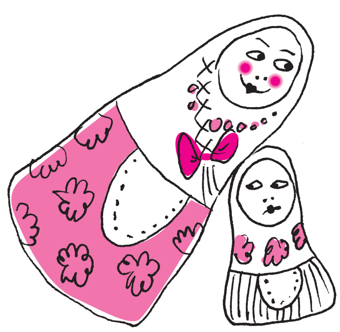
Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 817 ($WT = 2{,}06$) i 818 ($WT = 2{,}23$) z numeru 3/2021

Paweł Burdzy	Warszawa	45,41
Jakub Węgrecki	Kraków	45,17
Michał Adamaszek	Kopenhaga	44,74
Mikołaj Pater	Opole	42,27
Piotr Kumor	Olsztyn	38,33
Łukasz Merta	Kraków	34,61
Witold Bednarek	Łódź	34,60
Błażej Żmija	Kraków	33,78
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74

Wreszcie – po blisko roku czekania – nowe nazwiska w matematycznym Klubie 44 – i to od razu dwa: panowie Paweł Burdzy i Jakub Węgrecki. Witamy! Dla kontrastu, pan Michał Adamaszek mija metę już szósty raz!



Zadania z matematyki nr 827, 828

Redaguje Marcin E. KUCZMA

827. Niech T_m oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z m trójek (np. $T_4 = 3333$). Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne m, n, że suma cyfr liczby nT_m jest mniejsza niż $3m$.

828. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor cx_i \rfloor \geqslant (c-1)\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor + \left\lfloor \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor.$$

Zadanie 828 zaproponował pan Mikołaj Pater z Opola jako uogólnienie znanej nierówności $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor$.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2021

Przypominamy treść zadań:

823. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z, spełniające układ równań

$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = -\sin(x+y+z).$$

824. Niech $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych ($p_1 = 2$). Dla $n \geqslant 1$ niech q_n oznacza liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od n (w zwykle używanej notacji: $q_n = \pi(n-1)$), i niech $a_n = n + p_n$, $b_n = n + q_n$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem dokładnie jednego z ciągów (a_n), (b_n).

823. Oznaczmy $x + y + z = s$. Gdy podany układ równań jest spełniony, każde z wyrażeń $X = \sin x + 2\sin s$, $Y = \sin y + 3\sin s$, $Z = \sin z + 4\sin s$ ma wartość 0. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &= X + Y - Z = (\sin x + \sin y) + (\sin s - \sin z) = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{s-z}{2}\cos\frac{s+z}{2} = \qquad \begin{bmatrix} s-z= \\ =x+y \end{bmatrix} \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}. \end{aligned}$$

Stąd alternatywa: liczba $x+y$ jest parzystą wielokrotnością π lub jedna z liczb $x+z$, $y+z$ jest nieparzystą wielokrotnością π. Wówczas, odpowiednio, $\sin s$ równa się $\sin z$ lub $-\sin y$ lub $-\sin x$. W każdym przypadku układ równań $X = Y = Z = 0$ wymusza równość $\sin s = \sin z = \sin y = \sin x = 0$. To znaczy, że każda z liczb x, y, z jest wielokrotnością liczby π. Na odwrót, gdy tak jest, zadany układ równań jest spełniony.

824. Dla kilku najmniejszych liczb naturalnych zgadza się: $1 = b_1$, $2 = b_2$, $3 = a_1$, $4 = b_3$. Weźmy teraz liczbę naturalną $m > 3$ i przypuśćmy, że nie jest ona wyrazem ciągu (a_n). Istnieje więc numer $k \geqslant 1$, dla którego $a_k < m < a_{k+1}$. Pokażemy, że

$$(*) \qquad \text{jeśli} \quad a_k < m < a_{k+1}, \quad \text{to} \quad b_{m-k} = m.$$

Zgodnie z określeniem ciągu (a_n) mamy $k + p_k < m < (k+1) + p_{k+1}$, czyli $p_k < m - k \leqslant p_{k+1}$. Jest więc k liczb pierwszych, mniejszych od $m-k$, co oznacza, że $q_{m-k} = k$. Stąd $b_{m-k} = (m-k) + q_{m-k} = m$; implikacja $(*)$ została wykazana. Dowodzi ona, że każda liczba naturalna, nieobecna w ciągu (a_n), znajduje się w ciągu (b_n).

Pozostaje wykazać, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie występuje w ciągu (b_n). Dla $a_1 = 3$ tak jest. Ustalmy $r \geqslant 2$ i weźmy pod uwagę liczbę a_r. Ciąg (p_n) jest ściśle rosnący, zatem ciąg (a_n) nie zawiera pary kolejnych liczb; stąd $a_{r-1} < a_r - 1$ oraz $a_r + 1 < a_{r+1}$. Implikacja $(*)$, zastosowana najpierw dla wartości $k = r-1$, $m = a_r - 1$, a następnie dla $k = r$, $m = a_r + 1$, daje równości:

$$b_{a_r - r} = a_r - 1 \quad \text{oraz} \quad b_{a_r + 1 - r} = a_r + 1.$$

Tak więc liczby $a_r - 1$ oraz $a_r + 1$ są wyrazami ciągu (b_n) o dwóch kolejnych numerach $n = a_r - r$, $n = a_r + 1 - r$; wartość a_r zostaje przez ciąg (b_n) przeskoczona.

Konkluzje obu powyższych akapitów składają się na dowodzoną tezę: ciągi (a_n), (b_n) są wzajemnie komplementarne.