Symetria osiowa

Bartłomiej BZDĘGA

Czym jest symetria osiowa, żadnemu Czytelnikowi *Delty* tłumaczyć nie trzeba. Ograniczę się zatem do opisania kilku pojawiających się w zadaniach olimpijskich motywów związanych z tym rodzajem symetrii.

Motyw I: najkrótsza droga. Oto klasyczny przykład. Mamy dane punkty A i B oraz prostą ℓ. Trzeba wyznaczyć taki punkt $X \in \ell$, by wartość wyrażenia $|AX| + |BX|$ była możliwie najmniejsza. Jest to bardzo łatwe, gdy punkty A i B leżą po różnych stronach prostej ℓ – wtedy X jest punktem przecięcia odcinka AB i prostej ℓ oraz $|AX| + |BX| = |AB|$. Jeśli tak nie jest, to niech B' będzie punktem symetrycznym do B względem prostej ℓ. Szukany punkt X jest punktem wspólnym odcinka AB' i prostej ℓ, bo $|AX| + |BX| = |AX| + |B'X| = |AB'|$.

Motyw II: odbicia względem osi symetrii. Jest jasne, że jeśli punkt X należy do pewnej figury $\mathcal{F}$, która ma oś symetrii ℓ, to punkt symetryczny do X względem prostej ℓ też należy do figury $\mathcal{F}$. Podam tu dwa typowe przykłady. Jeśli punkt X leży na ramieniu kąta o wierzchołku S, to punkt X', symetryczny do X względem dwusiecznej tego kąta, leży na jego drugim ramieniu, a ponadto $|XS| = |X'S|$. I drugi przykład – jeśli punkt X leży na okręgu o średnicy AB, to punkt X', symetryczny do X względem prostej AB, też leży na tym okręgu, a ponadto $|AX| = |AX'|$ i $|BX| = |BX'|$.

Motyw III: odbicia względem ramion kąta. Mamy dany kąt ASB oraz punkty X i Y, przy czym półproste SY, SB, SA, SX leżą w tej kolejności wokół punktu S. Niech $\varphi = |\sphericalangle ASB|$, $\alpha = |\sphericalangle XAS|$, $\beta = |\sphericalangle YBS|$. Punkty X i Y odbijamy odpowiednio względem prostych AS i BS, otrzymując X' i Y'. Wówczas $|\sphericalangle X'SY'| = |\varphi - \alpha - \beta|$; w szczególności jeśli punkt S leży na odcinku XY, to $|\sphericalangle X'SY'| = |\pi - 2\varphi|$, a jeśli $\varphi = \alpha + \beta$, to punkty S, X', Y' są współliniowe.

Motyw IV: koincydencja. Gdy uda się znaleźć w danej konfiguracji geometrycznej takie proste ℓ_1, ℓ_2 i punkty X_1, X_2, X', że punkt X' jest jednocześnie symetryczny do X_1 względem prostej ℓ_1 i symetryczny do X_2 względem prostej ℓ_2, to mamy „punkt zaczepienia", który być może ułatwi rozwiązanie zadania.

Zadania

1. Wewnątrz kąta ostrego znajduje się punkt M. Wyznaczyć takie punkty K i L, leżące po jednym na ramionach tego kąta, żeby trójkąt KLM miał możliwie najmniejszy obwód.
2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełniony jest warunek $|AB| = |BC| + |DA|$. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $|CP| = |DP|$.
3. Trójkąt ABC ma kąt prosty przy wierzchołku C, a wysokość poprowadzona z tego wierzchołka ma długość h. Punkty P i S leżą na odcinku AB, a punkty Q i R odpowiednio na odcinkach BC i CA. Udowodnić, że $|PQ| + |QR| + |RS| \geqslant 2h$.
4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt M jest środkiem odcinka BC oraz $|\sphericalangle AMD| = 120^\circ$. Udowodnić, że $|AB| + \frac{1}{2}|BC| + |CD| \geqslant |AD|$.
5. Na średnicy AB pewnego okręgu wybrano dowolnie punkt M, następnie narysowano cięciwę CD, która przechodzi przez punkt M i przecina odcinek AB pod kątem 45°. Udowodnić, że wartość wyrażenia $|CM|^2 + |DM|^2$ nie zależy od wyboru punktu M.
6. Dany jest trójkąt ABC. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Mając dane $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, wyznaczyć $|MP|$.
7. Na odcinkach AD i DC czworokąta $ABCD$ leżą punkty odpowiednio P i Q, przy czym spełnione są równości $|CQ| = |AB|$ i $|AP| = |BC|$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ. Dowieść, że jeśli $|\sphericalangle AMC| = 90^\circ$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
8. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ nie są prostopadłe. Punkty A' i C' są rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i C na prostą BD, a punkty B' i D' – punktów B i D na prostą AC. Wykazać, że czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne.
9. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym $|\sphericalangle EAF| = 45^\circ$ oraz $|BE| = |DF|$. Wykazać, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF.

Wskazówki do zadań

1. Szukane punkty K i L są przecięciami odcinka $M_1'M_2'$ z ramionami danego kąta, przy czym M_1' i M_2' to punkty symetryczne do M względem jego ramion.
2. Punkt S symetryczny do C względem dwusiecznej $\sphericalangle ABC$ jest również symetryczny do D względem dwusiecznej $\sphericalangle DAB$. Proste AP i BP są symetralnymi odcinków odpowiednio DS i CS.
3. Niech punkty primowane oznaczają punkty symetryczne do danych względem prostej BC, a bisowane – symetryczne do primowanych względem prostej AC. Wówczas $|PQ| + |QR| + |RS| = |PQ| + |QR'| + |R'S''|$. Ponadto proste AB i $A'B''$ są równoległe, a odległość między nimi wynosi $2h$.
4. Niech B' i C' będą symetryczne do B i C względem prostych odpowiednio AM i DM. Trójkąt $B'C'M$ jest równoboczny.
5. Niech C' będzie punktem symetrycznym do C względem prostej AB. Wtedy $|CM|^2 + |DM|^2 = |C'D|^2$, ponadto $|\sphericalangle C'CD| = 45^\circ$.
6. Przez B' oznaczmy punkt symetryczny do B względem dwusiecznej $\sphericalangle ACB$. Wtedy $|MP| = \frac{1}{2}|AB'|$.
7. Punkt S, symetryczny do P względem prostej AM, jest jednocześnie symetryczny do Q względem CM. Czworokąt $ABCS$ jest równoległobokiem.
8. Niech P będzie punktem przecięcia się odcinków AC i BD oraz $\varphi = |\sphericalangle APB|$. Przez A'', B'', C'', D'' oznaczmy punkty symetryczne do odpowiednio A', B', C', D' względem dwusiecznej kąta APB. Wówczas czworokąt $A''B''C''D''$ jest jednokładny do czworokąta $ABCD$ względem punktu P w stosunku $\cos\varphi$.
9. Niech B' i D' będą punktami symetrycznymi do B i D względem prostych odpowiednio AE i AF. Odcinki $B'E$ i $D'F$ rozpinają (być może zdegenerowany) równoległobok.