Zabawy na polu

Bartłomiej BZDĘGA

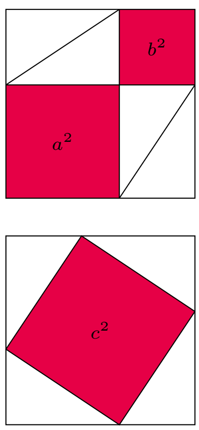
Pole wielokąta to funkcja, która każdemu wielokątowi przypisuje pewną liczbę rzeczywistą nieujemną oraz spełnia następujące warunki:

(1) pole prostokąta o bokach długości a i b jest równe ab;
(2) pola wielokątów przystających są równe;
(3) jeśli pewien wielokąt podzielono na skończoną liczbę rozłącznych wielokątów, to suma ich pól jest równa polu tego wielokąta.

Czytelnikowi, który nigdy wcześniej tego nie zrobił, polecam, jako cenne ćwiczenie, wyprowadzenie wzorów na pole kolejno: trójkąta prostokątnego, trójkąta dowolnego, równoległoboku i trapezu, z wykorzystaniem jedynie powyższych trzech własności pola. Ogólniej – pozwalają one na obliczenie pola dowolnego wielokąta, ponieważ każdy wielokąt można podzielić na trójkąty.

Stosowanie pola w rozwiązywaniu zadań często opiera się na wykorzystaniu warunków (1–3) do bezrachunkowego dowodzenia pewnych równości. Dobrym przykładem jest dowód twierdzenia Pitagorasa, który zamieściliśmy na marginesie. Niekiedy efekty przynosi liczenie pola tej samej figury kilkoma różnymi sposobami i porównywanie wyników. Oprócz tego podaję jeszcze kilka faktów, które warto znać; ich nietrudne dowody pozostawiam Czytelnikowi. Zapis $[\mathcal{F}]$ oznaczać będzie pole figury $\mathcal{F}$.

Najprostszy dowód twierdzenia Pitagorasa



Pole trójkąta a równoległość. Niech A, B, C, D będą czterema różnymi punktami, przy czym punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB. Wówczas $AB \parallel CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[ABC] = [ABD]$.

Pole i proporcje. Stosunek pól trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi długości ich podstaw. Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.

Pole wielokąta opisanego. Jeśli wielokąt $\mathcal{W}$ o obwodzie L jest opisany na okręgu o promieniu r, to $[\mathcal{W}] = \frac{1}{2}rL$.

Zadania

1. W pewnym trójkącie długość jednego z boków jest równa średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Analogicznie jest dla wysokości – długość jednej z nich jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten trójkąt jest równoboczny (XII WLM, Wielkopolska Liga Matematyczna; *wlm.wmi.amu.edu.pl*).
2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E leży na odcinku AB, a punkt F na odcinku AD. Prosta EF przecina proste CB i CD w punktach, odpowiednio, P i Q. Wykazać, że $[CEF] = [APQ]$ (I OMG).
3. Dowieść, że wewnątrz każdego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności: każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole (LII OM).
4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i spełnia warunki $AB \parallel CE$, $BC \parallel DA$, $CD \parallel EB$, $DE \parallel AC$. Wykazać, że $EA \parallel BD$ (IX WLM).
5. Wysokość opuszczona na bok BC trójkąta ostrokątnego ABC ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie r. Ponadto okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i BC, natomiast okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA. Dowieść, że $|BC| = 5r$ (V WLM).
6. Wielokąt opisany na okręgu o promieniu r rozcięto na n trójkątów, w które wpisano okręgi o promieniach $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dowieść, że $r \leqslant r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.
7. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC znajdują się punkty, odpowiednio, P, Q, R. Udowodnić, że odcinki AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$ (twierdzenie Cevy).
8. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem oraz punkt X w jego wnętrzu. Niech M i N będą środkami przekątnych AC i BD tego czworokąta. Udowodnić, że $[ABX] + [CDX] = [BCX] + [DAX]$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na prostej MN (prosta Newtona; twierdzenie Annego).
9. Przy założeniach z poprzedniego zadania dowieść, że jeśli czworokąt $ABCD$ opisany jest na okręgu o środku I, to punkt I leży na prostej MN (twierdzenie Newtona).

Wskazówki do zadań

1. Jeśli $a - x$, a, $a + x$ są długościami boków tego trójkąta, to długości opuszczonych na nie wysokości wynoszą odpowiednio $h + y$, h, $h - y$ $(x, y \geqslant 0)$.
2. Skorzystać z równości $[AEC] = [AEQ]$ i $[AFC] = [AFP]$.
3. Tę własność ma środek okręgu wpisanego w trójkąt.
4. Zamienić równoległości na równości pól trójkątów: $[ABC] = [ABE]$ itp.
5. Podzielić trójkąt ABC na trapez i trzy trójkąty za pomocą środków okręgów o_1 i o_2.
6. Niech L_i oraz P_i oznaczają, odpowiednio, obwód i pole i-tego trójkąta. Skorzystać z szacowania $2P_i = r_iL_i \leqslant r_iL$.
7. Niech T będzie punktem przecięcia odcinków AP i BQ. ($\Rightarrow$) Udowodnić równość $\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{[CTA]}{[BTC]}$ i dwie analogiczne. ($\Leftarrow$) Niech R' będzie punktem przecięcia CT i AB. Wykazać, korzystając z poprzedniej implikacji, że jeśli $R' \neq R$, to $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \neq 1$.
8. Niech PQ będzie dowolnym odcinkiem wewnątrz czworokąta $ABCD$. Wykazać, że jeśli X leży na odcinku PQ i $|PX| = x$, to wartość wyrażenia $[ABX] + [CDX]$ jest funkcją liniową zmiennej x. Wystarczy zatem wykazać, że $[ABX] + [CDX] = \frac{1}{2}[ABCD]$ dla $X = M$ i $X = N$.
9. Wykorzystać poprzednie zadanie oraz własność czworokąta opisanego na okręgu.