

Ale nie tylko! Na przykład w procesorze Intel Itanium operacja dzielenia dwóch liczb rzeczywistych b/a sprowadza się do pomnożenia $b \cdot \frac{1}{a}$. Aby zaś obliczyć $x = \frac{1}{a}$, projektanci zdecydowali się wykonać kilka iteracji algorytmu, w którym na szczęście *nie występuje* operacja dzielenia, a za to można skorzystać z instrukcji FMA (*fused multiply-add*) procesora:

$$r_k = 1 - ax_k,$$

$$x_{k+1} = x_k + x_k r_k.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że tak określony ciąg (x_k) jest po prostu ciągiem generowanym metodą Newtona dla $f(x) = \frac{1}{x} - a$ oraz, że dla $a > 0$ zachodzi

$$\left| x_{k+1} - \frac{1}{a} \right| = a \cdot \left| x_k - \frac{1}{a} \right|^2.$$

I właśnie na tym – że (w typowym przypadku) błąd w następnym kroku jest rzędu kwadratu błędu w bieżącym – polega nieprzemijający czar metody Newtona.

Źródła:

J.-L. Chabert, *History of Algorithms*, Springer 1999.

H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer 1977.

T. Ypma, *Historical Development of the Newton-Raphson Method*, SIAM Review 37 (4) 1995.

Coraz bliżej kota

Marcin BRAUN

O kocie Schrödingera słyszeli wszyscy. Wrócimy do niego za chwilę, na razie jednak przypomnijmy dwa doświadczenia, które pozwoliły odpowiedzieć na powtarzane od wieków pytanie: czy światło to fala, czy strumień cząstek. Pierwsze z nich wykonał na początku XIX wieku Thomas Young i udowodnił, że światło ulega dyfrakcji i interferencji, co świadczy niezbić o jego falowej naturze. Kilkadziesiąt lat później inne doświadczenia pozwoliły odkryć efekt fotoelektryczny, który na początku XX wieku wyjaśnił Albert Einstein. Stwierdził on, że światło składa się z kwantów, czyli „porcji energii”, zwanych dziś fotonami. W naszych rozważaniach skupimy się jednak na tym, co było później.

Fotony interferują między sobą?

Koncepcja Einsteina pozwoliła wyjaśnić efekt fotoelektryczny, a także kilka innych zjawisk. Stworzyła jednak nowy problem: jak wyjaśnić interferencję światła? Może jest ona wynikiem oddziaływania

fotonów? Czy tam, gdzie powstaje ciemny prążek interferencyjny, fotony zderzają się tak nieszczęśliwie, że ulegają zniszczeniu? To można sprawdzić. Wykonajmy doświadczenie Younga jeszcze raz, ale tym razem weźmy źródło światła tak słabe, żeby wypuszczało z siebie po jednym fotonie co sekundę. Zamiast ekranu użyjemy kliszy fotograficznej, po każdym fotonie zostanie jedna kropka. Pojedynczy foton nie będzie miał z czym oddziaływać. Pewnie część fotonów przeleci przez jedną szczelinę, a część przez drugą. Nie zaobserwujemy więc prążków interferencyjnych, ale dwie plamy – po jednej za każdą szczeliną. Jeśli ekran znajduje się daleko od szczelin, plamy te nałożą się na siebie i wtedy także prążków nie będzie. Takie doświadczenie rzeczywiście zrobiono. Okazało się, że po każdym fotonie zostawała jedna kropka. W miarę jednak, jak kropek przybywało, układały się one w dobrze znane prążki interferencyjne. Tak więc foton nie interferuje z innymi fotonami. On interferuje sam ze sobą! Najwyraźniej nie tylko strumień fotonów, ale nawet pojedynczy foton jest falą.

De Broglie: wszystko jest falą

Sprawa skomplikowała się jeszcze bardziej, gdy francuski książę Louis Victor Pierre Raymond de Broglie[†] z książęcym iście rozmachem uznał, że skoro światło może być jednocześnie falą i strumieniem cząstek, to taką samą podwójną naturę powinny mieć wszystkie inne cząstki mikroświata. A jaką długość ma fala związana z cząstką? De Broglie skorzystał ze wzoru na pęd fotonu $p = h/\lambda$, czyli pęd = $\frac{\text{stała Plancka}}{\text{długość fali}}$. Zgodnie z tym wzorem foton o pędzie p ma długość fali $\lambda = p/h$. Uczony przyjął, że taki sam wzór obowiązuje również dla innych cząstek. W jaki sposób można sprawdzić doświadczalnie tę hipotezę? Użyjmy stosunkowo lekkich cząstek, aby przy rozsądnej prędkości miały w miarę mały pęd, a tym samym – w miarę dużą długość fali. Dobrym rozwiązaniem okazują się elektrony. Odpowiadająca im długość fali jest mniej więcej rozmiarów atomu. Co prawda trudno byłoby wyciąć dwie szczeliny oddalone o rozmiar atomu, a tym bardziej wykonać siatkę dyfrakcyjną zawierającą wiele rozmieszczonych tak szczelin, ale takie siatki Natura produkuje w wielkiej ilości. To kryształy. Już w 1927 roku, zaledwie cztery lata po pomysł de Broglie’a, potwierdzono doświadczalnie dyfrakcję i interferencję elektronów. Później przeprowadzono to doświadczenie w nowej wersji. Dobrano prędkość elektronów i częstotliwość

[†]Wszyscy czytają to nazwisko /de broj/, tak też podaje francuska Wikipedia, cytując podręcznik fonetyki. Słownik Larousse’a podaje wymowę /de brogli/.

Stała Plancka wynosi:
 $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.



Rozwiązanie zadania M 1685. $n \in \{1, 2\}$.

Niech liczba Ahmeda będzie miała dzielniki $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_k = n$. Zauważmy, że liczba $n + 1$ jest względnie pierwsza ze wszystkimi tymi dzielnikami, stąd liczba

$A := (d_0 + 1)(d_1 + 1) \cdot \dots \cdot (d_{k-1} + 1)$ musi być podzielna przez

$$B := d_0 \cdot d_1 \cdot \dots \cdot d_k.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} d_1 &\geq d_0 + 1, \\ d_2 &\geq d_1 + 1, \\ &\dots, \\ d_k &\geq d_{k-1} + 1. \end{aligned}$$

Mnożąc te nierówności, otrzymujemy, że $A \leq B$, a skoro $B \mid A$, to $A = B$, czyli wszystkie nierówności w (*) stają się równościami. Ale wtedy $n = d_k = d_{k-1} + 1$, czyli n jest podzielne przez $d_{k-1} = n - 1$. Stąd albo $n = 2$, albo liczba d_{k-1} nie istnieje, czyli $n = 1$.

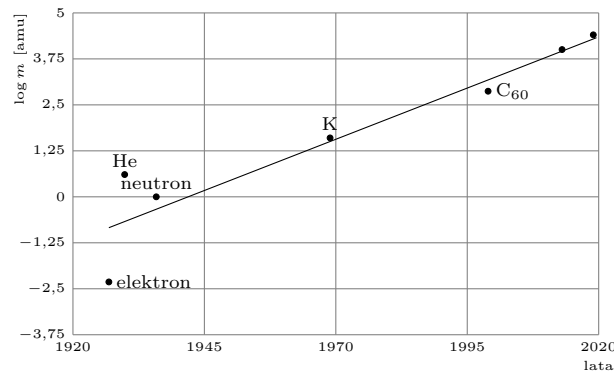
promieniowania rentgenowskiego w taki sposób, aby fala materii elektronów i fala rentgenowska miały tę samą długość. Okazało się, że uzyskane obrazy interferencyjne są identyczne. Sprawdzone też, że elektron interferuje sam ze sobą, a nie z innymi elektronami – podobnie jak to zrobiono dla fotonów. Teorię fizyczną uwzględniającą falowe własności materii nazwano mechaniką kwantową. Opisuje ona wiele niezwykłych własności – elektron biegnie dwiema drogami równocześnie, atom jednocześnie rozpada się i nie rozpada, a w dodatku nie można przewidzieć, co się wydarzy: można najwyżej obliczyć prawdopodobieństwo.

Falowa natura mikroświata?

Im większa masa cząstki, tym większy jej pęd, a co za tym idzie – krótsza długość fali de Broglie’a. Dlatego nikt nie obserwuje falowej natury materii na co dzień. Podobnie jest z innymi efektami przewidywanymi przez mechanikę kwantową. Właśnie dlatego kot Schrödingera w stanie mieszanym, „jednocześnie żywy i martwy”, jest dla nas takim absurdem. Kolejna, ostatnia już linia obrony zdrowego rozsądku przed wnioskami z mechaniki kwantowej to stwierdzenie, że jest ona teorią mikroświata. Tam, na dole, mogą się dziać dziwne rzeczy, ale nasz zwykły świat jest porządnym, klasycznym. W rzeczywistości jednak nie istnieje żadne górne ograniczenie wielkości ciał, dla których obowiązują prawa fizyki kwantowej. Zgodnie z tą teorią kot może być w superpozycji stanów nie tylko dlatego, że w sprytny a okrutny sposób połączono go z atomem, ale po prostu dlatego, że sam jako obiekt materialny podlega mechanice kwantowej.

Coraz większe, coraz cięższe

Ten brak górnej granicy obowiązywania praw mechaniki kwantowej najlepiej widać właśnie w przypadku interferencji. W ciągu stu lat, które minęły od czasu pierwszych doświadczeń z dyfrakcją i interferencją elektronów, takie same zjawiska obserwujemy dla coraz większych i cięższych obiektów. Po elektronach przysły neutrony i lekkie atomy, potem zaś coraz cięższe atomy i cząsteczki. Postęp przedstawiono na wykresie.



rok	masa m [amu]	$\log m$
1927	0,005	-2,3
1930	4	0,6
1936	1	0
1969	39	1,6
1999	720	2,9
2013	10 000	4
2019	25 000	4,4

Ostatnie dwie kropki na wykresie celowo nie zostały podpisane. Odpowiadające im cząsteczki nie mają nazwy zwyczajowej, a ich budowa jest dość skomplikowana.

Na skali pionowej przedstawiono logarytm masy wyrażonej w jednostkach masy atomowej, oznaczanej od skrótu angielskiego wyrażenia przez amu. Aktualny rekord, ustanowiony w 2019 roku, to około 25 000 amu, prawie 50 mln razy więcej od masy elektronu. Jeszcze większe wrażenie robi (przynajmniej na mnie) równoległa ścieżka badań – interferencja obiektów nie aż tak ciężkich, ale za to coraz bliższych chemii życia. Ostatnie (2020 r.) osiągnięcie to potwierdzenie falowych właściwości gramicydyny. Jest to naturalny polipeptyd. Jego cząsteczka składa się z 15 aminokwasów. Do białek już tylko jeden krok.

Co dalej?

Jeśli dotychczasowy trend się utrzyma, młodszy z nas ma szansę dożyć interferencji wirusów, za jakieś 40 lat, a niektórzy może nawet interferencji bakterii, po kolejnych 40 latach. Około 2380 roku potwierdzimy interferencję kota, a kilkanaście lat później sami możemy być przedmiotem takich doświadczeń. Jeśli oczywiście tymczasem nie spełni się inna przepowiednia, oparta na podobnych wyliczeniach (zob. wycinek z pisma „Orędownik” z roku 1936).

