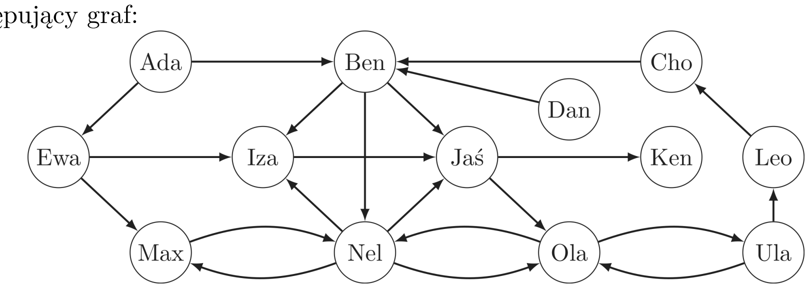
*Tomasz WĄS*

Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

# Jak Leo uratował klasowe wybory

W klasie zapadła cisza. Dziś miały się odbyć wybory na przewodniczącego klasy, ale nikt nie zgłosił swojej kandydatury. W związku z tym wychowawca zaproponował następujące wyjście z tej patowej sytuacji: Każdy na kartce wypisze listę koleżanek i kolegów z klasy, którzy według niego byliby dobrymi przewodniczącymi; może wypisać ich dowolnie wiele. Następnie kartki zostaną zebrane, a głosy policzone. Osobie, która uzyska najwięcej głosów, zaproponuje się ten niezwykle prestiżowy urząd – gospodarza klasy.

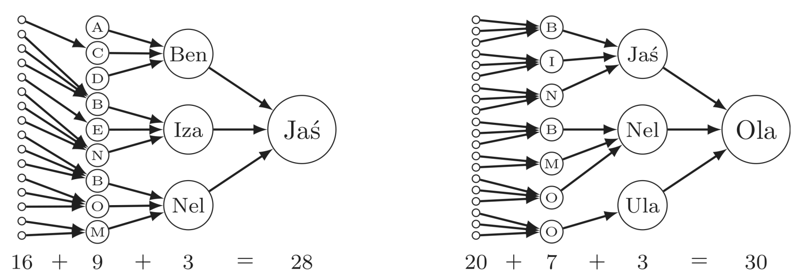
Klasa z chęcią przyjęła pomysł i sprawnie go zrealizowała. Jednak po podliczeniu głosów okazało się, że aż pięć osób dostało ich najwięcej, czyli trzy. Aby sprawdzić, czy obliczenia na pewno się zgadzają, postanowiono wypisać na tablicy wszystkie imiona i strzałkami zaznaczyć, kto na kogo głosował. Powstał następujący graf:




Jak widać na grafie obok, największą liczbę trzech głosów otrzymali Ben, Iza, Jaś, Nel i Ola.

„Głosujmy ponownie!", „Zróbmy dogrywkę!", „Zagrajmy w marynarza!" – cała klasa zaczęła dyskutować, jak rozstrzygnąć wybory, kiedy nagle Jaś nieśmiało zauważył, że według niego to on wygrał. Argument był następujący: Skoro Ada, Cho i Dan głosowali na Bena, czyli byliby w stanie jemu powierzyć losy klasy, a sam Ben uznał, że to on, Jaś, byłby dobrym przewodniczącym, to można uznać, że Ada, Cho i Dan pośrednio popierają Jasia. Innymi słowy, Jaś zaproponował, aby popatrzeć na to, ile głosów zdobyły osoby, które na kogoś głosują. Tylko jego popierają trzy osoby, które same zdobyły po trzy głosy, więc Jaś ma najwięcej, bo aż 9, takich pośrednich głosów. Czyli to on powinien zostać przewodniczącym.

„Nie bądź taki cwany!", „Przewodniczący Jaś!", „Zagrajmy w marynarza!" – klasa nie była zgodna, czy przyjąć argumentację Jasia. Wtem Ola stwierdziła, że jeśli liczymy takie pośrednie głosy, to ona powinna wygrać, a nie Jaś. Bo skoro Ada pośrednio głosuje na Jasia, a Jaś zagłosował na nią, Olę, to zgodnie z tą logiką Ada również pośrednio popiera Olę. Ola chciałaby więc liczyć również, ile pośrednich głosów zdobyły osoby, które na kogoś głosują. Wyborcy Oli dostali 20 pośrednich i 7 bezpośrednich głosów (fakt, że niektóre pochodzą od samej Oli, strategicznie przemilczała), więc licząc wszystkie pośrednie i bezpośrednie głosy, Ola ma ich 30, a Jaś 28. „Czyli to ja powinnam zostać przewodniczącą" – zakończyła swój wywód.




Na rysunku po prawej rozrysowane są wszystkie spacery o długości co najwyżej trzy, kończące się w wierzchołkach „Jaś" i „Ola", czyli, jak to nazwała Ola, wszystkie „podwójnie pośrednie głosy" oddane na tych kandydatów.

„Ola na prezydenta!", „Nie! Przewodniczący Jaś!", „Zagrajmy w ..." – klasa nawet nie zdążyła zacząć się kłócić, kiedy głos zabrał Leo. Zauważył, że idąc dalej zgodnie z logiką Jasia i Oli, powinno się liczyć wszystkie pośrednie głosy niezależnie od liczby pośredników, a takich głosów byłoby nieskończenie wiele i nic by to nie dało. Lepiej założyć, że głos, który przechodzi przez pośrednika, jest mniej ważny, i liczyć go jak połowę albo jedną piątą głosu. Ogólnie można wybrać stałą $a$ i głos, który przechodzi przez $k$ pośredników, liczyć jako $a^k$ głosu. Wynik każdej osoby będzie wtedy nieskończoną sumą uwzględniającą wszystkie pośrednie głosy. Na przykład dla Jasia będzie to $K_J = 3 + 9a + 16a^2 + \ldots$ a dla Oli $K_O = 3 + 7a + 20a^2 + \ldots$ Jeśli $a$ będzie dostatecznie małe, to wszystkie takie

**Rozwiązanie zadania F 1032.**
Do okładek każdego z kondensatorów przyłożone jest to samo napięcie równe różnicy potencjałów w punktach A i B. Układ jest więc równoważny połączeniu równoległemu kondensatorów $C_1$, $C_2$ i $C_3$, a więc szukana pojemność $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Okazuje się, że zaproponowane przez Leo sumy są zbieżne zawsze wtedy, gdy $a$ jest mniejsze od $1/\lambda$, gdzie $\lambda$ to największa wartość własna macierzy sąsiedztwa grafu.

sumy będą zbieżne (tak się przynajmniej Leo wydawało, bo nie umiał jeszcze tego udowodnić).

„Tylko jak je policzyć?" – dopytywała klasa. Leo uśmiechnął się, bo był najbardziej zadowolony z tej części swojego pomysłu. Można zauważyć, że w każdym pośrednim głosie na Jasia ostatnim pośrednikiem będzie Ben, Iza lub Nel. Czyli każdy taki głos liczy się również jako głos na Bena albo Izę, albo Nel, ale z jednym pośrednikiem mniej (czyli jest przemnożony przez jedno $a$ mniej). Zatem wynik Jasia to $a$ razy suma wyników Bena, Izy i Nel plus trzy bezpośrednie głosy. Dostajemy zatem równanie rekurencyjne: $K_J = 3 + a \cdot (K_B + K_I + K_N)$. Możemy takie równanie napisać dla każdej osoby w klasie i otrzymamy układ równań, którego rozwiązaniem będą poszczególne sumy.

Leo o tym nie wiedział, ale jego metoda odpowiada *centralności Bonacicha–Katza,* zaproponowanej przez innego Leo – Leo Katza w 1953 roku. Miary centralności służą określeniu istotności wierzchołka w grafie (pisaliśmy już o nich w $\Delta^{11}_{16}$). Centralność Bonacicha–Katza ocenia wierzchołek $v$ w oparciu o ważność jego poprzedników: $\mathcal{P}(v)$. Formalnie jest to jedyna funkcja, która dla każdego wierzchołka $v$ spełnia następujące równanie rekurencyjne:

$$K_v = \sum_{u \in \mathcal{P}(v)} (a \cdot K_u + 1).$$

Ranking dla miary Leo, czyli centralności Bonacicha–Katza:

| poz. | $K_v$ $(a = 1/2)$ | $K_v$ $(a = 1/5)$ |
|---|---|---|
| 1. | Ola (136,2) | Jaś (5,73) |
| 2. | Nel (104,8) | Ola (5,66) |
| 3. | Jaś (92,6) | Nel (5,44) |
| 4. | Ula (69,1) | Iza (4,94) |
| 5. | Iza (62,1) | Max (3,29) |

Czytelnik może też pobawić się w liczenie centralności na poniższej stronie: `http://centrality.mimuw.edu.pl/editor` Podany graf można wczytać, wybierając opcję „Import > Predefined graph".

Klasa zabrała się do liczenia. Szybko okazało się (z pomocą komputera), że dla $a = 1/2$ wygrywa Ola przed Nel i Jasiem. Z ciekawości spróbowano jeszcze obliczyć wyniki dla $a = 1/5$. Wtedy okazało się jednak, że przoduje Jaś, a za nim jest Ola i Nel. Po tym odkryciu w klasie na nowo wybuchła kłótnia.

„Najlepsze $a$ to pół!", „Jedna piąta albo śmierć!", „Może zagramy w marynarza?" – dyskusja rozgorzała na dobre. Argumenty za mniejszymi i większymi stałymi padały z lewej i z prawej. Nagle głos zabrał Ben. „Ta cała dyskusja nie ma sensu. Według mnie wygrałem ja". I przedstawił swoje rozumowanie: Niektóre osoby zagłosowały na kilka osób, ale niektóre, jak na przykład Cho, wybrały tylko jedną. Sprawiedliwie byłoby, żeby głos tych osób był zatem ważniejszy. W związku z tym Ben proponuje, aby wartość głosu każdej osoby głosującej podzielić przez liczbę osób, na którą ona głosowała. W ten sposób Ben dostałby 2 i pół głosu (pół od Ady, jeden od Cho i jeden od Dana), czyli najwięcej ze wszystkich.

Pomysł podchwycił Leo. „Tu również można liczyć głosy pośrednie!" – zauważył. Przykładowo, jeśli jeden z dwóch głosów Ady jest na Bena, który z kolei jeden z trzech swoich głosów oddał na Nel, to można powiedzieć, że pośrednio Ada oddała jedną szóstą głosu na Nel, i policzyć go jako $a/6$ (mnożymy przez $a$, bo jest jeden pośrednik). Podobnie jak poprzednio, wynikiem jest suma wszystkich takich głosów. Na przykład dla Nel będzie to $PR_N = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}a + \frac{1}{2}a + \frac{2}{4}a + \ldots$ Wartości można znowu wyliczyć z pomocą równania rekurencyjnego. Tym razem postaci $PR_N = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + a \cdot (\frac{1}{3}PR_B + PR_M + \frac{1}{2}PR_O)$.

Ranking dla PageRanka:

| poz. | $PR_v$ $(a = 1/2)$ |
|---|---|
| 1. | Nel (3,78) |
| 2. | Jaś (3,70) |
| 3. | Ben (3,20) |
| 4. | Ola (2,96) |
| 5. | Iza (2,21) |

Więcej o PageRanku można przeczytać w $\Delta^{8}_{08}$ i $\Delta^{11}_{19}$.

Ta propozycja odpowiada z kolei innej mierze centralności – o nazwie *PageRank.* PageRank w 1999 roku wymyślili Larry Page i Sergey Brin do oceny istotności stron internetowych w tworzonej wówczas przez nich wyszukiwarce *Google.* Jeśli przez $\deg^{out}(u)$ oznaczymy *stopień wychodzący* wierzchołka $u$, czyli to, ile krawędzi z niego wychodzi (czyli ile głosów oddał), to PageRank wyrazić możemy wzorem

$$PR_v = \sum_{u \in \mathcal{P}(v)} \frac{a \cdot PR_u + 1}{\deg^{out}(u)}.$$

W tym momencie dyskusja w klasie stała się już niesłychanie chaotyczna. Wszyscy przekrzykiwali się między sobą, próbując ustalić, która z metod wyboru przewodniczącego jest najlepsza i kto powinien nim zostać. Co chwilę też pojawiały się kolejne metody i co chwilę ktoś wołał, że to on tak naprawdę wygrał. W końcu jednak zadzwonił dzwonek i trzeba było podjąć jakąś decyzję. Klasa zgodziła się więc, żeby ostatecznie wybory rozstrzygnąć, grając w marynarza.