Blokowe cechy podzielności

Paweł Rafał BIELIŃSKI
Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Szeroko znana jest cecha podzielności przez 3 i przez 9. Mianowicie: liczba n dzieli się przez 3 (lub 9) wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3 (odpowiednio 9). Można tę myśl wyrazić w sposób nieco bardziej skomplikowany, za to lepiej poddający się uogólnieniu: daną liczbę dzielimy, zaczynając od końca, na bloki jednocyfrowe, a następnie dodajemy bloki. Otrzymana liczba dzieli się przez 3 lub 9 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wyjściowa ma tę własność. Na przykład 145321 podzielimy na bloki 1, 4, 5, 3, 2, 1, których sumą jest $1 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 = 16$.

Nieco rzadziej mówi się o podobnej cesze podzielności przez 11. Jedyną różnicą jest to, że bloki podziału mają po dwie cyfry. Na przykład liczbę 7345891 podzielimy na bloki 7, 34, 58, 91 o sumie $7 + 34 + 58 + 91 = 190$. Weźmy bloki po 3 cyfry, a otrzymamy cechę podzielności przez 37.

Jak to działa?

Wprowadźmy odrobinę pożytecznej nomenklatury. Dla danej liczby liczbę utworzoną z jej k końcowych cyfr nazwiemy jej k-końcem, a utworzoną z pozostałych cyfr – k-początkiem. Zatem 1-koniec liczby 56743287 to 7, a jej 3-początek to 56743.

Zacznijmy od uzasadnienia cechy podzielności przez 3. Zauważmy, że 3 jest dzielnikiem liczby 9, zatem liczba $10a + b$ daje tę samą resztę z dzielenia przez 3 co liczba mniejsza od niej o $9a$, czyli liczba $a + b$. To oznacza, że liczba naturalna, np. 32467, daje przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę co suma jej 1-początku i 1-końca, $3246 + 7$. Ale w ten sam sposób możemy stwierdzić, że i jej 1-początek 3246 daje tę samą resztę co suma jego 1-początku i 1-końca, czyli $324 + 6$. Wobec tego reszta z dzielenia wyjściowej liczby 32467 jest taka sama jak liczby $324 + 6 + 7$. Powtarzając rozumowanie jeszcze kilkukrotnie, stwierdzamy, że taką samą resztę daje też po prostu suma cyfr liczby wyjściowej.

Dla cechy podzielności przez 11 zauważmy, że liczba ta jest dzielnikiem liczby 99. Wobec tego reszta z dzielenia liczby $100a + b$ przez 11 jest taka sama jak liczby $100a + b - 99a = a + b$. Zatem każda liczba naturalna przy dzieleniu przez 11 daje tę samą resztę co suma jej 2-początku i 2-końca. Znowu, interesująca nas cecha wynika z kilkukrotnego zastosowania tej obserwacji.

Wreszcie cecha podzielności przez 37 bierze się stąd, że 999 jest wielokrotnością tej liczby. Zatem $1000a + b$ daje tę samą resztę co $1000a + b - 999a = a + b$, a jest to suma 3-początku i 3-końca liczby $1000a + b$. Jest to też prawdą dla każdego innego dzielnika liczby 999, w szczególności dla liczby 27.

A jaką cechę podzielności uzyskamy dla d będącego dzielnikiem liczby $99\ldots900\ldots0$?

Te rozważania możemy podsumować i uogólnić w postaci następującego stwierdzenia: jeśli liczba d jest dzielnikiem liczby $999\ldots9$, składającej się z t dziewiątek, to reszta z dzielenia liczby n przez d jest zawsze taka sama jak dla sumy t-początku i t-końca tej liczby.

Czytelnik Uogólniający zauważy, że analogiczne rozważania pozostają słuszne w każdym systemie pozycyjnym.

Celem 2-końca niniejszego artykułu jest pokazanie, że dla każdej liczby d względnie pierwszej z 10 można stworzyć cechę podzielności tego szczególnego, blokowego typu. Innymi słowy, musimy wykazać, że wśród wielokrotności takiej liczby d zawsze znajdziemy liczbę, której zapis dziesiętny składa się z samych dziewiątek. Proponujemy dwie metody dojścia do tego wniosku.

Zasada szufladkowa

Pierwszy sposób opiera się na szczególnym przypadku słynnej zasady szufladkowej, o której można przeczytać w Δ^{12}_{16}, Δ^{8}_{04} i Δ^{9}_{18}. Ustalmy liczbę d względnie pierwszą z 10. Rozważamy listę wszystkich liczb, których zapis dziesiętny składa się z samych dziewiątek: 9, 99, 999, 9999, … Jest ich nieskończenie wiele, więc pewne dwie z nich muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez d. Wobec tego ich różnica, równa $999\ldots9 - 999\ldots9 = 99\ldots900\ldots0$, dzieli się przez d. Ale $99\ldots900\ldots0 = 99\ldots9 \cdot 100\ldots0$. Teraz skorzystamy z założenia, że d nie ma wspólnych dzielników z liczbą 10, a więc nie ma ich też z jej potęgą, $100\ldots0$. Zatem d jest dzielnikiem liczby $99\ldots9$, co kończy uzasadnienie.

Czytelnik Poprawiający dostrzeże, że przedstawioną obok argumentację można ulepszyć: potęgi liczby 10 nie mogą być podzielne przez d, więc można wykluczyć resztę d i uzyskać $t \leqslant d - 1$.

Zauważmy jeszcze, że powtórzenie reszty z dzielenia przez d musi się zdarzyć już wśród $d + 1$ pierwszych liczb na liście 9, 99, 999, …, ponieważ możliwych reszt jest $d < d + 1$. W takim razie wskazana powyżej liczba $99\ldots900\ldots0$ ma co najwyżej d dziewiątek. Widzimy więc, że poszukiwane t nie tylko istnieje, ale też że minimalne t jest nie większe niż sama liczba d. W kolejnej części, stosując bardziej zaawansowane metody, znajdziemy dokładniejsze oszacowanie.

Dalsza eliminacja

Więcej o funkcji Eulera można przeczytać np. w artykule Witolda Bednarka (Δ^{10}_{19}).

Wprowadźmy na scenę jednego z największych celebrytów klasycznej teorii liczb. Mowa tu o tzw. tocjencie, znanym też jako funkcja Eulera i oznaczanym φ.

Dla danej liczby naturalnej n jej tocjent $\varphi(n)$ wyraża liczbę liczb naturalnych dodatnich, które są mniejsze od n i są z tą liczbą względnie pierwsze. Na przykład $\varphi(5) = 4$, bo 5 jest względnie pierwsza z $1, 2, 3$ i 4. Z kolei $\varphi(6) = 2$, bo 6 jest względnie pierwsza z 1 i 5, ale nie z 2, 3 ani 4.

Jeśli liczba a ma wspólny dzielnik z n, to jest on także dzielnikiem każdej liczby, która daje resztę a przy dzieleniu przez n. Istotnie, oznaczając ten wspólny dzielnik jako x i pisząc $a = xa'$, $n = xn'$, mamy $kn + a = kxn' + xa' = x(kn' + a')$. Oznacza to, że reszta z dzielenia przez n liczby względnie pierwszej z n jest też względnie pierwsza z n. Takich reszt jest, z definicji, $\varphi(n)$.

Zastosujmy ten fakt. Weźmy, jak zwykle, liczbę d, która jest względnie pierwsza z 10. Jest też ona względnie pierwsza z każdą potęgą liczby 10. Wobec tego każda liczba postaci $100\ldots0$ daje jedną spośród $\varphi(d)$ reszt z dzielenia przez d. Zatem któreś dwie z $\varphi(d) + 1$ liczb 1, 10, 100, …, $10\ldots0$ dają jednakową resztę z dzielenia przez d. Wobec tego d jest dzielnikiem ich różnicy, $99\ldots900\ldots0$, która ma co najwyżej $\varphi(d)$ cyfr, a więc co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek. Korzystając ze względnej pierwszości d i 10, stwierdzamy, że sam początek tej liczby, $99\ldots9$, złożony z co najwyżej $\varphi(d)$ dziewiątek, jest podzielny przez d. Stąd minimalne t jest nie większe niż $\varphi(d)$.

Jest to pewna poprawa, bo $\varphi(d)$ to zazwyczaj liczba istotnie mniejsza niż d.

Czytelnik Ciekawski dowie się, że minimalne t jest również dzielnikiem $\lambda(d)$, gdzie λ oznacza tzw. funkcję Carmichaela. Trudno natomiast, w ogólności, przewidzieć jego dokładną wartość.

Wspomnijmy tu jeszcze słynne twierdzenie Eulera, mówiące, że jeśli liczby a i n są względnie pierwsze, to n jest dzielnikiem liczby $a^{\varphi(n)} - 1$. W szczególności biorąc $a = 10$, $n = d$, stwierdzamy, że można wybrać $t = \varphi(d)$. Da się też stąd wywnioskować, że minimalne t jest nawet dzielnikiem $\varphi(d)$.

Zadania (wskazówki do zadań można znaleźć na stronie 9)

1. Wykaż, że jeśli liczba $333\ldots333$, złożona z n trójek, jest podzielna przez 99, to n jest podzielne przez 6.
2. Uzasadnij, że dana liczba dzieli się przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica jej 3-początku i 3-końca dzieli się przez 7.
3. Uzasadnij, że jeśli zapis dziesiętny liczby podzielnej przez 9 składa się z samych dwójek, to liczba ta jest podzielna przez 37. Wskaż liczbę, której zapis dziesiętny składa się z samych dwójek i która dzieli się przez 37, ale nie przez 9.

Skąd wiadomo, ile gwiazd rodzi się w galaktyce?

Miguel FIGUEIRA

Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Masa Słońca to $1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

Tworzenie i umieranie gwiazd odgrywa fundamentalną rolę w ewolucji galaktyk, dlatego też astrofizycy szukają najlepszych sposobów, aby precyzyjnie oszacować liczbę gwiazd tworzonych w danej galaktyce w określonym czasie. Ten parametr fizyczny nazywamy *tempem powstawania gwiazd* (*star formation rate,* SFR). Wyznaczoną wartość SFR wyrażamy w jednostkach mas Słońca tworzonych w ciągu jednego roku ($M_\odot$ yr^{-1}). Ale w jaki sposób my, na naszej malutkiej planecie, możemy obliczyć tę wielkość, skoro interesujące nas galaktyki znajdują się miliony lat świetlnych od nas?

O masywnych gwiazdach mówimy, gdy ich masa przekracza $8M_\odot$. Więcej na temat ewolucji masywnych gwiazd można przeczytać w artykule „Gwiezdne przedszkola – Obszary HII w galaktyce” (Δ^4_{20}).

Gwiazdy mają różne masy początkowe – od 0,08 do kilkuset mas Słońca – a im masywniejsza gwiazda, tym szybciej przebiega jej ewolucja. Masywne gwiazdy są tak energetyczne, że ich światło jest mocniejsze od światła wszystkich innych gwiazd w danej galaktyce. Pomiar strumienia emitowanego światła mówi nam o liczbie takich masywnych gwiazd, a z pomocą kilku teoretycznych modeli astrofizycy są w stanie obliczyć, ile takich gwiazd średnio powstaje w galaktyce w ciągu roku.

Widmo ciała doskonale czarnego jest opisywane przez prawo Plancka. Relację między długością fali o maksymalnej mocy promieniowania a temperaturą ciała doskonale czarnego opisuje prawo Wiena.

Ale w jakim zakresie energetycznym emitowane jest światło masywnych gwiazd? Teoretycznie, promieniowanie pochodzące z gwiazd można opisać jako promieniowanie ciała doskonale czarnego – długość emitowanej fali światła jest dyktowana tylko przez temperaturę emitującego je obiektu. Masywne gwiazdy mają temperaturę około $\sim$30 000 K, toteż promieniują głównie w zakresie ultrafioletowym (UV, zakres długości fali od 10 nm do 400 nm).