

LOFAR w Polsce

Polska dołączyła do systemu LOFAR jako konsorcjum POLFAR. W jego skład weszło 9 instytucji: Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Uniwersytet Jagielloński, Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie, Poznańskie Centrum Superkomputerowo-Sieciowe – jako instytucje zaangażowane infrastrukturalnie, a obecnie tworzące konsorcjum operacyjne POLFARO, oraz Centrum Astronomiczne Mikołaja Kopernika PAN, Uniwersytet Szczeciński, Uniwersytet Zielonogórski, Uniwersytet Mikołaja Kopernika i Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu. W roku 2015 w trzech polskich lokalizacjach powstały stacje systemu: Stacja PL612 w Baldach pod Olsztynem, należąca do Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, gdzie zainstalowano maksymalną konfigurację, czyli łącznie 3264 dipole. Podobna konfiguracja znajduje się w stacji w Borówcu pod Poznaniem, należącej do Centrum Badań Kosmicznych. Ostatnia stacja, należąca do Uniwersytetu Jagiellońskiego, została zbudowana w Łazach koło Krakowa, w nieco mniejszej wersji. Od początku 2016 roku polskie stacje biorą udział w badaniach prowadzonych w ramach Europejskiej grupy – International LOFAR Telescope (ILT). O transfer gigantycznej ilości danych oraz częściowo o ich przechowywanie dba Poznańskie Centrum Superkomputerowo-Sieciowe.

wymaga bardzo skomplikowanych systemów cyfrowych i informatycznych. Zatem jeśli te będą odpowiednio wydajne, to za pomocą interferometru LOFAR można teoretycznie obserwować nawet 2^8 , czyli 256 obiektów jednocześnie, co wiąże się z maksymalnym podziałem pasma na tyleż kanałów.

Co badamy radioteleskopem LOFAR?

Trwające już od ponad dekady obserwacje radioastronomiczne na falach wcześniej nieeksplorowanych zaowocowały wieloma znakomitymi wynikami, na wyliczenie których nie ma tu miejsca. Warto jednak podkreślić, że od początku zainicjowano kilka wiodących tematów badawczych – nazwano je projektami kluczowymi. W wielu z tych projektów uczestniczą naukowcy z Polski. Jednym z nich są obserwacje Słońca i Kosmiczna Pogoda – tematy bardzo istotne nie tylko w sensie poznawczym, ale i społecznym, bo wyniki tych badań wykorzystywane są w telekomunikacji satelitarnej. Wykorzystując LOFAR, możemy też na falach radiowych obserwować najwcześniejsze momenty istnienia Wszechświata – tzw. epokę rejonizacji. Ponadto tworzymy przeglądy całego nieba uwzględniające odległe obiekty kosmiczne, takie jak kwazary czy radiogalaktyki, badając m.in. ich pola magnetyczne. Ważną częścią pracy systemu LOFAR (także pojedynczych jego elementów) są obserwacje zjawisk i obiektów szybkozmiennych w czasie. Do takich zaliczamy pulsary, które akurat w zakresach częstotliwości LOFAR-a emitują najwięcej promieniowania. Dzięki teleskopowi LOFAR badane są też promieniowanie kosmiczne oraz zjawiska burzowe.

Warto na koniec dodać, że LOFAR to niezwykle ważny instrument dla prawdopodobnie najbardziej rozbudowanego radioteleskopu, który aktualnie powstaje w Australii i RPA – jest bowiem swego rodzaju „pathfinderem” technologii dla projektu *Square Kilometre Array* (SKA). Sam LOFAR niebawem wkroczy też w kolejną fazę swojego istnienia. W 2022 roku zacznie się bowiem transformacja systemu do wersji LOFAR 2.0.

O pewnych średnich w ułamkach łańcuchowych

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Prawo Benforda jest przykładem niezwyklej zależności obserwowanej wśród danych liczbowych. Głosi ono, że dla wielu zbiorów liczb o różnym pochodzeniu (powierzchnia państw, kwoty wystawiane na czekach, parametry pierwiastków chemicznych, pierwsze cyfry kolejnych potęg liczby 143) pierwsze cyfry znaczące tych liczb występują z częstością w dobrym przybliżeniu określoną przez wzór

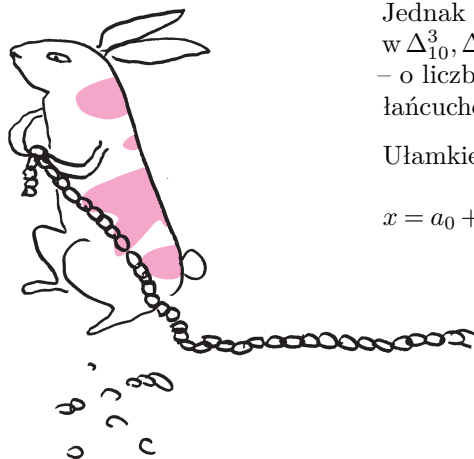
$$(1) \quad P(k) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k} \right),$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, 9$. Tym samym około 30,1% wszystkich liczb w wielu zbiorach danych rozpoczyna się od 1, a tylko 4,6% od 9. Prawo to jest dość uniwersalne, choć oczywiście nie wszystkie dane liczbowe je spełniają (np. wzrost człowieka).

Jednak nie prawem Benforda będziemy się tu zajmować (o tym pisano już w $\Delta_{10}^3, \Delta_{10}^{12}$ czy Δ_{16}^4). Nas interesować będzie podobne w sformułowaniu pytanie – o liczby, jakie znajdują się w rozwinięciu liczby rzeczywistej w ułamek łańcuchowy. Wyjaśnijmy pokrótce to pojęcie (omówione np. w Δ_{21}^5).

Ułamkiem łańcuchowym liczby $x > 0$ nazywamy wyrażenie postaci

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k + \dots}}}}}}, \quad \text{przy czym każde } a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$



**Rozwiązanie zadania F 1029.**

Zderzenie meteorytu z powierzchnią Ziemi jest zderzeniem całkowicie niesprężystym i cała energia kinetyczna E „pocisku” przetwarzana jest na odkształcenie i kruszenie (częściowo też topienie) materiału gruntu (skał) w objętości V odpowiadającej objętości krateru. Mamy więc $E \propto Y \cdot V$. Przyjmując, że kratery uderzeniowe mają podobne kształty, otrzymujemy, że $V \propto D^3$, gdzie D jest średnicą krateru. Ostatecznie:

$$D \propto E^{1/3}.$$

Rozważany w treści zadania i w jego rozwiązaniu model zakładający dominację procesów „niszczenia” gruntu dotyczy niewielkich kraterów o średnicach rzędu 1 m. Głębokość krateru jest proporcjonalna do jego średnicy dla kraterów niewielkich (do ok. 1 km). K. A. Holsapple, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 21, 333 (1993). R. J. Pike, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 11th, pp 2159-2189 (1980).

Formalnie $P(k)$ definiujemy następująco. Niech $a = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ oraz niech $K_{n,k}$ oznacza liczbę liczb k w rozwinięciu liczby a w ułamek łańcuchowy na pozycjach od 1 do n . Wtedy

$$P(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n,k}}{n}.$$

k	$P(k)$	k	$P(k)$
1	0,415037	10	0,011973
2	0,169925	100	0,000141
3	0,093109	1000	$1,44 \cdot 10^{-6}$
4	0,058894	10^6	$1,44 \cdot 10^{-12}$
5	0,040642		

Nietrudno uwierzyć w (2). Po zlogarytmowaniu lewa strona staje się granicą średnich logarytmów pierwszych n liczb rozwinięcia x w ułamek łańcuchowy, a prawa strona wartością oczekiwaną logarytmu zmiennej o rozkładzie Gaussa–Kuzmina.

Często zamiast rozległej notacji stosuje się notację poziomą i zapisuje powyższy ułamek w jednej linii jako wyrażenie

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots].$$

Ułamki łańcuchowe mogą być nieskończone (jak w zapisie obok) lub skończone. Dowodzi się ponadto, że każda liczba rzeczywista może zostać zapisana w postaci takiego ułamka.

Własności. Ułamek łańcuchowy liczby wymiernej p/q jest skończony. Ułamek łańcuchowy liczby niewymiernej jest nieskończony. Jeśli x jest pierwiastkiem niewymiernym trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to jego ułamek łańcuchowy jest okresowy. Na przykład $\sqrt{114} = [10; \overline{1, 2, 10, 2, 1, 20}]$, gdzie poziome nadkreślenie oznacza część okresową.

W dalszej części rozważać będziemy tylko liczby rzeczywiste w przedziale $[0, 1]$, i wtedy również $a_0 = 0$, jednak rozważania można będzie przenieść na pełen zakres liczb. W ułamku łańcuchowym dowolnej liczby niewymiernej interesować nas będzie teraz problem następujący: czy istnieje odpowiednik prawa Benforda dla liczb a_1, a_2, a_3 i kolejnych? Zwróćmy uwagę na to, że pytamy o **liczby**, nie o cyfry wiodące kolejnych a_i . Okazuje się, że dla *prawie wszystkich* (który to termin wyjaśnimy niebawem) liczb rzeczywistych x oraz dowolnej liczby naturalnej $k > 0$ granica $P(k)$ częstości występowania k w coraz dłuższym rozwinięciu x w ułamek łańcuchowy istnieje i dana jest wzorem

$$P(k) = \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Rozkład prawdopodobieństwa określony powyższym wzorem nosi nazwę rozkładu **Gaussa–Kuzmina**. Gauss rozważał go już na początku XIX wieku, Kuzmin zaś w pierwszej połowie XX wieku określił rząd zbieżności rozkładów kolejnych liczb „losowego” ułamka łańcuchowego do powyższego wyrażenia.

Tabela na marginesie przedstawia kilka wybranych wartości rozkładu Gaussa–Kuzmina. Niezwykle jest w nim to, że choć a_i może przyjmować nieskończenie wiele wartości, to z prawdopodobieństwem nieco większym niż $2/3$ jest to jedna z liczb 1, 2, 3. Ponadto liczby 14 wwyż stanowią 10%, a od 144 wwyż poniżej 1% wszystkich współczynników występujących w „typowym” ułamku łańcuchowym. W ogólności, liczby od 1 do N występują w rozwinięciu „typowej” liczby rzeczywistej w ułamek łańcuchowy z częstością

$$P(1) + P(2) + \dots + P(N) = \sum_{k=1}^N \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log_2 \frac{2N+2}{N+2},$$

a ostatnią równość nietrudno wykazać przez indukcję.

We wcześniejszym sformułowaniu użyliśmy określenia „prawie wszystkich”. Określenie to oznacza, że zbiór liczb pozbawionych tej własności jest w pewnym sensie niewielki, jego miara Lebesgue’a jest równa 0. O mierze Lebesgue’a (którą oznaczamy przez λ) nie będziemy się szczegółowo rozpisywać (jej formalną definicję można znaleźć w Δ_{19}^6), tutaj zaznaczymy tylko, że miarą Lebesgue’a odcinka jest jego długość, zbiór jednoelementowy ma miarę 0, tak samo jak każdy zbiór przeliczalny, w szczególności zbiór liczb wymiernych. Z kolei zbiór liczb niewymiernych zawarty w odcinku (a, b) ma miarę równą $b - a$.

Wróćmy do rozkładu Gaussa–Kuzmina. Na jego podstawie można sformułować i udowodnić bardzo ciekawy wniosek dotyczący średniej geometrycznej liczb występujących w rozwinięciu liczby $x \in [0, 1]$ w ułamek łańcuchowy.

Twierdzenie. Dla prawie wszystkich $x \in [0, 1]$ poniższa granica średnich geometrycznych istnieje i jest równa

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right)^{\log_2 k} =: K_0.$$

Występującą powyżej stałą K_0 nazywa się stałą Chinczyna i jest ona w przybliżeniu równa $K_0 \approx 2,685452001$. Jest to liczba, o której niewiele wiadomo,

począwszy od tego, czy jest to liczba wymierna. Wiadomo jednak, że jest również granicą wyrażenia zdefiniowanego dla $p < 1$:

$$K_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p},$$

gdy $p \rightarrow 0$. Okazuje się, że istnieje jawny wzór na K_p . Jest on dany przez wyrażenie podobne do tego z Twierdzenia:

$$K_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^p \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Jeśli podstawimy teraz $p = -1$, to we wzorze na K_p otrzymamy granicę średnich harmonicznych wyrazów rozwinięcia liczby x w ułamek łańcuchowy, która dla prawie wszystkich x jest równa $K_{-1} \approx 1,74540566$.

Wydaje się, że nie powinniśmy mieć żadnego problemu ze wskazaniem liczby x , której liczby rozwinięcia w ułamek łańcuchowy pojawiają się zgodnie z rozkładem Gaussa–Kuzmina i spełniają (2), skoro prawie wszystkie liczby mają tę własność. Okazuje się, że sprawa jest jednak zupełnie inna – do dziś nie znamy **żadnego jawnego** (w sensie: niestworzonego tylko na tę okoliczność) przykładu liczby, która ma przedstawione własności. Jest to fakt zdumiewający, gdyż wcześniej napisaliśmy, że prawie wszystkie liczby rzeczywiste spełniają to prawo! Potrafimy co prawda wskazać taki ciąg liczb całkowitych, których średnie geometryczne zbliżają się do K_0 , w szczególności więc wiemy, jak może wyglądać ułamek łańcuchowy takiej liczby (a zatem i sama liczba). Nie potrafimy jednak podać żadnego „szkolnego” przykładu, typu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, „złota liczba”, e (o tych wiemy, że nie spełniają tego prawa) lub π (kwestia tej stałej pozostaje otwarta).

Równości wiążące stałe K_0 oraz K_p z odpowiednimi granicami są faktami przyporządkowywanymi teorii liczb, jednak ich współczesne dowody wykorzystują w dużej mierze aparat teorii miary i elementy tak zwanej teorii ergodycznej. Jest to dziedzina matematyki koncentrująca się na zachowaniu układu zmieniającego się wraz z iterowaniem jakiegoś procesu. Ponadto przestrzeń stanów jest wyposażona w miarę (probabilistyczną) „ważącą” różne stany. Przedstawione w artykule wyniki można uzyskać, wykorzystując jedno z najważniejszych twierdzeń teorii: twierdzenie ergodyczne Birkhoffa.

Stała Chinczyna K_0 pojawia się w wielu innych interesujących tożsamościach. Poniżej prezentujemy jedną z bardziej eleganckich:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - 1/k) \ln(1 + 1/k) = -\ln(K_0) \ln 2.$$

Dowód tej relacji jest dość złożony, dlatego nie będziemy go przedstawiać na łamach *Delty*. Co ciekawe, powyższa tożsamość ma swojego bliźniaka wyrażonego w języku całek:

$$\ln(K_0) \ln(2) = \int_1^{\infty} \frac{\ln[x]}{x(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{\ln[1/x]}{1+x} dx,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Przypomnijmy – całka z funkcji nieujemnej na danym przedziale jest równa polu powierzchni części płaszczyzny zawartej między wykresem funkcji a osią OX .

Na koniec wróćmy jeszcze na chwilę do liczby π . Ułamkiem łańcuchowym tej liczby jest

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$$

i choć nie wiemy, czy średnia geometryczna liczb rozwinięcia π w ułamek łańcuchowy zbiega do K_0 , to jednak wiemy, że dla 17 001 303 początkowych liczb ta średnia jest równa 2,686393, a zatem jest to wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Podobnie średnia harmoniczna tych liczb to 1,745882, a więc zgodność jest do 3 miejsc po przecinku. Oczywiście są to tylko dane empiryczne i nie można z nich wyciągać żadnych ogólnych wniosków. Podobne obserwacje zauważono dla stałej Eulera γ czy dla samej stałej Chinczyna K_0 , jednak problem zbieżności średnich geometrycznych do stałej K_0 pozostaje dla nich otwarty.

Średnią harmoniczną liczb a_1, \dots, a_n jest

$$H(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Złota liczba, $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$ mają okresowe rozwinięcia w ułamki łańcuchowe, jako rozwiązania równań kwadratowych o współczynnikach całkowitych. Liczba e ma rozwinięcie postaci

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots],$$

gdzie co trzecia liczba jest kolejną liczbą parzystą, pozostałe zaś są równe 1.

Zachęcamy do przeczytania artykułu „O potęgach dwójki” Pawła Strzeleckiego z Δ_{84}^8 , dostępnego również on-line.



Rozwiązanie zadania F 1030.

Graniczna prędkość spadku osiągnięta jest, gdy siła oporu zrówna się z sumą sił przyciągania grawitacyjnego ciała przez powierzchnię planety i siły wyporu jej atmosfery. Gęstość ciała ludzkiego jest niewiele większa od gęstości wody $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ – przyjmijmy, że jest jej równa. Niech objętość skaczącego wynosi V . Mamy wówczas: na Ziemi

$$\rho g V - \rho_z V g = \frac{1}{2} c \rho_z v_z^2 S$$

i na Wenus

$$\rho g_w V - \rho_w V g_w = \frac{1}{2} c \rho_w v_w^2 S,$$

gdzie przyjęliśmy, że współczynnik c , objętość i powierzchnia człowieka są na obu planetach takie same (wymagaloby to zastosowania sztywnego skafandra ze względu na 91 razy większe ciśnienie atmosfery na Wenus niż na Ziemi).

Otrzymujemy:

$$\left(\frac{v_w}{v_z} \right)^2 = \frac{(\rho - \rho_w) \rho_z g_w}{(\rho - \rho_z) \rho_w g}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $v_w = 0,123 v_z = 24,6 \text{ km/h}$ – to mniej niż 7 m/s, czyli prędkość, z jaką na Ziemi lądują skoczkiwie spadochronowi.