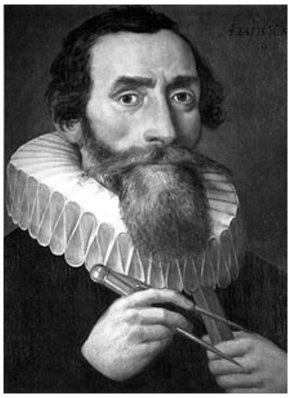
Równanie Keplera w Principiach Newtona

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



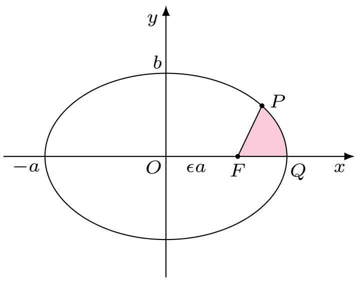
Johannes Kepler (1571–1630)

W artykule *Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w Principiach* (Δ^{10}_{20}) naszkicowaliśmy problem wyznaczania ruchu ciał (np. planet) po ustalonych krzywych i w polu sił centralnych, którym zajmował się Isaac Newton w *Principiach* [*O tym, jak należy znajdować ruch po zadanej orbicie*, Paragraf VI, Ks. 1]. Takie ruchy spełniają drugie prawo Keplera [Principia, Tw. 1, Ks. 1] i nazywane są keplerowskimi.

Dominującym tematem była przestępna zależność między polem sektora zakreślonego przez promień wodzący planety i czasem przebiegu planety po orbicie. Powiedzieliśmy, że w przypadku ruchu po orbicie eliptycznej równaniem opisującym tę zależność jest *równanie Keplera*

(1) $$M = E - \epsilon \sin E.$$

W tym artykule powracamy do drugiego prawa Keplera i zmagań Newtona ze znalezieniem położenia P planety na orbicie eliptycznej w dowolnej chwili t, liczonej od przejścia przez perycentrum Q.



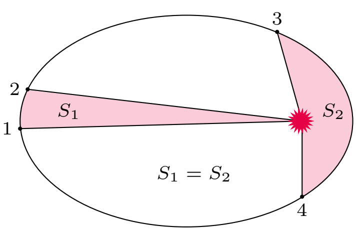
Sektor FQP o polu S i punkt P

Przyjmijmy, że półosie elipsy są równe a, b, $b < a$ i że czas T pełnego obiegu planety po trajektorii (okres obiegu) jest znany. Relacja wiążąca położenie P i czas t zadana jest równaniem (1), gdzie M jest *anomalią średnią* (zdefiniowaną niżej), E jest *anomalią mimośrodową* (zob. rys. 3), a ϵ jest *mimośrodem orbity.*

Z definicji: $M = \frac{2\pi}{T}t$, gdzie czas t jest związany drugim prawem Keplera z polem S sektora elipsy zakreślonego przez promień wodzący planety, otrzymujemy

(2) $$\frac{S}{t} = \frac{\pi ab}{T}.$$

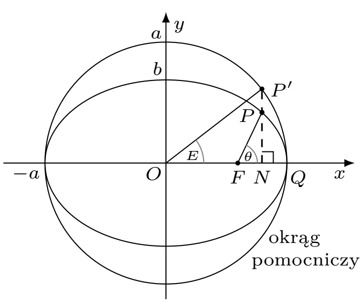
Z powyższych wzorów widać, że relacje wiążące pole zakreślonego w czasie t sektora elipsy, a także sam czas t z *anomalią mimośrodową* E, są przestępne. Obliczenie *anomalii mimośrodowej* można uznać za wskazanie miejsca planety na orbicie (patrz rys. 3). Gdy znane jest E, obliczenie współrzędnych punktu P sprowadza się do prostego rachunku. Chcąc obliczyć E w danej chwili czasu t, obliczamy M i dalej obliczamy E z równania Keplera. Dla tego ostatniego obliczenia Newton zastosował metodę aproksymacji, którą obecnie nazywamy metodą Newtona–Raphsona.



Ilustracja drugiego prawa Keplera

Poniżej przybliżymy bardziej szczegółowo równanie Keplera według *Principiów.* Pokażemy:

1. Geometryczne wyprowadzenie równania.
2. Podejście analogowe, relację do ruchu po krzywej cykloidalnej.
3. Metodę aproksymacji rozwiązania.



Konstrukcja rozwiązania wykorzystująca równanie Keplera

Ad 1. W dowodzie odwołujemy się do rysunku na marginesie. Niech S będzie polem sektora FQP. Naszym celem jest wyrażenie S przez parametry a, b elipsy i kąt E określający sektor FQP. Pokażemy, że

(3) $$S = \frac{1}{2}ab\{E - \epsilon \sin E\},$$

gdzie $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ jest mimośrodem elipsy. Korzystając z drugiego prawa Keplera (2) i definicji M, przekształcamy łatwo powyższe równanie do postaci (1).

Zauważmy, że S jest równe sumie pól trójkąta i wycinka elipsy,

(4) $$S = \triangle FNP + NQP.$$

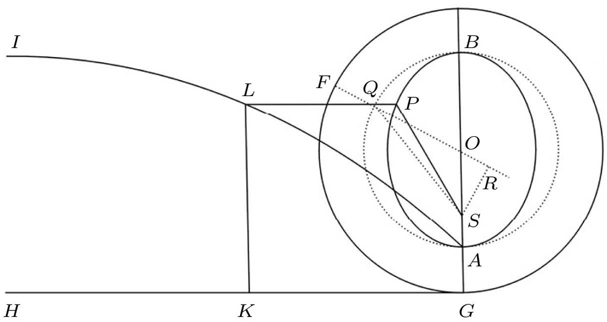
Ponieważ $OF = \epsilon a$, nie mamy problemu z obliczeniem pola trójkąta. Chcąc obliczyć pole NQP wycinka elipsy, wykorzystamy konstrukcję pomocniczą, czyli okrąg o promieniu a opisany na naszej elipsie. Łatwiej nam będzie obliczyć pole wycinka NQP' koła i skorzystać z własności skalowania $NQP = \frac{b}{a}NQP'$. Patrząc na rysunek, widzimy, że $NQP' = OQP' - \triangle ONP'$. Zatem

(5) $$S = \triangle FNP + \frac{b}{a}\{OQP' - \triangle ONP'\}.$$

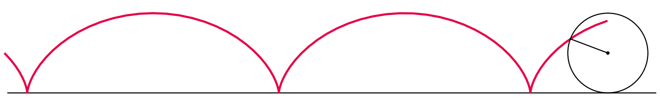
Ponieważ $\triangle FNP = \frac{1}{2}ab(\cos E - \epsilon)\sin E$, $OQP' = \frac{E}{2\pi}\pi a^2 = \frac{E}{2}a^2$, a $\triangle ONP' = \frac{1}{2}a^2 \cos E \sin E$, to zebrawszy te rachunki razem, otrzymujemy równanie (3). Dowód geometryczny podał sam Johannes Kepler w *Epitome Astronomiae Copernicanae*, Ks. V. Są też dowody analityczne, wychodzące wprost z biegunowej reprezentacji równania elipsy, gdzie sednem dowodu jest otrzymanie relacji pomiędzy kątem PFN występującym w równaniu elipsy i kątem E [Battin].

Ad 2. Dla oddania próbki klimatu *Principiów* przytoczymy tu oryginalny tekst Newtona (w tłumaczeniu polskim, patrz bibliografia).

„Teza XXXI. Zadanie XXIII. *Mając dane ciało poruszające się po danej elipsie, należy wyznaczyć miejsce ciała na elipsie, które ono osiągnie w danym czasie.*



Niech A będzie głównym wierzchołkiem, S ogniskiem, natomiast środkiem elipsy APB. Niech P będzie szukanym miejscem ciała. Przedłużamy OA do punktu G tak, aby OG było w stosunku do OA takim jak OA do OS. Następnie konstruujemy prostą GH prostopadłą do osi OA. Z kolei wokół środka O konstruujemy okrąg GEF o promieniu OG. Przypuśćmy następnie, że koło GEF toczy się po linii GH, obracając wokół własnej osi po prostej GH jako podstawie, oraz w międzyczasie punkt A opisuje cykloidę ALI.



Cykloida skrócona – ślad zakreślony przez punkt A w trakcie toczenia koła

Po wykonaniu tej konstrukcji weźmy GK tak, aby jego stosunek do obwodu GEFG tego koła był równy stosunkowi czasu, w którym ciało, wychodząc z punktu A, opisze łuk AP do czasu jego pełnego obiegu po elipsie. W punkcie K rysujemy prostą KL prostopadłą do GH, przecinającą cykloidę w L. Następnie rysujemy prostą LP równoległą do KG, przecinającą elipsę w punkcie P, który jest szukanym miejscem ciała.

Rzeczywiście. Konstruujemy półokrąg AQB o środku w punkcie O i promieniu OA. Następnie niech LP po przedłużeniu przetnie łuk AQ w Q. Tworzymy proste SQ, OQ. Niech OQ przecina łuk EFG w F oraz niech SR będzie prostopadłe do OQ. Pole APS jest proporcjonalne do AQS, tzn. do różnicy między polem wycinka OQA i trójkąta OQS lub do różnicy iloczynów $\frac{1}{2}OQ \cdot AQ$ *i* $\frac{1}{2}OQ \cdot SR$, *tzn. (ponieważ* $\frac{1}{2}OQ$ *jest ustalone) do różnicy między łukiem AQ i odcinkiem SR. Wobec tego pole APS (ponieważ stosunki: SR do sinusa łuku AQ, OS do OA, OA do OG, AQ do GF i (rozdzielnie) AQ – SR do GF – sinus łuku AQ są wszystkie równe) jest jak GK, to jest jak różnica pomiędzy łukiem GF i sinusem łuku AQ. Q.E.D.*"

Powyższy wywód zawiera wyprowadzenie równania Keplera przytoczone wcześniej, jak również jego parametryzację geometryczną, wiążącą cykloidalny ruch punktu Q z orbitalnym ruchem punktu P, gdy okrąg toczy się wzdłuż osi OX z jednostajną prędkością $V = \frac{2\pi \cdot OG}{T}$. Zainteresowanym proponujemy rozszyfrowanie tekstu Newtona, będące sporym wyzwaniem. Stosowne objaśnienia można znaleźć w [Chandrasekhar].

Ad 3. Metoda Newtona aproksymacji rozwiązania jest najprostszym przykładem jego metody odwracania szeregów [Battin]. Załóżmy, że mamy równanie $f(x) = 0$, gdzie funkcja f ma pierwszą pochodną f'. Niech ξ będzie pierwiastkiem tego równania. Wybieramy punkt x_0 i tworzymy ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gdzie

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Zbieżność tak utworzonego ciągu zależy of funkcji f i wyboru punktu początkowego x_0.

Zobaczymy, jak ta metoda działa w przypadku równania Keplera. Równanie to ma dla każdego M tylko jedno rozwiązanie E, ponadto dla $k\pi \leqslant M < (k+1)\pi$ mamy $k\pi - M \leqslant E < (k+1)\pi - M$.

Określamy $f(E) = E - \epsilon \sin E - M$. Mamy wtedy

$$E_{k+1} = E_k + \frac{M - M_k}{1 - \epsilon \cos E_k}, \tag{7}$$

gdzie $M_k = E_k - \epsilon \sin E_k$. Można pokazać, że

$$|E_{k+1} - E| \leqslant \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}|E_k - E|^2. \tag{8}$$

Widać, że w przypadku planet w układzie słonecznym, dla których ϵ jest bardzo małe, aproksymacje E_k bardzo szybko zdążają do rozwiązania równania Keplera. Newton, a przedtem Kepler, zauważają, że w większości przypadków wystarczy wziąć tylko dwa wyrazy (dla uzyskania akceptowalnych przybliżeń obserwacyjnych).

Ciekawa historia metody Newtona–Raphsona (metoda ta występuje też pod innymi nazwami) jest opisana w artykule [Kollerstrom], a także w artykule *Przez wieki z metodą Newtona* (Δ^9_{21}).

Inna prosta metoda aproksymacji to *metoda kolejnych przybliżeń*. Określamy np. $E_0 = 0$, a dalej

Zauważmy, że
$$|E_{k+1} - E_k| \leqslant \epsilon |E_k - E_{k-1}|,$$
gdzie $0 < \epsilon < 1$, zatem zbieżność metody zapewnia zasada odwzorowań zwężających (twierdzenie Banacha o kontrakcji).

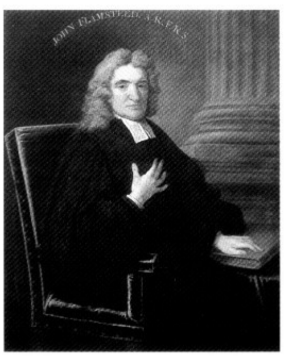
$$E_1 = M + \epsilon \sin E_0, \quad \ldots\ , \quad E_{k+1} = M + \epsilon \sin E_k, \ldots \tag{9}$$

Co prawda ciąg $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$ też zbiega do rozwiązania równania Keplera, ale wolniej. Na przykład, jeśli za parametry weźmiemy (z Wikipedii) dane dla Jowisza: $M = 20{,}02°$ oraz $\epsilon = 0{,}0489$, to dostaniemy następujące wyniki:

Numer iteracji k	Metoda Newtona	Metoda kolejnych przybliżeń
0	**0**,0000000000000000	**0**,0000000000000000
1	**0,36**73797878764218	**0,3**494149162492648
2	**0,36695919**82813706	**0,366**1557401527573
3	**0,3669591966542151**	**0,3669**225177320731
4		**0,36695**75224562361
5		**0,3669591**202364838
6		**0,36695919**31661761
7		**0,3669591964**950058
8		**0,3669591966**469481
9		**0,366959196653**8834
10		**0,3669591966542**000

(wytłuściliśmy te cyfry wyniku, które są dokładne).

Dotychczas znaleziono wiele metod aproksymacji rozwiązania tego najsłynniejszego równania przestępnego, z różną dokładnością względem E. Wciąż podawane są nowe metody [Colwell].



John Flamsteed (1646–1719)
Pierwszy Astronom Królewski i założyciel Królewskiego Obserwatorium Astronomicznego w Greenwich

Oba artykuły, z Δ^{10}_{20} i niniejszy, pozwalają ujrzeć geniusz Newtona i siłę *Principiów*, dzieła będącego niedościgłym wzorem publikacji w dziedzinie, którą dziś moglibyśmy nazwać matematyką stosowaną czy fizyką teoretyczną (okropne nazwy wskazujące na współczesną schizofrenię naukową), a kiedyś nazywało się dużo właściwiej, mianowicie *filozofią naturalną*.

Korzystając z drugiego prawa Keplera, prostych metod geometrii klasycznej i bardzo subtelnego argumentu topologicznego, wyprzedzającego swoją epokę o około 200 lat, Newton rozwiązał *niezwykle istotny problem astronomiczny* swojej epoki. Pokazując *ograniczenia dla dokładnych obliczeń liczbowych*, znalazł rozwiązanie *geometryczne* i *analogowe* oraz zaproponował szybko zbieżną *aproksymację numeryczną* rozwiązania metodą numeryczną stosowaną do dnia dzisiejszego.

Czego już nie widać w tych artykułach, Newton konfrontował swoje teorie z danymi doświadczalnymi, w tym wypadku z tablicami astronomicznymi Astronoma Królewskiego Johna Flamsteeda (uciekając się nawet do odebrania mu siłą jego niedokończonych jeszcze obliczeń).

Jeśli do tego dodać, że pracował samotnie, pisząc gęsim piórem przy świeczce, w barbarzyńskich czasach wojen religijnych i epidemii, w których los, a nawet życie człowieka wisiały na włosku (Newton był heretykiem, m.in. nie uznawał Trójcy Świętej, co było uznawane za przestępstwo [Jerzy Kierul: *Newton*]), to narzucającą się najwłaściwszą naszą reakcją musi pozostać klasyczne *chapeau bas*.

Literatura:

R, H. Battin: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics. Inc., 1999.

S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford University Press Inc., New York 1995.

P. Colwell: *Solving Kepler's Equation Over Three Centuries*, Willmann-Bell, Inc., 1993.

Jerzy Kierul: *Kepler*, PIW, 2007.

Jerzy Kierul: *Newton*, PIW, 2010.

N. Kollerstrom: *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth*, The British Journal for the History of Science, Volume 25, Issue 03, September 1992, 347–354.

I. Newton: *Matematyczne Zasady Filozofii Przyrody*, Copernicus Center Press, Kraków 2011.