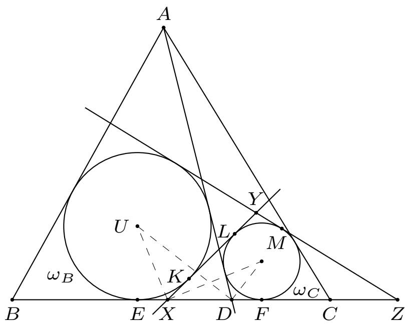
Klub 44 M

$\otimes\sqrt{\ldots!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2021



Zadania z matematyki nr 825, 826

Redaguje Marcin E. KUCZMA

825. Dany jest graf ważony G mający n wierzchołków; $n \geqslant 4$. Każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź (niezorientowana). Każdej krawędzi przyporządkowana jest jej *waga*: liczba rzeczywista różna od zera. Określamy *mignięcie* wierzchołkiem jako jednoczesną zmianę znaku wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

Zakładamy, że zarówno w grafie G, jak i w każdym grafie ważonym, uzyskanym z G przez jednokrotne lub dwukrotne wykonanie operacji mignięcia (na dowolnie wybranym wierzchołku/wierzchołkach) suma wag wszystkich krawędzi grafu jest liczbą o module 1. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może mieć iloczyn wag wszystkich krawędzi grafu G.

826. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o średnicy AB. Styczne do okręgu w punktach A i D przecinają się w punkcie F. Boki BC i CD są jednakowej długości; zaś przekątna CE połowi przekątną AD. Dowieść, że proste CE i EF są prostopadłe.

Zadanie 826 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2021

Przypominamy treść zadań:

821. Niech B będzie ustaloną liczbą naturalną; $B \geqslant 3$. Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie pozycyjnym przy podstawie B (cyframi zapisu są elementy zbioru $\{0, \ldots, B-1\}$; cyfra wiodąca różna od zera). Rozważamy liczby naturalne N, których cyfry zapisu tworzą ciąg ściśle rosnący (największa cyfra w rzędzie jedności). Obliczyć maksymalną wartość sumy cyfr iloczynu $(B-1)N$, gdy N przebiega zbiór wszystkich liczb rozważanej postaci.

822. Dany jest trójkąt ABC. Dla dowolnego punktu D na boku BC (różnego od wierzchołków) zakreślamy okrąg ω_D, przechodzący przez D oraz środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Udowodnić, że istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D.

821. Weźmy dowolną liczbę naturalną N z rozważanego zbioru i zapiszmy jej rozwinięcie:

$$N = \sum_{i=0}^{k} c_i B^i =: \left(c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1 c_0\right)_B; \quad 0 < c_k < \ldots < c_1 < c_0 < B.$$

Przyjmijmy, że $N \geqslant B$ (a więc $k \geqslant 1$). Wykażemy, że

$$(1) \qquad (B-1)N = \sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i,$$

gdzie

$$(2) \qquad d_0 = B - c_0, \quad d_1 = c_0 - 1 - c_1, \quad d_{k+1} = c_k,$$

$$(3) \qquad d_i = c_{i-1} - c_i \quad \text{dla} \quad i = 2, \ldots, k$$

(gdy $k = 1$, wiersz (3) jest „pusty”). Wobec przyjętych założeń o cyfrach c_i, liczby $d_0, \ldots, d_{k+1}$ są nieujemne, mniejsze od B (przy czym $d_{k+1} > 0$); a to znaczy, że są to dopuszczalne cyfry rozwinięcia pozycyjnego przy podstawie B.

Przekształcamy prawą stronę wzoru (1):

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i =$$
$$= (B - c_0) + (c_0 - 1 - c_1)B + \sum_{i=2}^{k} c_{i-1} B^i - \sum_{i=2}^{k} c_i B^i + c_k B^{k+1} =$$
$$= -c_0 + (c_0 - c_1)B + \sum_{i=1}^{k-1} c_i B^{i+1} - \sum_{i=2}^{k} c_i B^i + c_k B^{k+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} c_i B^{i+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i B^i = B \cdot N - N;$$

wyszła lewa strona wzoru (1). Zatem suma cyfr liczby $(B-1)N$ wynosi

$$(B - c_0) + (c_0 - 1 - c_1) + \sum_{i=2}^{k} (c_{i-1} - c_i) + c_k =$$
$$= B - 1 - c_1 + (c_1 - c_k) + c_k = B - 1.$$

(W przypadku, gdy $N < B$, czyli $k = 0$, wzory (2), (3) należy zastąpić przez $d_0 = B - c_0$, $d_1 = c_0 - 1$; znów $d_0 + d_1 = B - 1$).

Tak więc badana suma $d_0 + \ldots + d_{k+1}$ stale wynosi $B - 1$ i jest to jej wartość maksymalna (minimalna zresztą też). [Ilustracja dla $B = 10$, $N = 23578$: $9 \cdot N = 212202$.]

822. Proste BC i AD to wspólne styczne (zewnętrzna i wewnętrzna) okręgów ω_B i ω_C, wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Prowadzimy ich pozostałe dwie wspólne styczne (zewnętrzną i wewnętrzną). Jeśli styczne zewnętrzne nie są równoległe, przecinają się w pewnym punkcie Z. Przyjmijmy dalsze oznaczenia: E, F to punkty styczności prostej BC z ω_B, ω_C; X, Y to punkty przecięcia drugiej stycznej wewnętrznej ze stycznymi zewnętrznymi (X na odcinku EF), zaś K, L to jej punkty styczności z ω_B, ω_C; wreszcie M to punkt styczności prostej YZ z okręgiem ω_C.

Jeden z okręgów ω_B, ω_C jest okręgiem wpisanym trójkąta XYZ, a drugi – dopisanym; stąd równość $KX = LY$. Przy tym $KX = EX$, $LY = MY$ (odcinki stycznych) oraz $MY = DF$ (z symetrii względem prostej wyznaczonej przez środki U, V okręgów ω_B, ω_C). Otrzymujemy równość: $EX = DF$. Zachodzi ona (co oczywiste) również w przypadku, gdy styczne zewnętrzne są równoległe.

Położenie punktów styczności na prostej BC jest opisane wzorami

$$BE = \frac{AB + BD - AD}{2}, \qquad DF = \frac{AD + DC - AC}{2}.$$

Wobec tego

$$(4) \qquad BX = BE + EX = BE + DF = \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

Półproste DU i DV są dwusiecznymi kątów ADB i ADC, więc kąt UDV jest prosty. Analogicznie, XU i XV połowią kąty BXY i CXY, więc kąt UXV jest prosty. Zatem okrąg UDV (czyli ω_D) przechodzi przez punkt X, określony równością (4). Oznacza ona, że X to punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC i nie zależy od wyboru punktu D. Jest to szukany punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D.