

w rzeczywistym świecie fizycznym mówi nam, że idealizacja polegająca na pominięciu odkształceń jest w problemie kul niedopuszczalna. Druga zasada jest uogólnieniem wniosków płynących z wielu różnych doświadczeń i w ten sposób uwzględnia to, jakie są rzeczywiste właściwości materii wynikające z jej mikroskopowej (cząsteczkowej) budowy. Przykład kul pokazuje też funkcjonowanie termodynamiki jako teorii fenomenologicznej: pole ciężkości wpływa w pewien sposób na energię wewnętrzną U kuli, ale nie musimy tego analizować na poziomie mikroskopowym. Wystarczy wiedzieć, że jest to zakodowane w równaniu stanu (8). A równanie to – poprzez związek $dQ = TdS$, będący matematyczną konsekwencją drugiej zasady termodynamiki – dyktuje, jak U i w konsekwencji C_g zależą od g . Potrzebne jest więc tylko wyznaczenie równania stanu (8), a kompletna informacja o jego

postaci jest zawarta w bezpośrednio mierzalnych współczynnikach, takich jak α .

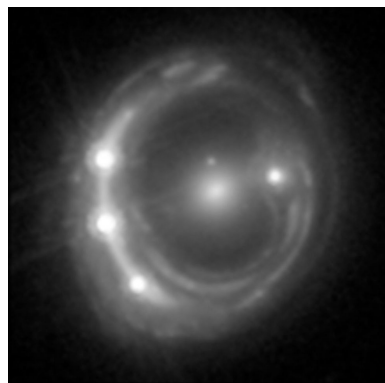
Termodynamika, dzięki niewielkiej liczbie zasad, na których jest oparta, jest najogólniejszą z teorii fizycznych. Stosuje się ona do wszystkich makroskopowych układów. Czasem, jak w przypadku takich egzotycznych układów jak czarna dziura, słusność jej zasad może wydawać się nieoczekiwana, ale pozostaje niewzruszonym faktem. Odznacza się też wielką elegancją formalną i znakomicie służy wyrabianiu nie tylko intuicji fizycznej, ale także precyzji rozumowania i formułowania myśli. Dlatego na zawsze powinna pozostać fundamentem wykształcenia każdego fizyka.

[*] G. De Palma, M. C. Sormani *Counterintuitive effect of gravity on the heat capacity of a metal sphere: re-examination of a well-known problem*, American Journal of Physics **83**, 723 (2015).

O soczewkach grawitacyjnych produkujących nieparzystą liczbę obrazów

*Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Konrad TOPOLSKI*

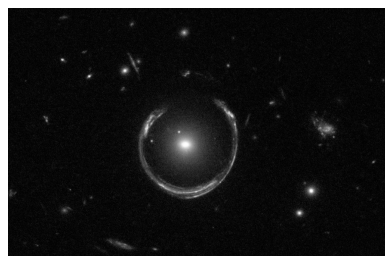


Rys. 1. Obraz odległego kwazara RXJ1131-1231; centralnie położona galaktyka rozsmarowuje obraz tła, tworząc jasny łuk (po lewej) i cztery wyraźne obrazy. ESA/Hubble/NASA/Suyu

Jednym z najbardziej intrygujących zastosowań topologii różniczkowej w astronomii jest *twierdzenie o nieparzystej liczbie obrazów* w opisie zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Mówi ono o tym, że przy pewnych założeniach na temat charakteru soczewki oraz źródła liczba obrazów, jakich może spodziewać się obserwator, jest zawsze nieparzysta. Czytelnicy zapoznani z obserwacjami astronomicznymi mogą zaprotestować – wiele przypadków soczewkowania tworzy bowiem parzystą liczbę obrazów. Mają tu oni oczywiście rację – przytoczone twierdzenie mówi bowiem o pewnym szczególnym przypadku, realizowanym nie we wszystkich sytuacjach.

Niezgodność pomiędzy teorią a praktyką spowodowana jest tu zarówno uproszczeniami w twierdzeniu, które wykluczają pewne scenariusze obserwowane w rzeczywistości, jak i trudnościami w znajdowaniu kolejnych obrazów, z jakimi muszą mierzyć się astronomowie.

Opowiemy teraz pokrótce, czym jest soczewkowanie grawitacyjne i kiedy zachodzi. Przedyskutujemy potem treść tytułowego twierdzenia, wprowadzimy nieco aparatu matematycznego i przedstawimy szkic dowodu. Na zakończenie wskażemy potencjalne uogólnienia i rozwinięcia tego pomysłu.



Rys. 2. Pierścień Einsteina, o nazwie LRG 3-757, tworzący niepełny okrąg. Pierścień Einsteina powstaje, gdy (silne) soczewkowanie tworzy obraz okręgu lub, częściej, łuku okręgu. ESA/Hubble & NASA

Soczewkowanie grawitacyjne

Silne soczewkowanie występuje najczęściej w wyniku przejścia promieni świetlnych pochodzących od galaktyki lub aktywnego kwazara przez soczewkę, którą stanowi inna galaktyka bądź gromada galaktyk. Charakterystyczne dla tego soczewkowania jest powstanie wielokrotnych obrazów źródła oraz w bardzo szczególnym przypadku, gdy obserwator, soczewka i źródło znajdują się w przybliżeniu na jednej prostej – pierścienia Einsteina. Taki pierścień jest mocno zdeformowanym obrazem źródła. Model używany do opisu soczewkowania zakłada zwykle przybliżenie geometrycznie cienkiej soczewki (tzn. promień świetlny porusza się po linii prostej z wyjątkiem jednego odchylenia zmieniającego jego kierunek ruchu) i niewielkie odstępstwo od współliniowości składników (rys. 3). Równanie dla takiej soczewki grawitacyjnej ma postać:

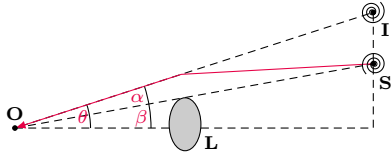
$$\beta = \theta - \alpha(\theta),$$

gdzie matematyczny opis zjawiska ugięcia promieni świetlnych zawarty jest w zależności $\alpha(\theta)$. Przy zadanym kącie β równanie dopuszcza wiele rozwiązań ze względu na θ , co oznacza powstanie obrazów wielokrotnych.

Przytoczmy teraz treść interesującego nas twierdzenia.

Twierdzenie. Liczba obrazów źródła po przejściu przez przezroczystą, nieosobliwą soczewkę grawitacyjną o skończonych rozmiarach jest nieparzysta.

Przezroczystość soczewki oznacza, że światło ze źródła nie jest pochłaniane przez soczewkę. Założenie o nieosobliwości w tym twierdzeniu wyklucza między innymi możliwość uwięzienia promieni świetlnych w soczewce, np. przez czarną dziurę. Nie wyklucza to jednak możliwości fizycznego zaistnienia fenomenu nieparzystej liczby obrazów, gdy soczewką jest czarna dziura.

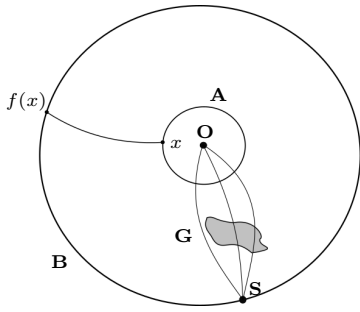


Rys. 3. Modelowanie soczewkowania grawitacyjnego za pomocą geometrycznie cienkiej soczewki. O jest położeniem obserwatora, S – źródła, L – soczewki, a I – obrazu. Zdefiniowane odległości wyznaczone są poprzez przeprowadzenie linii prostej prostopadłej do płaszczyzn soczewki oraz źródła. Na rysunku zaznaczono też kąty: α – kąt pomiędzy obserwowanym obrazem a prawdziwym położeniem źródła, β – kąt pomiędzy linią prostą a prawdziwym położeniem źródła oraz θ – pomiędzy prostą a obrazem

O topologii różniczkowej w kilku słowach

Przyjmijmy, że B to duża sfera (o środku w punkcie obserwacji O), na której znajduje się źródło S , a A to „mała” sfera odpowiadająca kierunkom, z których dochodzą do obserwatora promienie światła. Odwracając bieg promieni, można wprowadzić funkcję $f : A \rightarrow B$ w następujący sposób. Z punktu obserwacji wysyłamy promień w kierunku $x \in A$, który oczywiście może się wyginać przy przechodzeniu przez różne galaktyki, i patrzymy, w którym miejscu $f(x) \in B$ dochodzi do sfery B . Obserwowane obrazy źródła odpowiadają wtedy przeciwobrazowi $f^{-1}(\{S\})$ (gdzie S to obserwowane przez nas źródło). Może to być więcej niż jeden punkt, co oznacza więcej niż jeden obraz.

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie gładką funkcją pomiędzy dwiema sferami dwuwymiarowymi. Możemy sobie wyobrazić, że sfera A znajduje się w obszarze ograniczonej sferą B . Przekształcenie sfery A na B przy użyciu funkcji f możemy sobie wyobrazić jako rozciągnięcie sfery A , tak żeby przykleić ją od wewnątrz do sfery B . Gładkość f oznacza, że możemy sferę A rozciągać, zaginać tak, żeby przyklejać kilka warstw, ale nie wolno nam jej rozcinać. Formalnie jako założenie twierdzenia przyjmuje się, że funkcja f ma określone wszystkie pochodne.



Rys. 4. Ilustracja sfer używanych do opisu soczewkowania grawitacyjnego. Źródło światła znajduje się w punkcie S , a obserwator w punkcie O . Pomiędzy S a O znajduje się przezroczysta galaktyka G . Definiujemy odwzorowanie z mniejszej sfery A do większej B . Odwzorowanie $f : A \rightarrow B$ przypisuje punktowi x na sferze A punkt $f(x)$ na sferze B , jeśli promień światła przechodzący przez punkty O i x przecina B . Liczba obrazów S widzianych przez O jest równa liczbie punktów ze sfery A , których obraz pod działaniem f jest punktem S

Definicja 1. Zbiorem punktów krytycznych funkcji f nazywamy zbiór wszystkich punktów, w których macierz pochodnych nie jest odwracalna,

$$\Sigma_f = \{x \in A \mid \det(Df(x)) = 0\}.$$

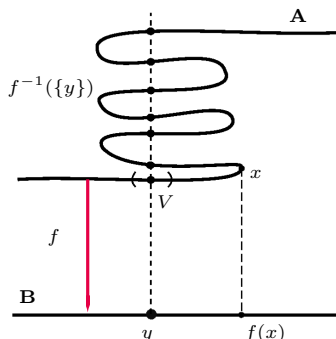
Zbiorem wartości krytycznych f nazywamy obraz powyższego zbioru pod działaniem f , czyli $f(\Sigma_f)$. Punkty A , które nie są punktami krytycznymi, nazywamy punktami regularnymi funkcji f , a wartości funkcji f , które nie są krytyczne – wartościami regularnymi.

W naszym przykładzie przyklejania sfery A do sfery B punkty krytyczne to te znajdujące się na brzegu fałdy (na przykład punkt x na rysunku 5). Natomiast punkty regularne to te, w których funkcja f jest lokalnie odwracalna, czyli przeciwobraz punktu regularnego y może zawierać wiele punktów, ale każdy z tych punktów ma otoczenie, które funkcja f przekształca w sposób jednoznaczny (i gładki) na otoczenie punktu y . W punktach krytycznych funkcja f może nie być odwracalna nawet lokalnie.

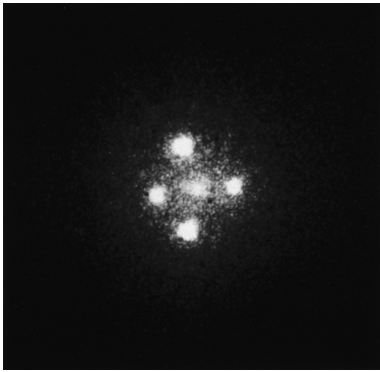
Definicja 2. Definiujemy stopień topologiczny (stopień Brouwera) wartości regularnej y jako:

$$\deg(f, B, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sgn} \det(Df(x)).$$

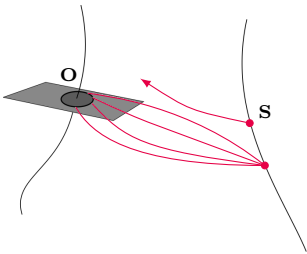
Ten pozornie skomplikowany wzór to suma znaków wyznaczników macierzy pochodnej, czyli w istocie suma jedynek i minus jedynek. Znak jacobianu determinuje, czy otoczenie punktu x jest przyklejane do sfery B z zachowaniem orientacji (znak plus), czy ze zmianą orientacji na przeciwną (znak minus). Stopień topologiczny zlicza więc, o ile więcej (lub mniej) jest punktów przeciwobrazów $f^{-1}(\{y\})$, w których nie zmienia się orientacja względem punktu y , od tych, w których się zmienia. W naszym przypadku punkty $f^{-1}(\{S\})$ są po prostu obrazami źródła! Stopień topologiczny oblicza natomiast różnicę między liczbą obrazów prostych i odwróconych.



Rys. 5. Schematyczne przedstawienie odwzorowania $f : A \rightarrow B$ w przypadku jednowymiarowym. Widoczne są fałdy nad punktem $y \in B$, któremu odpowiada przeciwobraz $f^{-1}(\{y\})$. Funkcja f jest w otoczeniu V jednego z tych punktów lokalnym dyfeomorfizmem na obraz $f(V)$. Zilustrowany jest punkt osobliwy x , w którym funkcja nie jest odwracalna i $\det(Df(x))$



Rys. 6. Krzyż Einsteina (Q2237+030, QSO 2237+0305) to jeden z pierwszych zaobserwowanych przykładów silnego soczewkowania grawitacyjnego, którego źródłem jest kwazar oddalony od nas o 8 miliardów lat świetlnych. Soczewkowanie przejawia się tutaj poprzez zwiokrotnienie obrazu źródła. Widoczne są bowiem cztery wyraźne obrazy zewnętrzne i jeden słabszy w centrum; towarzyszy im ogólne zniekształcenie. Obraz centralny jest najsłabszy, ponieważ został w największym stopniu rozproszony na masie soczewki.
NASA, ESA, STScI



Rys. 7. Ilustracja warunku koniecznego do powstania wielokrotnych obrazów. Hiperpowierzchnia, na której znajduje się obserwator, ma w jego otoczeniu płaską metrykę, a trajektorie swobodnych fotonów wysłane w pewnym momencie w przeszłości przecinają ją w kształcie figury zbliżonej do sfery. Pomiędzy źródłem a obserwatorem zachodzi soczewkowanie

Szkic dowodu

Kluczowy w naszym dowodzie jest fakt, że stopień topologiczny funkcji f w punkcie obserwacji \mathbf{S} (rys. 4) jest równy 1. Ścisłe rzecz biorąc, okazuje się, że stopień topologiczny funkcji gładkiej jest stały (na zbiorze spójnym, czyli składającym się „z jednego kawałka”). Łatwo sobie wówczas wyobrazić, że przynajmniej jeden punkt ze sfery \mathbf{B} ma jednoelementowy przeciwobraz (czyli istnieje punkt na sferze \mathbf{A} , do którego fałdy nie zawierają). Ponieważ zaś sfera jest spójna, to każdy punkt na niej ma stopień równy jeden!

Można to intuicyjnie zilustrować, zaniedbując jeden wymiar (w przypadku dwuwymiarowym dowód jest trochę bardziej złożony, ale opiera się na analogicznych argumentach). Przypadek jednowymiarowy przedstawia rysunek 5. Nad każdym punktem przeciwdziedziny ($y \in \mathbf{B}$) leżą fałdy dziedziny (\mathbf{A}). Jeśli pofałdowanie zmierza na rysunku w prawo, odpowiada ono obrazowi o orientacji prostej, a jeśli zawraca, to odpowiada mu obraz odwrócony. Skoro funkcja f jest gładka, to pofałdowania nie mogą się przerywać – mogą się tylko rozciągać i zaginać. Niezależnie od tego, ile razy zawrócą, muszą w końcu wrócić do pierwotnego kierunku – chcemy bowiem w sposób gładki odwzorować naszą pierwotną sferę \mathbf{A} . Oznacza to, że dla każdego punktu na sferze \mathbf{B} mamy zawsze przynajmniej jedną fałdę więcej zmierzającą w prawo niż w lewo. Fałdy zmierzające w prawo nad punktem dodają do stopnia topologicznego wartość $+1$, a te idące w lewo wartość przeciwną.

Gdy pęk promieni przejdzie przez soczewkę grawitacyjną, oczekujemy wielu obrazów pochodzących z jednego źródła. Załóżmy, że jest ich łącznie $n = n_+ + n_-$, dla n_+ odpowiadającego liczbie obrazów prostych, a n_- – odwróconych.

Stosując rozważania dotyczące pofałdowań dla punktu \mathbf{S} , widzimy, że zachodzi $n_+ - n_- = 1$. Płynie stąd prosty wniosek, że $n_+ = n_- + 1$, a zatem całkowita liczba obrazów to $n = 2n_- + 1$. Udowodniliśmy tym samym tytułowe twierdzenie.

Dyskusja i uwagi

Sformalizowanie powyższego dowodu do postaci działającej w pewnych ogólnych czasoprzestrzeniach można znaleźć w [3] i [1], i wymaga ono sporo wysiłku. Pierwszą trudnością jest odpowiedni dobór powierzchni \mathbf{A} i \mathbf{B} takich, by były topologicznymi sferami oraz by funkcja f miała odpowiedni stopień różniczkowalności. Po drugie, istnienie choćby jednego punktu $y \in \mathbf{B}$ takiego, że jego przeciwobraz jest zbiorem jednoelementowym, nie zawsze jest tak oczywiste, jak w omówionym powyżej szczególnym przypadku. Można sobie wyobrazić specyficzne ustawienie soczewki i źródła, dla którego taki scenariusz nie zaistnieje.

Najważniejszym zastrzeżeniem wobec powyższego dowodu jest jednak fakt, że nie bierze on pod uwagę struktury topologicznej (kształt) i metrycznej (krzywizna czasoprzestrzeni, pomiar odległości). Jeśli jednak ograniczymy się do *rozsądnych* topologii czasoprzestrzeni oraz słabych pól grawitacyjnych, dowód odbywa się w przestrzeni euklidesowej (można go znaleźć w [2]) i do jego przeprowadzenia wystarczy wiedza z kursu analizy matematycznej.

Okazuje się, że odpowiedni warunek do uogólnienia twierdzenia na czasoprzestrzeń \mathcal{M} o dowolnej topologii i metryce g formalnie brzmi następująco:

Literatura

- [1] Fabio Giannoni i Marco Lombardi. “Gravitational lenses: odd or even images?” W: *Classical and Quantum Gravity* 16.6 (1999), s. 1689–1694. doi: 10.1088/0264-9381/16/6/303.
- [2] Marco Lombardi. “An application of the topological degree to gravitational lenses”. W: *Modern Physics Letters A* 13.02 (1998), s. 83–86. doi: 10.1142/S0217732398000115. eprint.
- [3] Volker Perlick. *Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective*. 2010. arXiv: 1010.3416 [gr-qc].

Przecięcia pęków geodezyjnych zerowych (trajektorie swobodnych fotonów) wychodzących ze źródła S z przestrzenną hiperpowierzchnią o metryce lokalnie euklidesowej, na której znajduje się obserwator, tworzą powierzchnie z osobliwościami przybliżające (w sensie topologicznym) sfery. Warunek ten ilustrowany jest na rysunku 7.

Zaawansowane narzędzia topologii różniczkowej, w tym tzw. *teoria Morse’a zerowych geodezyjnych*, pozwalają ściśle rozważać warunki powstawania parzystej bądź nieparzystej liczby obrazów, a nawet klasyfikować je ze względu na ich charakter (obrazy ścięte, powiększone, przekształcone w łuki okręgów) [1].