci $100\dots 0$ daje jedną spośród $\varphi(d)$ reszt z dzielenia przez d . Zatem któreś dwie z $\varphi(d) + 1$ liczb $1, 10, 100, \dots, 10\dots 0$ dają jednakową resztę z dzielenia przez d . Wobec tego d jest dzielnikiem ich różnicy, $99\dots 900\dots 0$, która ma co najwyżej $\varphi(d)$ cyfr, a więc co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek. Korzystając ze względnej pierwszości d i 10, stwierdzamy, że sam początek tej liczby, $99\dots 9$, złożony z co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek, jest podzielny przez d . Stąd minimalne t jest nie większe niż $\varphi(d)$.

Jest to pewna poprawa, bo $\varphi(d)$ to zazwyczaj liczba istotnie mniejsza niż d .

Wspomnijmy tu jeszcze słynne twierdzenie Eulera, mówiące, że jeśli liczby a i n są względnie pierwsze, to n jest dzielnikiem liczby $a^{\varphi(n)} - 1$. W szczególności biorąc $a = 10$, $n = d$, stwierdzamy, że można wybrać $t = \varphi(d)$. Da się też stąd wywnioskować, że minimalne t jest nawet dzielnikiem $\varphi(d)$.

Zadania (wskazówki do zadań można znaleźć na stronie 9)

1. Wykaż, że jeśli liczba $333\dots 333$, złożona z n trójek, jest podzielna przez 99, to n jest podzielne przez 6.
2. Uzasadnij, że dana liczba dzieli się przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica jej 3-początku i 3-końca dzieli się przez 7.
3. Uzasadnij, że jeśli zapis dziesiętny liczby podzielnej przez 9 składa się z samych dwójek, to liczba ta jest podzielna przez 37. Wskaż liczbę, której zapis dziesiętny składa się z samych dwójek i która dzieli się przez 37, ale nie przez 9.

Czytelnik Ciekawski dowie się, że minimalne t jest również dzielnikiem $\lambda(d)$, gdzie λ oznacza tzw. funkcję Carmichaela. Trudno natomiast, w ogólności, przewidzieć jego dokładną wartość.

Skąd wiadomo, ile gwiazd rodzi się w galaktyce?

Miguel FIGUEIRA

Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Masa Słońca to $1,989 \times 10^{30}$ kg.

O masywnych gwiazdach mówimy, gdy ich masa przekracza $8M_{\odot}$. Więcej na temat ewolucji masywnych gwiazd można przeczytać w artykule „Gwiazdne przedszkola – Obszary HII w galaktyce” (Δ_{20}^4).

Widmo ciała doskonale czarnego jest opisywane przez prawo Plancka. Relację między długością fali o maksymalnej mocy promieniowania a temperaturą ciała doskonale czarnego opisuje prawo Wiena.

Tworzenie i umieranie gwiazd odgrywa fundamentalną rolę w ewolucji galaktyk, dlatego też astrofizycy szukają najlepszych sposobów, aby precyzyjnie oszacować liczbę gwiazd tworzonych w danej galaktyce w określonym czasie. Ten parametr fizyczny nazywamy *tempem powstawania gwiazd* (*star formation rate*, SFR). Wyznaczoną wartość SFR wyrażamy w jednostkach mas Słońca tworzonych w ciągu jednego roku ($M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$). Ale w jaki sposób my, na naszej malutkiej planecie, możemy obliczyć tę wielkość, skoro interesujące nas galaktyki znajdują się miliony lat świetlnych od nas?

Gwiazdy mają różne masy początkowe – od 0,08 do kilkuset mas Słońca – a im masywniejsza gwiazda, tym szybciej przebiega jej ewolucja. Masywne gwiazdy są tak energetyczne, że ich światło jest mocniejsze od światła wszystkich innych gwiazd w danej galaktyce. Pomiar strumienia emitowanego światła mówi nam o liczbie takich masywnych gwiazd, a z pomocą kilku teoretycznych modeli astrofizycy są w stanie obliczyć, ile takich gwiazd średnio powstaje w galaktyce w ciągu roku.

Ale w jakim zakresie energetycznym emitowane jest światło masywnych gwiazd? Teoretycznie, promieniowanie pochodzące z gwiazd można opisać jako promieniowanie ciała doskonale czarnego – długość emitowanej fali światła jest dyktowana tylko przez temperaturę emitującego je obiektu. Masywne gwiazdy mają temperaturę około $\sim 30\,000$ K, toteż promieniują głównie w zakresie ultrafioletowym (UV, zakres długości fali od 10 nm do 400 nm).

Szerzej o blokowaniu promieniowania UV przez pył pisaliśmy w numerze Δ_{20}^6 – „O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk”.

O interakcjach promieniowania UV z materią w galaktykach pisaliśmy w numerach Δ_{20}^4 oraz Δ_{21}^2 .

Fotony z serii Lymana (LyC) mają energie nie większe niż 13,6 eV.

H α to linia emisyjna wodoru od stanu $n = 3$ do stanu $n = 2$, której towarzyszy emisja światła o długości fali 656 nm.

Obserwowana długość fali (λ^{obs}) zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$\frac{\lambda^{\text{obs}}}{\lambda^{\text{emi}}} = 1 + z,$$

przy czym λ^{emi} to wyemitowana długość fali, a z to przesunięcie ku czerwieni (*redshift*, Δ_{19}^4).

Promieniowanie kosmiczne to naładowane cząstki, których prędkość jest bliska prędkości światła.

O zasadzie działania interferometrów radiowych pisaliśmy w Δ_{21}^8 .

Problem wydaje się więc rozwiązany. Obserwacja światła UV galaktyki powinna wystarczyć do obliczenia SFR. Na naszej drodze stoją jednak dwie przeszkody. Po pierwsze atmosfera Ziemi blokuje promieniowanie UV, więc nie może ono dotrzeć do teleskopów naziemnych. Jedynym rozwiązaniem jest wykorzystanie teleskopów kosmicznych. Po drugie tylko niewielka ilość promieniowania UV jest w ogóle w stanie dotrzeć do naszej planety – pył galaktyki blokuje promieniowanie UV przed ucieczką i podróżą po Wszechświecie. To, co udaje się nam zaobserwować, to tylko część światła faktycznie wypromieniowanego przez gwiazdy. Żeby otrzymać prawdziwą wartość strumienia światła, musimy stosować pewne założenia i dodatkowe poprawki, co z kolei zwiększa niepewność pomiaru SFR.

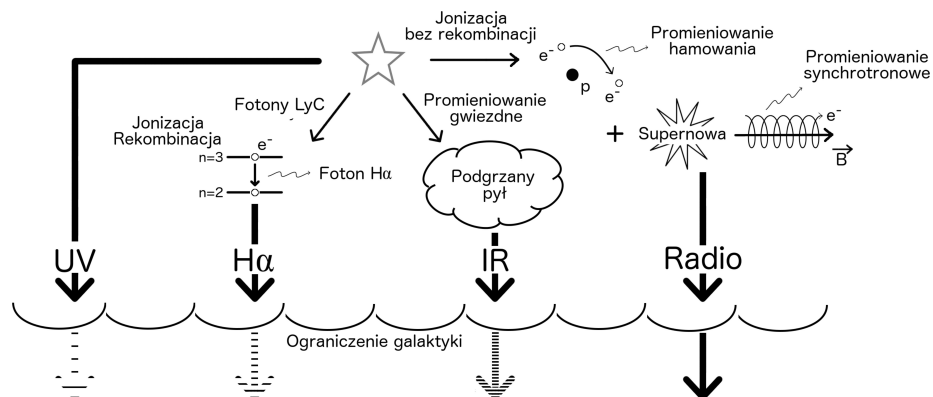
Czy istnieje więc inny sposób obliczenia liczby masywnych gwiazd? Zamiast bezpośredniego wykorzystania promieniowania UV możemy obserwować efekty interakcji gwiazd z materią galaktyki. Fotony kontinuum Lymana pochodzące z masywnych gwiazd jonizują otaczające je atomy wodoru i wybijają ich elektrony. Zdarza się również odwrotne zjawisko, podczas którego elektron rekombinuje z protonem, emitując fotony H α o długości fali charakterystycznej dla masywnych gwiazd. W przeciwieństwie do strumienia UV znaczna część tej emisji może uciekać z galaktyki. Fotony o tej konkretnej długości fali są nieliczne. Oznacza to, że obserwacja linii emisyjnej H α dla galaktyk jest czasochłonna i stosunkowo trudna. Istnieje również inny problem. Długość fali fotonu, który podróżuje w przestrzeni, zwiększa się w wyniku ekspansji Wszechświata i wzrost ten jest proporcjonalny do długości podróży (odległości od galaktyki). W rezultacie długość fali fotonów pochodzących z bardzo odległych galaktyk może osiągnąć wartości blokowane przez atmosferę Ziemi. Jako alternatywę astrofizycy wykorzystują fotony będące wynikiem jonizacji tlenu. Mogą one pokonać większą odległość, zanim zostaną zablokowane przez atmosferę. Niestety, ta metoda zależy od jednej z właściwości galaktyki – zawartości pierwiastków cięższych od helu, której obliczenie stawia nie lada wyzwanie.

Pył, który jest głównym składnikiem galaktyk, też może być używany do obliczenia liczby masywnych gwiazd – ich promieniowanie jest absorbowane przez chmury pyłu znajdujące się w pobliżu narodzin gwiazd. Absorbując promieniowanie, pył podgrzewa się i w konsekwencji emituje światło w zakresie podczerwonym (IR). Światło o tej długości fali nie może być obserwowane na Ziemi (jedynie przez teleskopy kosmiczne, podobnie jak promieniowanie w zakresie UV), lecz jego istotną zaletą jest, że prawie w całości ucieka z obserwowanej galaktyki. Problemem jest jednak to, że populacja innych typów gwiazd również podgrzewa pył, i nie jesteśmy w stanie rozróżnić, czy obserwowane promieniowanie podczerwone jest spowodowane tylko przez młode masywne gwiazdy.

Ostatnia z popularnych metod szacowania SFR opiera się na obserwacjach radiowych i wykorzystuje dwa zjawiska, które produkują ten sam typ fotonów. Pierwsze zjawisko jest związane z wybuchami supernowych – mogą one tworzyć promieniowanie kosmiczne. Cząstki tego promieniowania (w szczególności elektrony) poruszają się w polu magnetycznym supernowej i ich spiralny ruch w polu magnetycznym powoduje emisję promieniowania synchrotronowego w zakresie fal radiowych. Z uwagi na fakt, że supernowa to implozja masywnej gwiazdy, moc takiego promieniowania synchrotronowego daje nam szacunkową liczbę masywnych gwiazd (zobacz więcej w Δ_{20}^4). Drugie zjawisko pochodzi od elektronów i protonów materii znajdującej się w pobliżu masywnych gwiazd. Trajektoria elektronu, który przechodzi obok protonu, zmienia się nieznacznie z powodu przyciągania. Jeśli nie wystąpi rekombinacja, to elektron tylko hamuje, a strata energii kinetycznej obserwowana jest jako emisja fotonów w zakresie radiowym. Zjawisko to nosi nazwę *promieniowania hamowania* – wyemitowane w ten sposób fotony mogą uciekać z galaktyki i przechodzić przez atmosferę. Ponieważ rozdzielczość kątowa obserwacji jest proporcjonalna do długości fali, obserwacje tego promieniowania wymagają używania interferometrów radiowych.

Galaktyki eliptyczne są stare i tworzą bardzo mało gwiazd ($\sim 0,01 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$), natomiast galaktyki spiralne są młode i tworzą kilkanaście albo kilkaset gwiazd w ciągu roku. Istnieją również galaktyki, które tworzą ich aż kilka tysięcy. Dla porównania, SFR Drogi Mlecznej jest oszacowany między 1 a $10 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

Wszystkie cztery główne metody wyznaczania parametru SFR, opisane w tym artykule, przedstawione są na rysunku. Każda z nich ma oczywiście swoje wady i zalety, ale dają nam one możliwość oszacowania liczby gwiazd tworzonych w galaktykach różnego typu. Dlaczego takie pomiary są ważne? Wartość SFR zależy od typu galaktyki. Jego pomiar pozwala określić, z jaką galaktyką mamy do czynienia oraz jak przebiegała jej ewolucja.



Cztery najbardziej popularne metody pozwalające na oszacowanie parametru SFR. 1) Bezpośrednio z wykorzystaniem promieniowania UV pochodzącego z młodych, masywnych gwiazd. 2) Za pomocą pomiarów linii $H\alpha$ pochodzącej od rekombinacji wodoru. 3) Za pomocą tzw. ukrytego wskaźnika emisji SFR, czyli emisji podgrzanego pyłu w zakresie podczerwonym. 4) Przy wykorzystaniu detekcji promieniowania synchrotronowego emitowanego przez ruch elektronów w polu magnetycznym gwiazdy i promieniowania hamowania od straty energii kinetycznej elektronu. Widzialność strzałki przedstawia ilość strumienia promieniowania, który ucieka z galaktyki (im bardziej przezroczysta strzałka, tym większe straty promieniowania)



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1690. Na płaszczyźnie dane jest $3n$ punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych. Dowieść, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.

Rozwiązanie na str. 12

M 1691. Niech a, b, c będą długościami boków ostrokątnego trójkąta ABC . Załóżmy, że następujący układ równań

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + zx + x^2 = c^2 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych dodatnich.

Wyznacz $xy + yz + zx$.

Rozwiązanie na str. 12

M 1692. Niech a, b, c będą takimi różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, że liczby

$$\frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}, \frac{1+ab}{a-b}$$

są całkowite. Udowodnij, że

$$\text{NWD} \left(\frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}, \frac{1+ab}{a-b} \right) = 1.$$

Rozwiązanie na str. 12



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1035. Podczas wyładowania atmosferycznego chmura–ziemia podstawa chmury burzowej (*cumulonimbus*) znajduje się na wysokości $h \approx 1$ km nad powierzchnią ziemi, a typowa średnica takiej chmury $D \approx 20$ km. Napięcie przebicia powietrza zależy od ciśnienia i wilgotności, istotną rolę odgrywa też promieniowanie jonizujące (np. promieniowanie kosmiczne). W warunkach towarzyszących burzy przebicie w postaci błyskawicy odpowiada polu elektrycznemu $E \approx 1 \cdot 10^5$ V/m. Oszacuj różnicę potencjału U między podstawą chmury i powierzchnią ziemi, ładunek elektryczny Q oraz energię W zgromadzoną w układzie chmura–ziemia. Przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Rozwiązanie na str. 11

F 1036. Szkielety ssaków, niezależnie od ich rozmiarów, są bardzo podobne – mają taką samą liczbę kości podobnie ze sobą połączonych. Materiał kości wytrzymuje nacisk $p \approx 170$ MPa. Jak grubość d kości kończyn roślaby z masą ssaka m , gdyby podczas ewolucji czynnikiem decydującym o wielkości ssaka był ciężar, jaki jest w stanie unieść jego szkielet? Rozwiązanie na str. 11