

deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $J \cdot s$ $\pi=3,141592\dots$

NR 7 (566) 2021
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

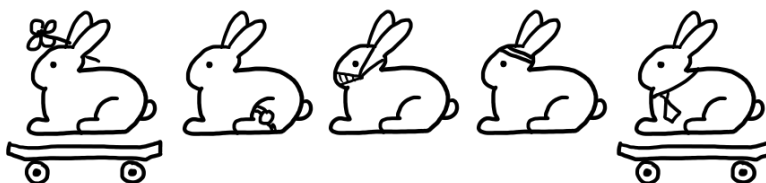
**Kartografia
(normalna)
Płaszczków**
str. 4



Nakład: 3500 egz.



W następnym numerze:
O tym, jak użyć królików doświadczalnych
w matematyce.




SPIS TREŚCI NUMERU 7 (566)

Tunelowe podglądanie atomów
powierzchni
Andrzej Wawro


Kartografia (normalna) Płaszczyznowa
Michał Miśkiewicz

Równania różniczkowe i geometria (II)
*Grzegorz Łukaszewicz,
Piotr Krzyżanowski*

 Zadania

 Ile na oko można zobaczyć w lustrze?
Agnieszka Chudek

Wyniki olimpiad 2020/2021

 „Obcy” z planety Ziemia
Magdalena Fikus

Astronomia milimetrowa –
obserwatorium ALMA
Aleksandra Hamanowicz


Jak nie wierzyć w liczby rzeczywiste?
Aleksy Schubert

Klub 44

Prosto z nieba: Misja DART

Niebo w lipcu

Aktualności
Odkrycie, którego jeszcze nie było

 Jednoznaczność rozkładu w \mathbb{N} –
część 2
Bartłomiej Bzdęga

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej,
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący,
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,
dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk,
dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,
dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak,
dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,
prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec,
Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac.,
Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski,
Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł

 Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

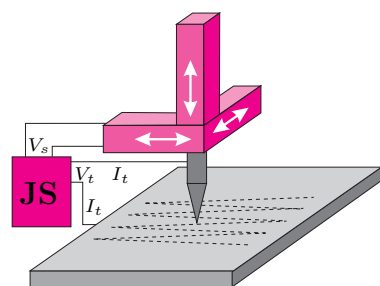
str. 25

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

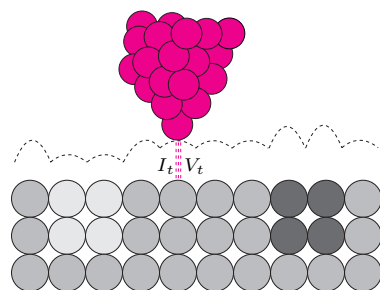
Tunelowe podglądanie atomów powierzchni

Andrzej WAWRO

Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk



Rys. 1a. Zasada działania STM. Igła mikroskopu skanuje ponad powierzchnią próbki wzdłuż przerywanej linii. Jej ruch w trzech kierunkach jest wymuszany przez piezoelementy, do których przykładane jest napięcie V_s , generowane przez jednostkę sterującą (JS). Wskutek polaryzacji V_t przez złącze tunelowe igła-próbka płynie prąd I_t



Rys. 1b. Mikroskopowy schemat złącza tunelowego. W wyniku stabilizacji prądu tunelowego igła w czasie skanowania porusza się po profilu zaznaczonym przerywaną linią odzwierciedlającą atomową strukturę powierzchni. Obszary o niższej (wyższej) gęstości stanów elektronowych – jaśniejsze (ciemniejsze) atomy – obrazowane są jako pozorne dolki (górkę)

Istnieje wiele technik badania powierzchni materiałów w skali nanometrów. Jednak najbardziej rewolucyjną wśród nich jest *skaningowa mikroskopia tunelowa*, umożliwiająca obrazowanie ułożenia atomów na powierzchni badanego materiału w przestrzeni rzeczywistej oraz lokalne badanie właściwości elektronowych. Do jej funkcjonowania potrzebny jest drut, piezoceramiczna rurka i... kwantowo-mechaniczne zjawisko tunelowania.

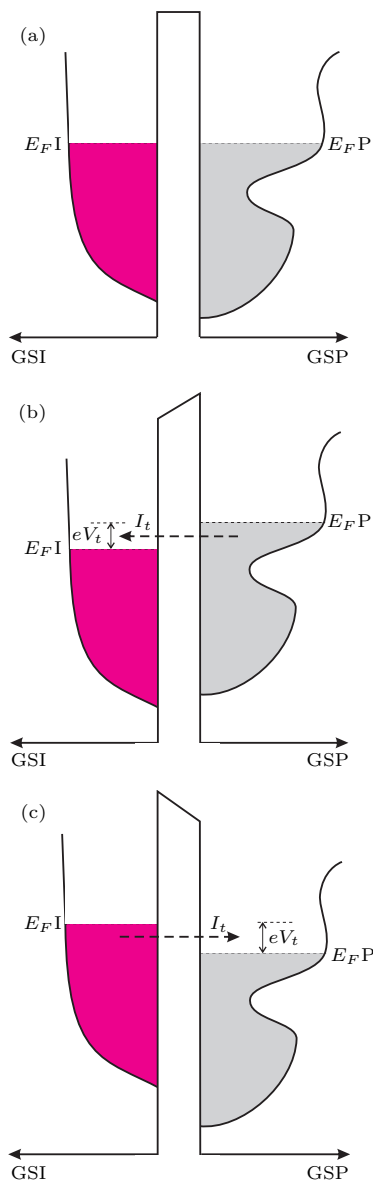
Postępująca miniaturyzacja wymaga umieszczania coraz większej liczby różnych niezawodnie funkcjonujących struktur na coraz mniejszych powierzchniach. Dlatego też umiejętność ich obserwacji oraz badanie ich właściwości w skali nanometrów staje się kluczowym wyzwaniem. Badania powierzchni materiałów można prowadzić za pomocą licznych technik: spektroskopii elektronów wybitych z powierzchni (na przykład przez fotony lub cząstki materii), oddziaływania z nią odbitego światła lub cząstek oraz dyfrakcji elektronowej. Powszechnie używanymi metodami pomiarowymi są: skaningowa mikroskopia elektronowa i nieco trudniejsza w zastosowaniu transmisyjna mikroskopia elektronowa. Jednak badawczą rewolucję wywołała skaningowa mikroskopia tunelowa (STM), która pozwala obserwować ułożenie i właściwości elektronowe pojedynczych atomów budujących powierzchnię badanego materiału. O jej wyjątkowości świadczy Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki przyznana twórcom skaningowego mikroskopu tunelowego, Gerdowi Binnigowi i Heinrichowi Rohrerowi, w 1986 roku – zaledwie po czterech latach od uzyskania pierwszych wyników za pomocą tej metody.

Tunelowanie nieustannie towarzyszy fizykom od czasu zaproponowania założeń mechaniki kwantowej na początku XX wieku. Ogólnie ujmując, pozwala ono na przenikanie cząsteczek materii przez bariery o energiach większych niż energie tych cząsteczek. Co to znaczy? Wyobraźmy sobie, że na naszej drodze pojawia się wysoki na 5 metrów betonowy mur. Możemy próbować go przeskoczyć albo przebić się przez niego z rozpędu. Wszystkie te wysiłki są oczywiście skazane na niepowodzenie, ponieważ wysokość, na jaką jesteśmy w stanie podskoczyć (energia potencjalna, jaką możemy osiągnąć), jest zbyt mała, żeby pokonać mur górą, a energia kinetyczna, jaką osiągamy, biegnąc, jest niewystarczająca, żeby go przeniknąć. Okazuje się jednak, że dla cząstek kwantowych, np. elektronów, problem pokonania analogicznego muru (w tym przypadku bariery energii) nie jest zupełnie beznadziejny. Niezależnie od wysokości bariery zawsze występuje pewne (być może bardzo niewielkie) prawdopodobieństwo, że cząstka znajdzie się nagle po drugiej stronie bariery. To tak, jakbyśmy nagle znaleźli się po drugiej stronie muru. Taka możliwość wynika z faktu, że funkcja falowa cząstki materii, będąca miarą prawdopodobieństwa znalezienia się tej cząstki w określonym obszarze, nie zanika skokowo, lecz wykładniczo. To, co nam wydaje się niemożliwe, w świecie kwantowym jest zjawiskiem dość powszechnym, zwanym właśnie tunelowaniem.

Korzystając z idei tunelowania, wyjaśniono m.in. takie zjawiska, jak: emisja polowa z metali (Lilienfeld, 1922), rozpad alfa (Gamov, Gurney, Condon, 1928), działanie mikroskopu polowego (Müller, 1937), mechanizm przewodzenia zdegenerowanych złączy p-n (Esaki, 1958), tunelowanie elektronowych par Coopera (Josephson, 1962), blokada kulombowska (obserwacja: Zeller i Giaever, 1969, teoria: Ben-Jacob i Gefen, 1985). Stosując zjawisko tunelowania, zmierzono przerwę energetyczną w nadprzewodnikach (Giaever, 1960) i zweryfikowano eksperymentalnie efekt Josephsona (Anderson, Powell, Rowell, 1963). Esaki, Giaever i Josephson za swoje badania zostali uhonorowani Nagrodą Nobla w 1973 roku.

Badania z wykorzystaniem efektu tunelowego początkowo prowadzone były w heterostrukturach w postaci dwóch prostopadłych pasków warstw metalicznych oddzielonych cienką warstwą tlenku, stanowiącą barierę tunelową. Tak wytworzone złącza planarne miały stałe parametry bariery, jednak słabo zdefiniowane ze względu na fluktuacje grubości warstwy tlenkowej. Rejestrowana gęstość prądu tunelowego była uśredniona po całej powierzchni złącza.

W marcu 1981 roku w IBM Zurich Research Laboratory przeprowadzono kluczowy eksperyment. Binnig, Rohrer, Gerber i Weibel obserwowali przepływ prądu elektrycznego w próżni pomiędzy ostrą igłą wolframową i powierzchnią platyny, które były oddzielone bardzo wąską przerwą (igła i badana powierzchnia często nazywane są elektrodami złącza tunelowego). Taka przerwa stanowi barierę w tym sensie, że energia elektronu jest zbyt mała, żeby mógł on uwolnić się z sieci krystalicznej igły, przelecieć przez przerwę i znaleźć się w platynowej próbce. Jak już wspomniano, mechanika kwantowa przewiduje jednak, że istnieje pewne niezerowe prawdopodobieństwo, że elektron z igły znajdzie się nagle po drugiej stronie, mimo że jego obecność w przerwie pomiędzy igłą a próbką jest energetycznie zabroniona. Połączenie uzyskanych obserwacji z możliwością kontrolowanego przesuwu igły ponad badaną powierzchnią doprowadziło do narodzin skaningowego mikroskopu tunelowego, pozwalającego na obrazowanie powierzchni z rozdzielczością subatomową (rys. 1a). Oznacza to, że ruch igły ponad powierzchnią musi być kontrolowany z taką właśnie precyzją. Pewnym ograniczeniem STM jest jego stosowalność jedynie do materiałów przewodzących – ze względu na konieczność odprowadzenia prądu tunelowego płynącego pomiędzy igłą mikroskopu a badaną powierzchnią. Natomiast istotną zaletą jest lokalne próbkowanie materii wynikające z punktowej geometrii złącza.

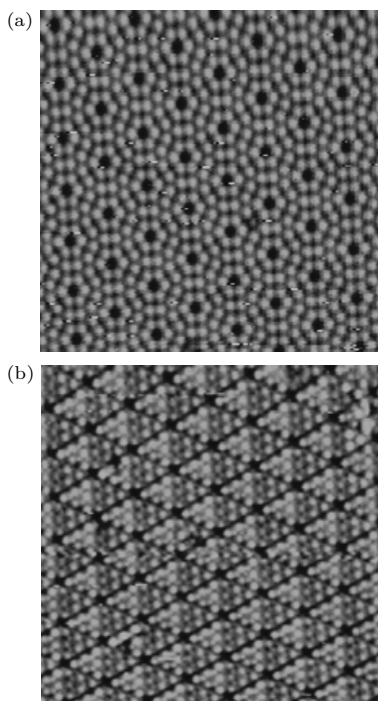


Rys. 2. Schematyczna struktura elektronowa złącza tunelowego z zaznaczonymi gęstościami stanów elektronowych (GS) igły (I) i próbki (P). Bez napięcia polaryzującego poziomy Fermiego (E_F) igły i próbki są wyrównane i prąd tunelowy nie płynie (a). Po przyłożeniu do złącza napięcia polaryzującego V_t poziomy E_F przesuwają się względem siebie o wartość eV_t (e – ładunek elektronu) i prąd tunelowy I_t zaczyna płynąć. Dla ujemnej (b) (dodatniej (c)) polaryzacji próbki względem igły elektrony tunelują z obsadzonych (do pustych) stanów elektronowych próbki

Aby zrozumieć, w jaki sposób mikroskop pozwala na obrazowanie pojedynczych atomów powierzchni, należy wspomnieć o ilościowym aspekcie zjawiska tunelowania. Standardowo w czasie pracy mikroskopu czubek igły znajduje się w odległości mniejszej niż 1 nm (odległość porównywalna z 4 średnicami atomowymi) od badanej powierzchni (rys. 1b). Wielkością mierzoną i stabilizowaną jest natężenie prądu tunelowego. Zazwyczaj w czasie pracy mikroskopu natężenie prądu jest rzędu 1 nA, a polaryzacja złącza, wymuszająca przepływ prądu tunelowego, przyjmuje wartość około 1V. Energia elektronów jest zatem niższa od energii wiązań chemicznych, dlatego nie niszczą one atomowej struktury próbki. W złączu tunelowym natężenie prądu rośnie wykładniczo wraz ze zmniejszającą się odległością pomiędzy igłą i próbką – szerokością bariery tunelowej. Jest to konsekwencja wspomnianej wcześniej właściwości, że prawdopodobieństwo znalezienia się elektronu po drugiej stronie bariery rośnie wykładniczo wraz ze zmniejszaniem się jej szerokości. Zmiana szerokości bariery o 0,1 nm powoduje zmianę natężenia prądu tunelowego o rząd wielkości! To właśnie ta zależność leży u podstaw możliwości obrazowania pojedynczych atomów badanej powierzchni.

W tym miejscu nasuwa się zapewne pytanie, w jaki sposób można stabilnie utrzymywać igłę w tak małej odległości z jednoczesnym jej przesuwaniem (skanowaniem) ponad badaną powierzchnią. Z pomocą przychodzą nam materiały piezoelektryczne. Są to ceramiki, które zmieniają swoje wymiary pod wpływem polaryzacji elektrycznej. Zmiana ta przy różnicach napięcia rzędu mV jest mniejsza niż rozmiar pojedynczych atomów. Igła mikroskopu może być zatem przesuwana za pomocą piezoelementów ponad powierzchnią próbki z precyzją subatomową we wszystkich trzech kierunkach (rys. 1a). W czasie skanowania zmiana odległości igła–powierzchnia jest rejestrowana w postaci silnej zmiany (zależność wykładnicza) natężenia prądu tunelowego. Ta z kolei, poprzez sprzężenie zwrotne elektronicznego układu mikroskopu, koryguje napięcie przykładane do piezoelementów w taki sposób, by utrzymać stałą odległość igła–próbka. Sprzężenie zwrotne pełni zatem podwójną rolę: umożliwia obrazowanie powierzchni z wysoką rozdzielczością i chroni igłę przed uderzeniem w powierzchnię.

Oprogramowanie mikroskopu przekłada zarejestrowane zmiany napięcia na kształt profilu określanego przez czubek igły – profilu skanowanej powierzchni (rys. 1b). Szorstkość atomowo gładkiej powierzchni jest na tyle duża, że prowadzi do wspomnianych korekcji, które umożliwiają obrazowanie pojedynczych atomów. Opisany tryb pracy nazywa się stałoprądowym – w czasie pomiaru stabilizowany jest prąd tunelowy. Innym jest tryb stałej wysokości – wtedy igła przesuwa się nad powierzchnią próbki po linii do niej równoległej. Fluktuacje prądu tunelowego wynikające z lokalnych szorstkości tłumaczone są przez elektronikę mikroskopu na obraz powierzchni. Ten znacznie rzadszy sposób



Rys. 3. Obrazy (20 nm × 20 nm) powierzchni krzemu Si(111) o charakterystycznym ułożeniu atomów, zwanym rekonstrukcją 7 × 7. Oba pokazują ten sam fragment powierzchni w czasie próbkowania stanów nieobsadzonych (a) i obsadzonych (b). Dla stanów obsadzonych widoczna jest różnica w obrazowaniu romboidalnej komórki elementarnej. Lewa jej część charakteryzuje się wyższą gęstością stanów elektronowych i atomy widoczne są jako jaśniejsze (pozwornie wyżej położone)



Rozwiązanie zadania M 1679.

Załóżmy, że istnieje 19-kąt $A_1 A_2 \dots A_{19}$ wpisany w okrąg Ω o środku w punkcie O i spełniający warunki zadania. Niech kąt środkowy 19-kąta odpowiadający łukowi $A_{i-1} A_i$ ma miarę α_i , dla $i = 1 \dots 19$ (przyjmujemy, że $A_0 = A_{19}$). Wtedy łatwo zauważyć, że

$$\sphericalangle A_{i-1} A_i A_{i+1} = \frac{360^\circ - \alpha_i - \alpha_{i+1}}{2},$$

a ponieważ jest to liczba całkowita, to $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ jest liczbą całkowitą parzystą. Zatem liczba

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{19}) - (\alpha_2 + \alpha_3) - \\ &\quad - (\alpha_4 + \alpha_5) - \dots - (\alpha_{18} + \alpha_{19}) = \\ &= 360 - (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_4 + \alpha_5) - \dots \\ &\quad \dots - (\alpha_{18} + \alpha_{19}) \end{aligned}$$

jest również liczbą całkowitą parzystą. Podobnie wykazujemy, że liczby α_i są parzyste dla $i = 2, 3, \dots, 19$.

Boki 19-kąta są różnej długości, więc $\alpha_i \neq \alpha_j$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 360 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{19} \geq \\ &\geq 2 + 4 + 6 + \dots + 38 = 380, \end{aligned}$$

sprzeczność.

działania mikroskopu może być stosowany jedynie do naprawdę płaskich powierzchni.

Oprócz obrazowania powierzchni mikroskop umożliwia także lokalne badanie jej właściwości, dzięki spektroskopii tunelowej. Zachowanie się ciał stałych w dużej części zdeterminowane jest przez elektrony. W materiałach przewodzących (np. metalach) elektrony o najwyższych energiach nie są zlokalizowane na poszczególnych atomach. Mogą przemieszczać się w miarę swobodnie przez sieć krystaliczną materiału. Ponieważ są one fermionami, muszą spełniać zakaz Pauliego mówiący, że stan kwantowy każdego z elektronów w całym układzie musi być odmienny. W związku z tym każdy z nich ma nieco inną energię, prowadząc do powstania pasmowej struktury energetycznej. Konfiguracja pasm elektronowych i stopień ich zapełnienia decydują o tym, czy materiał jest metalem, półprzewodnikiem, czy izolatorem. Innym istotnym czynnikiem jest gęstość stanów elektronowych, ilustrująca, ile elektronów ma energię w określonym jej przedziale. Jest ona skorelowana z ruchliwością elektronów w materiale. Widac zatem, jak ważne w intencjonalnym projektowaniu właściwości materiałów jest poznanie i zrozumienie zachowania się elektronów. Istotną zaletą omawianej metody badawczej jest możliwość próbkowania stanów elektronowych lokalnie, w skali pojedynczych nanometrów. Skaningowy mikroskop tunelowy staje się więc potężnym narzędziem w badaniach nanostruktur.

Spektroskopia tunelowa wymaga bardzo dużej stabilności mechanicznej układu igła–próbka. Aby przeprowadzić pomiar, należy ułożyć igłę nad badanym obszarem i utrzymywać stałą odległość pomiędzy nimi przy wyłączonym sprzężeniu zwrotnym. Stała szerokość bariery tunelowej jest niezbędna do analizy ilościowej struktury elektronowej. Przy braku polaryzacji poziomy Fermiego (najwyższa energia elektronu w temperaturze 0 K) są wyrównane i nie obserwuje się przepływu prądu przez złącze (rys. 2a). Gdy do układu igła–próbka zostanie przyłożone napięcie, poziomy Fermiego odpowiednio przesuwają się i następuje przepływ elektronów przez barierę ze stanów obsadzonych jednej elektrody do nieobsadzonych drugiej (rys. 2b, c). W procesie tunelowania elektrony zachowują swoją energię.

W czasie ciągłej zmiany przyłożonego napięcia rejestruje się natężenie prądu tunelowego (tzw. charakterystyka I-V). Zależy ono nie tylko od transmisyjności bariery, ale również jest proporcjonalne do gęstości stanów elektronowych obu elektrod (rys. 2). Zmiana polaryzacji złącza powoduje oczywiście zmianę kierunku przepływu prądu. W ten sposób można próbować zarówno stany obsadzone (poniżej poziomu Fermiego), jak i puste (ponad poziomem Fermiego) obu elektrod. Znajac strukturę elektronową jednej z nich – igły – uzyskuje się obraz struktury elektronowej badanej próbki. Ze względu na zależność natężenia prądu tunelowego od gęstości stanów elektronowych pomiary topograficzne niejednorodnych elektronowo obszarów stanowią mieszaninę informacji o geometrii powierzchni i lokalnym przewodnictwie. Efekt ten jest bardzo wyraźny np. w przypadku zróżnicowanego obrazowania powierzchni krzemu Si(111), o typowej rekonstrukcji 7 × 7 (rys. 3). Jeżeli na płaskiej powierzchni znajdzie się obszar o niższej gęstości stanów niż jego otoczenia, to będzie on widoczny jako pozorne zagłębienie, a przy przeciwnej relacji – jako „górką” (rys. 1b). Taki sposób obrazowania powierzchni pokazuje kolejną zaletę mikroskopu tunelowego w badaniu np. nanostruktur, ale też nieco utrudnia jednoznaczna interpretację uzyskanych wyników. Z pomocą przychodzą pomiary z innym parametrem bariery (odległość igła–próbka) i wtedy porównanie zestawu wyników pozwala rozwikłać pojawiającą się zagadkę.

Już opisany tu najprostszy wariant pracy skaningowego mikroskopu tunelowego pokazuje jego olbrzymie zalety badawcze. Dołożenie na przykład możliwości detekcji prądu spolaryzowanego spinowo pozwala identyfikować stany magnetyczne. Wynalezienie skaningowego mikroskopu tunelowego stworzyło również grunt dla gwałtownego rozwoju skaningowej mikroskopii próbnikowej, umożliwiającej – z rozdzielczością nanometrów – pomiary różnych oddziaływań siłowych pojawiających się pomiędzy powierzchnią a odpowiednio dobranymi próbnikami. Czyż można się zatem dziwić, że wynalazcy STM-u zostali uhonorowani Nagrodą Nobla?

Kartografia (normalna) Płaszczków

Michał MIŚKIEWICZ

* *Flatlandia, czyli kraina płaszczków*,
Edwin Abbott (1884).

Wbrew pozorom tematyka tego artykułu jest całkiem poważna, ale powołane do życia przez Edwina Abbotta *Płaszczuki** – wymaginowane stworzenia żyjące w dwuwymiarowym świecie – są doskonałym materiałem do pewnego eksperymentu myślowego. Chodzi mianowicie o to, by o geometrii powierzchni (lub ogólniej – rozmaitości) nie myśleć w sposób *zewnątrzny*, jak człowiek patrzący na leżący przed nim obrazek, ale *wewnętrzny*, właściwy namalowanym na obrazku postaciom, których percepcja (o ile ją mają) ogranicza się do dwóch wymiarów.

Współczesna geometria wiele zawdzięcza takiemu ujęciu tematu. Bez tego nie mielibyśmy ani ogólnej teorii względności, ani teorii potoków Ricciego wraz z dowodem hipotezy Poincarégo.

Punktem wyjścia naszej historii będzie zainteresowanie Króla Płaszczków kształtem własnego królestwa \mathcal{M} . W celu stworzenia mapy Król wysłał swoich rycerzy ze stolicy S we wszystkie kierunki świata z nakazem pójścia prosto przed siebie ze stałą prędkością (każdy z tą samą). Po powrocie każdy miał zdać raport, podając napotkane punkty charakterystyczne wraz z odległością od stolicy. Znając kierunki ich podróży, Król może potem nanieść te punkty na tworzoną przez siebie mapę królestwa, zwaną mapą *wykładniczą* lub po prostu *normalną*. Proste?

Nie do końca. Na początek warto wyjaśnić, co znaczy *prosto przed siebie*. W tym celu oznaczmy przez $\gamma(t)$ położenie danego rycerza w chwili t ; innymi słowy, jego ruch opisujemy funkcją $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$. Według rozkazu Króla:

- rycerz wyrusza ze stolicy, czyli $\gamma(0) = S$;
- ma wyznaczony kierunek podróży, a więc $\gamma'(0)$ jest z góry zadany wektorem początkowej prędkości (dla ustalenia uwagi – jednostkowym);
- ma się poruszać prosto przed siebie ze stałą prędkością, co wyraża się przez brak przyspieszenia, czyli warunek $\gamma''(t) = 0$ dla wszystkich $t > 0$.

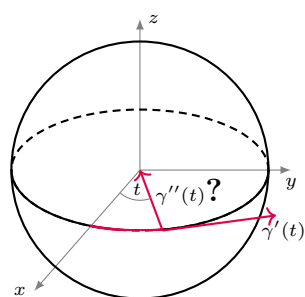
W świecie Płaszczków, czyli – na dobrą sprawę – w świecie zupełnych rozmaitości Riemanna, takie równanie różniczkowe zwyczajne $\gamma'' = 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie. To rozwiązanie, czyli krzywą $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$, nazywamy *geodezyjną* (o zadanym punkcie początkowym i prędkości początkowej).

Dla mieszkańców sfery (w dobrym przybliżeniu – dla nas samych) geodezyjnymi są fragmenty okręgów wielkich, czyli krzywych powstałych przez cięcie sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Na sferze jednostkowej

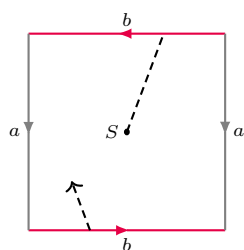
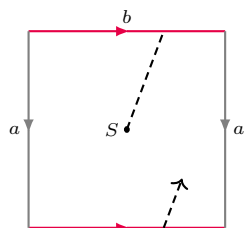
$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(rozumianej jako podzbiór \mathbb{R}^3) przykładową geodezyjną jest krzywa $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Czytelnik znający rachunek różniczkowy może obliczyć drugą pochodną każdej ze współrzędnych i zaprotestować, że otrzymany wektor $(-\cos t, -\sin t, 0)$ nie jest zerowy. Sęk w tym, że jest to obliczenie drugiej pochodnej funkcji o wartościach w \mathbb{R}^3 , a nie w \mathbb{S}^2 ! Natomiast przyspieszenie odczuwane przez Płaszczaka poruszającego się tą krzywą (czyli *wewnętrzna* druga pochodna funkcji $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$) jest rzutem wyznaczonego wyżej wektora na płaszczyznę styczną do sfery w $\gamma(t)$, a rzut ten rzeczywiście jest zerowy.

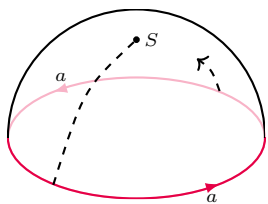
Pouczeni tym przykładem spójrzmy jeszcze na trzy inne – torusa, butelkę Kleina i płaszczyznę rzutową. Pierwsze dwie powierzchnie można przedstawić jako kwadrat z odpowiednio sklejonymi bokami, przy czym strzałki wskazują, co z czym łączyć; w obu przypadkach boki oznaczone strzałką a łatwo skleić, otrzymując walec. Dla torusa sklejenie strzałek b jest możliwe, chociaż kosztem pewnego zdeformowania materiału (a więc i geometrii!), co daje dobrze znany kształt dętki rowerowej. Do sklejenia butelki Kleina potrzebujemy albo pewnego oszustwa (samoprzecięcia), albo odrobiny czwartego wymiaru. To samo tyczy się płaszczyzny rzutowej, zadanej jako półsfera, na której brzegu sklejonno punkty antypodyczne.



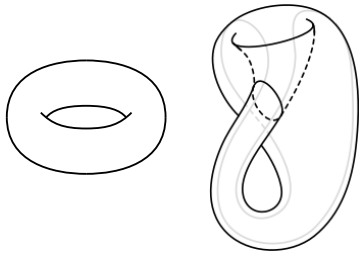
Geodezyjna na sferze



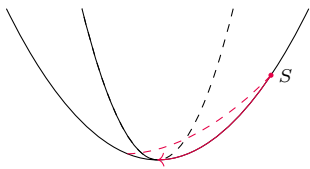
Torus i butelka Kleina z przykładową geodezyjną



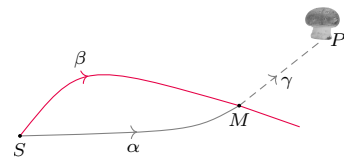
Płaszczyzna rzutowa z przykładową geodezyjną



Czego Płaszczyzak nie zobaczy: torus jako dętka i butelka Kleina jako powierzchnia z samoprzecięciem



Droga rycerza zmuszonego do zatrzymania się w wierzchołku paraboloidy $z = x^2 + y^2$. Przerywaną linią zaznaczono inną, krótszą drogę na drugą stronę wierzchołka



Porównanie drogi rycerza \mathcal{A} (α) z drogą rycerza \mathcal{B} (β). Przez γ oznaczono brakujący fragment, którego \mathcal{A} nie zdążył przejść

Nie przejmujemy się tym czwartym wymiarem – wszak Płaszczyzaki i tak dostrzegają jedynie dwa wymiary, więc dla nich to niewielka różnica. Do wyznaczenia geodezyjnych wyjściowe diagramy w zupełności wystarczają, co zresztą zostało już przedstawione na rysunkach.

Czas na drugą trudność – czy rycerze kiedykolwiek trafią z powrotem do stolicy, by zdać raport? Na sferze tak, ale na torusie większość z nich będzie błędzić w nieskończoność. By tego uniknąć, Król wydał dodatkowy rozkaz:

- każdy rycerz ma zakończyć swoją misję, gdy tylko napotka innego rycerza lub jego ślady.

Zakładając, że królestwo jest skończone – w języku technicznym *zwarte* – zagwarantował w ten sposób, że po pewnym czasie wszyscy rycerze będą mogli wrócić i zdać raport z odwiedzonych miejsc. I w ten sposób dochodzimy do trzeciej i najważniejszej trudności – czy w takiej sytuacji możemy mieć pewność, że **każdy punkt w królestwie znajdzie się na mapie**?

Warto zauważyć, że rycerze mogą się spotykać (i w rezultacie zatrzymywać) w parach, czwórkach, a nawet i wszyscy naraz! Na szczególną uwagę zasługuje paraboloida $z = x^2 + y^2$ i los rycerza wysłanego z $S = (1, 0, 1)$ w kierunku wierzchołka $(0, 0, 0)$. Chociaż dochodzi on tam jako pierwszy i jedyny, to jest zmuszony się zatrzymać, a to dlatego, że w każdym następnym punkcie jego trasy ktoś go już ubiegł.

Pozostaje przekonać się o kompletności powstałej mapy – sprawdziliśmy to na kilku przykładach, ale czas na ogólny dowód. Dla ustalenia uwagi sprawdzimy, czy na mapie znajdzie się Pieczara Smoka (punkt P). W tym celu rozważmy najkrótszą drogę z S do P . O takiej najkrótszej drodze wystarczy nam wiedzieć, że istnieje (co najmniej jedna) oraz że na pewno jest geodezyjną. Wynika stąd, że droga ta jest tożsama z trasą pewnego rycerza \mathcal{A} . Jeśli P nie znajduje się w jego raporcie, to widocznie \mathcal{A} zatrzymał się już wcześniej. Oznacza to jedną z dwóch rzeczy:

– Przed dotarciem do P rycerz \mathcal{A} napotkał ślady innego rycerza \mathcal{B} w pewnym pośrednim punkcie M . Widocznie \mathcal{B} odnalazł krótszą drogę β z S do M , więc łącząc ją z brakującym fragmentem γ , otrzymujemy drogę $\beta \cup \gamma$ z S do P krótszą od drogi $\alpha \cup \gamma$. Ale o tej drugiej założyliśmy, że jest najkrótsza – sprzeczność!

– Zatrzymał się w momencie spotkania innego rycerza \mathcal{B} w pewnym punkcie M . Skoro obaj doszli do M jednocześnie, to ich trasy α, β mają tę samą długość. A skoro $\alpha \cup \gamma$ jest najkrótszą drogą z S do P , to jest nią również $\beta \cup \gamma$. Z naszej wiedzy o najkrótszych drogach wynika wtedy, że $\beta \cup \gamma$ musi być geodezyjną! To jest jednak sprzeczność z jednoznacznością geodezyjnych, gdyż rozpatrując trasy $\alpha \cup \gamma$ i $\beta \cup \gamma$ przebywane wstecz, otrzymujemy dwie różne geodezyjne dzielące wspólny początkowy fragment.

Ostatecznie możemy stwierdzić z całą pewnością, że każdy punkt królestwa znajduje się na mapie, i prawie każdy w jednym egzemplarzu. Wyjątek stanowią leżące na brzegu mapy *punkty cięcia* (*cut points*), czyli końcowe punkty dróg rycerzy. O zbiorze wszystkich takich punktów (po angielsku nazywanym *cut locus*) wiadomo, że ma zerowe pole (zarówno jako podzbiór mapy, jak i podzbiór królestwa), więc jest niejako zaniedbywalny. Co nie znaczy, że nie jest ważny!

Czytelnika zainteresowanego zgłębieniem jego geometrii zachęcam do pochylenia się nad poniższymi zadaniami oraz do lektury książki *The Shape of Space*, która opisuje wiele innych przygód Płaszczyzaków wraz z ich geometrycznymi konsekwencjami.

Zadanie 1. Przekonać się, że na płaszczyźnie rzutowej punkty cięcia tworzą zamkniętą pętlę, która jednak nie rozdziela powierzchni na dwie części.

Zadanie 2. Naszkicować zbiór punktów cięcia, gdy królestwo Płaszczyzaków ma kształt torusa-dętki-rowerowej. Czy zbiór ten tworzy pętlę?

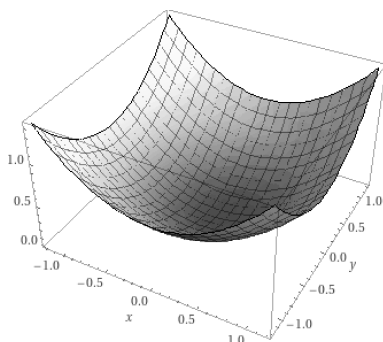
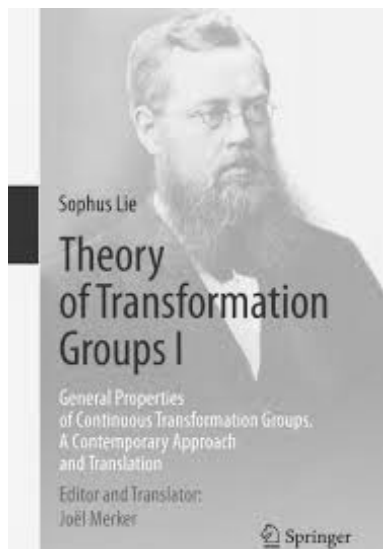
Zadanie 3. Przyjmijmy, że królestwo Płaszczyzaków ma kształt paraboloidy zadanej równaniem $z = x^2 + y^2$ i stolicę w punkcie $S = (1, 0, 1)$. Naszkicować mapę królestwa, jak również samą paraboloidę z zaznaczonymi punktami cięcia.

The Shape of Space, Jeffrey Weeks, wyd. 2 (2002). Autor prowadzi Czytelników od geometrycznych przygód Płaszczyzaków, licznych przykładów i gier, przez klasyfikację powierzchni aż do kosmologii i hipotezy geometrycznej Thurstona (którego był doktorantem). Część gier jest dostępna online: geometrygames.org/SoS.

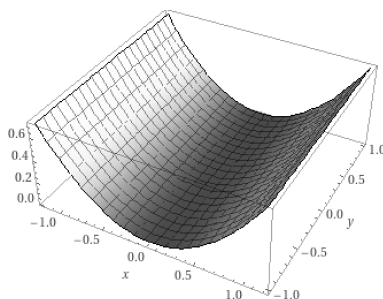
Równania różniczkowe i geometria (II)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Piotr KRZYŻANOWSKI*

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Powierzchnia równania
 $y'(x) = x^2 + y^2$



Powierzchnia równania
 $y'(x) = x$

W ogólności, równanie różniczkowe może mieć bardzo dużo grup symetrii. Na przykład łatwo to zauważyć w przypadku równania $y'(x) = 0$.

Norwegia, mały i przez długi czas bardzo ubogi kraj na obrzeżach Europy, dała światu wiele; między innymi dwie matematyczne gwiazdy pierwszej wielkości: Nielsa Henrika Abela (1802–1829) i Sophusa Liego (1842–1899). Obaj uczeni dokonali odkryć przełomowych, coraz bardziej obecnych we współczesnej matematyce i fizyce. Nie ma tu miejsca na szersze omówienie, odsyłamy do bibliografii [Cantwell], wspomnijmy tylko, że Sophus Lie uczył na wykłady Ludwiga Sylowa (1863) poświęcone teorii Galois, a później, w 1870 roku, w rezultacie współpracy z Feliksem Kleinem wpadł na pomysł, że jest możliwe stworzenie dla równań różniczkowych analogii do teorii Galois dla równań algebraicznych. Jego prace miały bardzo silne podłoże geometryczne.

Z konieczności możemy tu przedstawić tylko skrawek teorii grup symetrii Liego – i to w wielkim skrócie. Chodzi nam głównie o przybliżenie pewnych pomysłów, bez wchodzenia w szczegóły.

Niech S będzie wykresem funkcji $f(x, y)$, czyli powierzchnią zadaną w przestrzeni trójwymiarowej (x, y, z) równaniem $z = f(x, y)$.

Założmy, że funkcja $y = y(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$(1) \quad y'(x) = f(x, y),$$

w pewnym obszarze D płaszczyzny (x, y) . Trajektoria ϕ rozwiązania $y = y(x)$ na płaszczyźnie (x, y) ma swój odpowiednik na powierzchni S , jest to krzywa $\Phi: x \mapsto (x, y(x), y'(x)) = (x, y(x), f(x, y(x)))$. Powierzchnię S nazywamy *powierzchnią równania różniczkowego* (1).

Założmy, że przez każdy punkt rozważanego obszaru D (możemy przyjąć dla uproszczenia, że jest to cała płaszczyzna) przechodzi dokładnie jedna trajektoria rozwiązania równania (1). Podobnie jak płaszczyzna (x, y) jest utkana z trajektorii rozwiązań równania (1), powierzchnia S jest utkana z leżących na niej obrazów tych ostatnich.

Najprostszym i bardzo ważnym przykładem jest sytuacja, gdy funkcja f zależy tylko od zmiennej x :

$$(2) \quad y'(x) = f(x).$$

W tym wypadku powierzchnia S jest utkana nie tylko z rodziny krzywych Φ , ale także z rodziny prostych równoległych do osi OY .

Jeśli trajektorię ϕ_1 rozwiązania równania (2) przesuniemy w kierunku osi OY o pewien wektor, to otrzymamy także pewną trajektorię, oznaczmy ją przez ϕ_2 , rozwiązaniem tego równania, a obraz Φ_1 na powierzchni S trajektorii ϕ_1 przesunie się analogicznie na obraz Φ_2 trajektorii ϕ_2 , leżący także na powierzchni S .

Odpowiednikiem analitycznym powyższej ważnej uwagi jest stwierdzenie, że zmiana zmiennych

$$(3) \quad \hat{x}(x, y, \epsilon) = x, \quad \hat{y}(x, y, \epsilon) = y + \epsilon,$$

gdzie ϵ jest dowolną liczbą rzeczywistą, przeprowadza rozwiązanie $y = y(x)$ na rozwiązanie $\hat{y} = \hat{y}(\hat{x})$, tzn.

$$(4) \quad \text{jeśli } y'(x) = f(x), \text{ to } \hat{y}'(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Doszliliśmy do fundamentalnych pojęć. Przekształcenia współrzędnych (3) tworzą jednoparametrową grupę (dla $\epsilon = 0$ mamy przekształcenie identity, dla każdego przekształcenia istnieje przekształcenie odwrotne, przekształcenia można składać, składanie jest łączne), zwaną *grupą symetrii równania różniczkowego* (2). Samo równanie różniczkowe nie zmienia się przy przekształceniach współrzędnych swoich grup symetrii. Mówimy o *niezmienniczości równania* ze względu na te przekształcenia.

Zauważmy, że równanie różniczkowe postaci (2) można scałkować bezpośrednio, przykładając operator całki do obu stron, co daje

$$(5) \quad y(x) = \int f(x) dx.$$

Tej ważnej własności nie mają równania postaci (1). Aby móc je scałkować, czyli znaleźć ich rozwiązania, możemy skorzystać z następującego pomysłu.

Dla danego równania różniczkowego $y'(x) = f(x, y)$ znajdujemy najpierw transformację zmiennych $(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$ taką, że w nowych zmiennych równanie ma postać $s'(r) = g(r)$. Następnie całkujemy bezpośrednio otrzymane równanie, a na koniec przedstawiamy otrzymane rozwiązania w zmiennych (x, y) . Otrzymane w ten sposób funkcje są rozwiązaniami równania $y'(x) = f(x, y)$.

Ten pomysł jest prosty (nawet genialny) i ma znamiona metody ogólnej. Jego realizacja jednak nie jest prosta. Chcielibyśmy mieć bowiem ogólny algorytm, czy metodę, znalezienia właściwej transformacji współrzędnych z (x, y) na (r, s) . Tu właśnie przychodzi z pomocą teoria grup symetrii równań różniczkowych. Okazuje się, że znalezienie grupy symetrii danego równania różniczkowego może być prostsze od znalezienia rozwiązania samego równania.

Załóżmy zatem, że znamy pewną grupę symetrii danego równania postaci (1). Szukamy takiej zamiany zmiennych z (x, y) na (r, s) , że trajektorie wspomnianej grupy równania (1) przechodzą na trajektorie grupy translacji

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (\hat{r}(r, s, \epsilon), \hat{s}(r, s, \epsilon)) = (r, s + \epsilon).$$

Wtedy samo równanie (1) transformuje się do równania postaci $s'(r) = g(r)$, które już umiemy scałkować. Zadanie uprościło się więc do znalezienia odwzorowania prostującego krzywe danej rodziny.

Zobaczmy, jak to wygląda na przykładzie:

Równanie Riccatiego

Rozważmy równanie postaci $dy/dx = a(x)y^2 - b(x)y - c(x)$, nazywane równaniem Riccatiego. Nie znamy sposobu rozwiązania tego równania w tak ogólnej postaci. Niemniej w niektórych szczególnych przypadkach można sobie z nim poradzić. Weźmy na warsztat następujący konkretny przypadek:

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0),$$

i spróbujmy znaleźć jego *rozwiązanie ogólne*, czyli rodzinę krzywych, do których styczne w każdym punkcie danej krzywej wyrażają się powyższym równaniem.

Wskażmy wygodną grupę symetrii!

Nie bardzo wiadomo, jak się zabrać za to równanie... wykorzystamy więc pomysł przedstawiony powyżej. Aby znaleźć grupę symetrii równania, możemy skorzystać z ogólnego algorytmu, ale pójdziemy na skróty. Struktura równania podpowiada, żeby spróbować transformacji skalowania $(x, y) \mapsto (ax, by)$ z pewnymi stałymi a i b . I rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że równanie jest niezmiennicze ze względu na tę transformację, o ile stałe spełniają $b = a^{-2}$, a więc ze względu na całą grupę transformacji

$$(7) \quad (\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

W zmiennych (7) równanie (6) wygląda zatem tak samo:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \hat{x}\hat{y}^2 - \frac{2\hat{y}}{\hat{x}} - \frac{1}{\hat{x}^3}, \quad (\hat{x} \neq 0).$$

Szukamy teraz zmiennych (r, s) , w których trajektorie (7) będą prostymi postaci

$$(8) \quad (\hat{r}, \hat{s}) = (\hat{r}(r, s, \epsilon), \hat{s}(r, s, \epsilon)) = (r, s + \epsilon).$$

Po uważnym przyjrzeniu się zależnościom (7) i (8) znajdujemy, że zmienne

$$(9) \quad (r, s) = (x^2 y, \ln|x|)$$

spełniają ten warunek, czyli są *zmiennymi kanonicznymi*. W tych nowych zmiennych nasze równanie różniczkowe przyjmuje postać

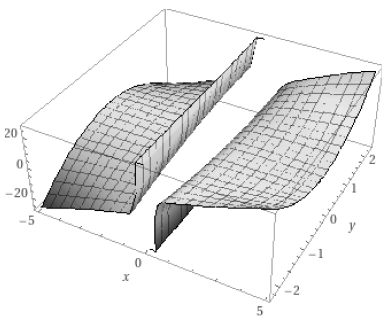
$$(10) \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2 - 1}.$$

Rzeczywiście, z (9) i (6) mamy

$$dr = 2xydx + x^2 dy = 2xydx + x^2 \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \left(x^3 y^2 - \frac{1}{x} \right) dx$$

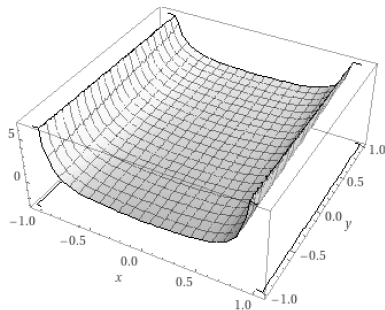


Jacopo Francesco Riccati (1676–1754)



Powierzchnia równania Riccatiego

Różniczka funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) to wyrażenie $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$, w języku geometrii: równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (podstawiamy $dx = x - x_0, dy = y - y_0, dz = z - z_0$).



Powierzchnia równania Riccatiego w zmiennych kanonicznych

oraz

$$ds = \frac{1}{|x|} dx,$$

i korzystając z (9), dostajemy (10). To ostatnie równanie łatwo scałkować, otrzymując

$$s(r) = \ln \left| \sqrt{c \frac{r-1}{r+1}} \right|.$$

Powrót do zmiennych (x, y) daje rozwiązanie ogólne

$$(11) \quad y = \frac{c + x^2}{x^2(c - x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2 + c}$$

naszego równania (6). A o to nam właśnie chodziło.

A jak by to zrobił komputerowy pakiet obliczeń symbolicznych?

Krytyczny Czytelnik zdążył już zapewne zauważyć, że kluczowym momentem była chwila olśnienia, dzięki której zgadliśmy, jaka jest właściwa transformacja (\hat{x}, \hat{y}) , co pozwoliło nam (po ukrytych przed Czytelnikiem Niecierpliwym rachunkach) wygenerować nowy układ zmiennych (r, s) i dojść do końcowego prościutkiego równania (10). A Pedantyczny Czytelnik dostrzegł na dodatek, że do uzyskania finalnego wzoru (11) także należało wykazać się jakąś, choć nie przesadną, sprawnością rachunkową.

Pakiety obliczeń symbolicznych, takie jak komercyjny Maple czy darmowe SymPy lub Maxima, w miejsce błyskotliwych olśnień stosują podejście pilnego czytelnika podręczników rozwiązywania równań różniczkowych. Po wstępnych uproszczeniach *klasyfikują* równanie, sprawdzając, czy może jest postaci, dla której pewna mechaniczna metoda sprowadzenia zadania do obliczenia całek może mieć szanse powodzenia (np. czy jest to równanie o zmiennych rozdzielonych). Oczywiście równanie może dać się sklasyfikować na kilka sposobów.

Zobaczmy, jak to działa w module obliczeń symbolicznych dla Pythona, czyli SymPy. Zdefiniujemy w nim nasze równanie Riccatiego (6), a potem poprosimy o sklasyfikowanie, a na koniec rozwiązanie tego równania:

```
from sympy import *
from sympy.abc import x
y = Function('y')(x)
deq = Eq( y.diff(x), x*y**2 - 2*y/x - 1/x**3 )
typ = classify_ode(deq, y)
sol = dsolve(deq, y)
```

Po klasyfikacji równania program podejmuje próby rozwiązania kolejnymi algorytmami właściwymi dla danego typu, aż do skutku. Okazuje się, że według SymPy nasze równanie można *spróbować* rozwiązywać przez sprowadzenie do równania o zmiennych rozdzielonych (ewentualnie bez obliczania finałowych całek, jeśli okażą się za trudne) lub metodą grup Liego.

No i już pierwsza z brzegu metoda, czyli próba sprowadzenia do równania postaci $y' = F(x^n y) \cdot (y/x)$ – które potem sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych, a to z kolei do zwykłego całkowania – daje błyskawiczny i zachwycający wynik:

$$y(x) = \frac{-(C_1 x^2 + 1)}{x^2(C_1 x^2 - 1)}.$$

Po przekształceniu pokrywa się on z uzyskanym przez nas rozwiązaniem (11).

Możemy też zażądać, by SymPy rozwiązał nasze równanie przez grupy Liego. Wtedy algorytm będzie tyleż cierpliwie, co bezrefleksyjnie, próbował skorzystać z kolejnych heurystyk opisanych w pracy [Cheb-Terrab et al.] – w naszym przypadku dopiero czwarta próba zakończy się sukcesem. Nowy układ współrzędnych, do jakiego dochodzi SymPy, zupełnie nie przypomina (9):

$$(r, s) = \left(y - \frac{1}{x^2}, \frac{x^2}{2} \right),$$

lecz za to równanie przyjmuje w nim jeszcze prostszą(!) postać:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2}.$$



A potem już z górki: *reszta jest liczeniem* – jak mawia Marcin Kuczma, parafrazując ostatnie słowa Hamleta – ale i tak cieszymy się, że kończące sprawę całkowanie, podstawienie, uproszczenie i rozwikłanie wykonał za nas automat.

Można by zapytać, dlaczego nie uczono nas na studiach metod opartych na grupach symetrii jako „uniwersalnego” przepisu na spreparowanie rozwiązań większości zadań rachunkowych z równań różniczkowych zwyczajnych. Jednym z powodów jest to, że te metody, nawet po przyjęciu upraszczających założeń co do postaci poszukiwanych obiektów, wymagają przeprowadzenia żmudnych i nudnych rachunków. Choć, z drugiej strony, znajomość symetrii równania to dużo więcej niż tylko znajomość jego rozwiązania, zob. [Cantwell, str. 291–293].

Teraz systemy obliczeń symbolicznych są powszechnie dostępne i potrafią rozwiązać większość zadań typu „wyznacz rozwiązanie ogólne równania różniczkowego” – choć czasem trzeba wypróbować kilka programów. Co znamienne, już w artykule [Cheb-Terrab et al.] sprzed prawie 20 lat, opisano program komputerowy wykorzystujący techniki grup symetrii Liego i kilka sprytnych heurystyk, który (testowany na 552 przykładach z budzącej strach wśród studentów klasycznej książki Kamkego) miał skuteczność 78% – a to zasługiwałoby na solidną czwórkę!

Literatura:

Cantwell, B.J. *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, 2002.

Cheb-Terrab, E.S., and Kolokolnikov, T. *First-order ordinary differential equations, symmetries and linear transformations*. European Journal of Applied Mathematics. Vol. 14, 2003.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1678. W turnieju szachowym każdy uczestnik grał z każdym dokładnie jeden raz. W każdej rundzie każdy uczestnik zagrał jedną partię. W co najmniej połowie wszystkich partii obaj uczestnicy pochodzili z tego samego miasta. Udowodnij, że w każdej rundzie doszło do przynajmniej jednej rozgrywki, w której spotkały się osoby z tego samego miasta.

Rozwiązanie na str. 18

M 1679. Czy istnieje 19-kąt wpisany w okrąg, którego wszystkie boki są różne, a miary kątów wewnętrznych (wyrażone w stopniach) są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie na str. 3

M 1680. Rozwiązać układ równań

$$\frac{3x - y}{x - 3y} = x^2, \quad \frac{3y - z}{y - 3z} = y^2, \quad \frac{3z - x}{z - 3x} = z^2$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

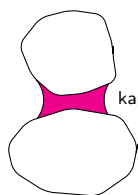
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1027. Budowę zamku z piasku często przerywają „katastrofy budowlane” polegające na pęknięciu i obsunięciu się górnej części budowanej wieży wzdłuż płaszczyzny nachylonej do poziomu pod pewnym kątem $\alpha > \pi/4$. Piasek użyty do budowy wieży musi być mokry. Suchy piasek obsypuje się, przybierając kształt stożka o tworzącej nachylonej do poziomu pod kątem ϕ , przy czym $\text{tg } \phi \approx \mu$, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia między ziarnami piasku. Piasek nie może też być zbyt mokry, bo wtedy ma konsystencję (płynnego) błota. Budowa zamków jest możliwa, gdy wody jest dokładnie tyle, żeby zwilżała ziarna piasku, tworząc zlepiające je „mostki” (rysunek). Ile wynosi kąt α ?

Dla suchego piasku o jednakowych (w przybliżeniu), kulistych ziarnach $\phi \approx 30^\circ$.

Rozwiązanie na str. 19



kapilarny mostek

F 1028. Naładowane cząstki poruszające się w przestrzeni kosmicznej osiągną ogromne energie kinetyczne. Jako jeden z możliwych mechanizmów „rozpędzania” takich cząstek Enrico Fermi wskazał przelot cząstki przez obszar pola magnetycznego – np. wewnątrz międzygwiazdowych obłoków zjonizowanego gazu. Wiemy jednak, że oddziaływanie z polem magnetycznym nie zmienia energii kinetycznej naładowanej cząstki. Czy więc proponowany mechanizm „przyspieszania” cząstek jest realistyczny?

Rozwiązanie na str. 17



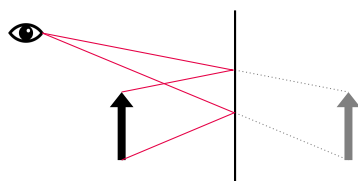
mała delta

Ile na oko można zobaczyć w lustrze?

Stojąc w niewielkiej odległości od lustra, wykonaj na nim obrys swojej twarzy. Następnie oddal się od lustra na możliwie największą odległość i wykonaj obrys ponownie.

Jak będą miały się do siebie oba obrysy?

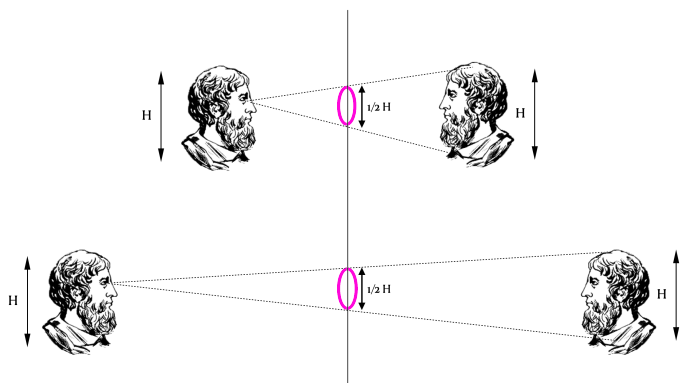
W pierwszym odruchu oczywista wydaje się odpowiedź, że drugi obrys, czyli ten, kiedy stoimy dalej od lustra, będzie mniejszy. Tak też odpowiadała większość uczestników Maratonu Wykładowego *Delta*, podczas którego zagadka została przedstawiona. Ponieważ jednak intuicja nie jest najlepszym narzędziem badawczym, na pewno udajesz się właśnie, Czytelniku, do lustra i dokonujesz obrysów. I tu niespodzianka. Wydają się całkiem podobne. Na wszelki wypadek powtarzasz doświadczenie i znowu ze zdumieniem stwierdzasz, że oba obrysy są tej samej wielkości! Zastanawiasz się pewnie teraz, jak to możliwe i dlaczego intuicja tak ochoczo prowadzi nas na manowce. Żeby to wyjaśnić, sięgasz pamięcią do lekcji fizyki ze szkoły podstawowej i przypominasz sobie kilka zasad powstawania obrazów w zwierciadłach płaskich.



Rys. 1. Schemat powstawania obrazu w zwierciadle płaskim. Promienie odbite od zwierciadła trafiają do naszego oka, dając złudzenie, że „pochodzą” od przedmiotu znajdującego się po drugiej stronie. Dlatego mówimy, że obraz jest pozorny

Obraz, który widzimy w zwierciadle, jest **pozorny**, to znaczy, że nasz mózg odbiera promienie odbite od zwierciadła tak, jakby odbijały się od naszej twarzy znajdującej się po drugiej stronie lustra. Ponadto obraz jest **tej samej wielkości** co przedmiot i znajduje się **w takiej samej odległości od zwierciadła**, tylko po drugiej stronie.

Wróćmy zatem do naszej zagadki z obrysami. Twarz, którą widzimy w lustrze, jest zawsze wielkości naszej twarzy, a lustro znajduje się dokładnie w połowie odległości między nami a naszym odbiciem. Wspomagając się prostym rysunkiem, zauważamy, że korzystając z twierdzenia Talesa, możemy nie tylko dowiedzieć, że oba obrysy są takie same, ale również że ich wymiary są równe połowie wymiarów naszej twarzy.



Rys. 2. Schemat powstawania obrysu na lustrze

Skuszeni podchwytliwością i prostotą rozwiązania zagadki idziemy krok dalej i szukamy kolejnych nieintuicyjnych przykładów z zastosowaniem tej prawidłowości. Wszak fizyczne łamigłówki nie tylko są świetną rozrywką intelektualną, ale także sposobem na zaciekawienie nauką szerokiego grona odbiorców i przedmiotem ciekawych zakładów.

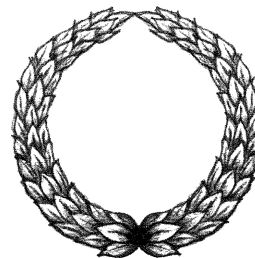
Podczas spotkania towarzyskiego bierzemy więc niewielkie lusterko i zadajemy pytanie: *Co należy zrobić, żeby w lusterku zobaczyć większą część naszej twarzy?* I tak, jak nas już nie zdziwi, że większość odruchowo odsunie lusterko, tak pytani ze zdumieniem zauważą zapewne, że odsuwanie lusterka nic nie da! Tłumaczymy więc, że owszem, nasze odbicie ze względu na perspektywę wydaje się mniejsze, jednak samo lustro także podlega jej działaniu, więc nie ma znaczenia, jak daleko będziemy trzymać lusterko, zawsze będzie w nim widać ten sam fragment naszej twarzy. (Możemy w tym miejscu również przytoczyć pierwszą zagadkę z obrysem).

Z pewnością udało nam się wywołać zaciekawienie wśród znajomych, dlatego mamy w zanadrzu jeszcze jedną zagadkę:

Trafiasz do sklepu, gdzie lustra sprzedają na metry. Masz 180 cm wzrostu i niewiele miejsca na ścianie, a chcesz się widzieć w całości, od stóp do głowy. Niestety lustra są drogie, a Ty nie szastasz forszą. Jak wysokie lustro każesz sobie przyciąć?

Nasi słuchacze po chwili zastanowienia podają poprawną odpowiedź i zauważają, że zagadka w sumie jest bardzo życiowa, a fizyka wcale nie jest taka trudna, jak im się wydawało. Dlatego nie pozostaje nam nic innego, jak zachęcić znajomych do uważnego obserwowania prostych, codziennych zjawisk i zauważania w nich praw fizyki, a najlepiej zrobimy to, szykując dla nich kolejne zagadki:).

Agnieszka CHUDEK



XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

W XVI Olimpiadzie Matematycznej Juniorów wzięło udział 8174 uczniów z 979 szkół. W zawodach II stopnia wzięło udział 1163 uczniów z 588 szkół. W zawodach III stopnia wzięło udział 204 uczniów ze 143 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów postanowił przyznać 91 uczniom tytuł laureata I, II lub III stopnia.

Laureaci I stopnia

Mateusz Wawrzyniak (maksymalna suma punktów na 2 i 3 etapie)
Dagna Helena Czubla, Karol Krzysztof Daniewski, Jan Michał Dorosiński, Dominik Tadeusz Figurski, Ewa Gołaszewska, Michał Jacek, Tymoteusz Michał Jędrzejewski, Grzegorz Kaczmarek, Marek Kamiński, Stanisław Paweł Lada, Jan Jarosław Lorenc, Magdalena Pudełko, Antoni Pusz, Tadeusz Marek Ryłski, Paulina Żeleźnik

Laureaci II stopnia

Wiktoria Alicja Bazan, Maja Dworakowska, Patricia Frevel, Mateusz Froncek, Adam Jan Gąsienica-Samek, Kajetan Góra, Jakub Hawryluk, Weronika Anna Janeczek, Adam Jankowski, Jakub Krzysztof Kajkowski, Michał Kaźmierczak, Antoni Tadeusz Kuraś, Ignacy Kus, Elżbieta Łabaj, Wojciech Stanisław Malinowski, Aleksander Maliszewski, Antoni Filip Mazur, Jerzy Olkowski, Stanisław Owsiak, Mateusz Pawlata, Stanisław Pekrul, Antoni Jakub Pierzchała, Miłosz Rafał Płatek, Łukasz Próchniak, Adam Sienkiewicz, Filip Sopala, Tymoteusz Stępkowski, Kamil Szmurło, Jakub Marcin Wilczyński, Stanisław Mariusz Wojtysiak, Inga Zasowska

Laureaci III stopnia

Szymon Anders, Stefania Ait Soura-Chmielnicka, Zuzanna Sandra Banasiewicz, Filip Banek, Maciej Aleksander Boroń, Mateusz Byzdra, Maria Chmielowiec, Jan Drabikowski, Błażej Dratwa, Katarzyna Furmanek, Łukasz Ganczarek, Igor Grauer, Jan Jakubowski, Milena Jadwiga Jaroszewicz, Anna Maria Karpińska, Maria Kaszewska, Alexey Koshevoy, Mirosław Kovalchuk, Antoni Łuczak, Stanisław Krzysztof Machnik, Bartłomiej Maciejewski, Michał Krzysztof Margos, Filip Tomasz Mężykowski, Magdalena Nieplowicz, Tymon Nowakowski, Szymon Piotr Perlicki, Maria Karolina Pezda, Jan Pietrasik, Maciej Popielarczyk, Andrzej Pręgowski, Patryk Rosół, Oliwia Aleksandra Rozkosz, Michał Smółko, Dominik Styła, Aleksandra Maja Sulik, Aleksander Szewczak, Jan Świerczyński, Piotr Szymon Tabaczyński, Szymon Urban, Mateusz Wesołowski, Hubert Konrad Wiśniewski, Wojciech Witold Wnuk, Bartosz Rafał Zalewski, Jakub Sławomir Zborowski

Wyróżnienie

Julian Zbigniew Kuryłłowicz-Kaźmierczak (najmłodszy uczestnik finałowego etapu zawodów w historii OMJ)

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej – organizator OMJ – ze środków uzyskanych z darowizny Fundacji mBanku przyznało najlepszym laureatom XVI Olimpiady Matematycznej Juniorów (2020/21) stypendia motywacyjne w ramach programu stypendialnego „Mistrzowie Matematyki” Fundacji mBanku.

Komitet Główny OMJ pragnie serdecznie podziękować Instytutowi Matematycznemu PAN w Warszawie za wsparcie organizacji Olimpiady, a także ponad stu instytucjom edukacyjnym (szkołom, uczelniom, placówkom wychowania pozaszkolnego), które zgodziły się na udostępnienie miejsca na przeprowadzenie zawodów II i III stopnia XVI OMJ. Szczególne podziękowania Komitet kieruje do wszystkich nauczycieli matematyki, którzy wyrazili gotowość do pełnienia funkcji koordynatora zawodów, odbywających się mimo trudnego czasu pandemii w formie stacjonarnej. Serdeczne podziękowania Komitet przesyła również w kierunku Fundacji mBanku oraz redakcji czasopisma *Delta* za ufundowanie nagród dla laureatów OMJ.



LXXII Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1155 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 500 uczniów, do zawodów stopnia trzeciego 172 uczniów, a tytuł finalisty uzyskało 160 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 21 kwietnia br. postanowił przyznać 52 tytuły laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasach podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

Juliusz Banecki (36) – Gdańskie Liceum Autonomiczne
Antoni Buraczewski (36) – LO nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu
Radosław Żak (36) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Nagrody stopnia drugiego

Korneliusz Obarski (32) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie
Michał Ciapka (30) – V LO w Bielsku-Białej
Paweł Gadziński (30) – V LO w Bielsku-Białej
Kosma Kasprzak (30) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Łukasz Orski (30) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu
Cezary Botta (29) – VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Piotr Kuc (29) – I Ogólnokształcące Liceum Akademickie im. Janiny Kossakowskiej-Dębickiej w Kielcach
Marek Zbysiński (29) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Nagrody stopnia trzeciego

Mieszko Baszczak (24) – Zespół Państwowych Szkół Muzycznych nr 1 w Warszawie
Adam Dankowiakowski (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Oskar Dąbkowski (24) – XIII LO w Szczecinie
Łukasz Łopacki (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Konstanty Smolira (24) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie
Antoni Stachowski (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Bartłomiej Bychawski (23) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu
Miron Hunia (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Łukasz Skiba (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Marcin Stopka (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Nagrody stopnia czwartego

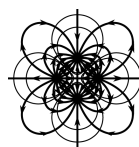
Kacper Paciorek (20) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Piotr Wojtala (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Jakub Bartecki (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Marcel Chwiałkowski (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Jakub Dziura (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Julia Filip (18) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie
Mateusz Gabzdyl (18) – V LO w Bielsku-Białej
Piotr Jakimiuk (18) – II LO im. księżnej Anny z Sapienhów Jabłonowskiej w Białymstoku

Tymoteusz Kucharek (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Michał Lipiec (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Krzysztof Lis (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Michał Mańka (18) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Patryk Michalski (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Michał Pajda (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Jakub Proboszcz (18) – Uniwersyteckie LO w Toruniu
Mateusz Rajs (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Krzysztof Salata (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Mateusz Scharmach (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Jakub Słowikowski (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Franciszek Sobota (18) – VIII LO im. Króla Władysława IV w Warszawie
Jan Strzeszyński (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Maksymilian Wdowiarz-Bilski (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Michał Wiliński (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Artur Wojtuszkiewicz (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Jan Zakrzewski (18) – Akademickie LO Politechniki Śląskiej w Gliwicach
Dominik Bereżański (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
Bartosz Chomiński (17) – LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
Bartosz Głowacki (17) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
Michał Hoffmann (17) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
Tymoteusz Kwieciński (17) – Uniwersyteckie LO w Toruniu
Daniela Spurtacz (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXXII Olimpiady Matematycznej otrzymały następujące osoby:

Bartłomiej Bychawski (zadanie 2) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu,
Patryk Michalski (zadanie 5) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie,
Jan Wangrat (zadanie 5) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie www.om.edu.pl.



OLIMPIADA FIZYCZNA

LXX Olimpiada Fizyczna

W roku 2020/21 odbyła się kolejna Olimpiada Fizyczna. Nie byłoby może w tym nic nadzwyczajnego – Olimpiada Fizyczna odbywa się nieprzerwanie od 70 lat – ale ta była szczególna, przebiegała bowiem w okresie pandemii koronawirusa. Przypomnę, że w ubiegłym roku decyzją Ministerstwa Edukacji Narodowej nie odbyły się finały olimpiad przedmiotowych (a więc również i Olimpiady Fizycznej) i nie wyłoniono laureatów. W tym roku Komitet Główny postanowił, że Olimpiada w kolejnym roku pandemii musi się odbyć w całości, do ogłoszenia wyników końcowych.

Przebieg Olimpiady był jednak nieco inny niż zazwyczaj. Pierwszy stopień (zadania rozwiązywane przez uczestników w domu) odbył się jak zawsze, bez zmian. Jednak drugi stopień, w którym tradycyjnie uczestnicy rozwiązują zadania w siedzibach Komitetów Okręgowych, czyli praktycznie w 14 wyższych uczelniach, musiał zostać zorganizowany inaczej. Zadania teoretyczne uczestnicy rozwiązywali w swoich domach, a ich praca monitorowana była przez kamery internetowe z laptopów. Ponadto zawody podzielono na trzy części. Zamiast rozwiązywać trzy zadania w ciągu 4,5 godziny, uczestnicy mieli do rozwiązania po jednym zadaniu w czasie 1,5 godziny. Niby to samo, ale jednak ten podział na kolejne zadania sprawił uczestnikom sporo kłopotu i wyniki były nieco niższe od przewidywanych. Zadanie doświadczalne uczestnicy rozwiązywali w tradycyjnych warunkach, w siedzibach Komitetów Okręgowych.

Finał Olimpiady Fizycznej odbył się w dniach 10 i 11 kwietnia 2021 roku. Uczestnicy rozwiązywali zadania w siedzibach Komitetów Okręgowych, w ten sposób uniknięto konieczności przyjazdu uczestników do Warszawy i nocowania w hotelach. Omówienie zadań odbyło się zdalnie na platformie Zoom. Wyniki Olimpiady i nagrody ogłoszono także podczas sesji zdalnej.

Zadanie doświadczalne na zawodach finałowych poświęcone było modelowaniu powstawania kraterów. Za meteoryty służyły kulki stalowe, a za powierzchnię Ziemi – naczynia z piaskiem. Rozmiary powstałych kraterów w piasku należało z wiązać z energią spadającej kulki. Znaną zależność można zastosować do „prawdziwych” kraterów i powiązać rozmiar krateru z energią padającego meteorytu.

Zadania rachunkowe dotyczyły ruchu hulajnogi elektrycznej, lotu na Marsa oraz, co może było trochę mniej ciekawe, rozrywania kołowego przewodnika umieszczonego w zmiennym polu magnetycznym. Zadania były trudne, w szczególności jeśli porównać je z typowymi zadaniami maturalnymi. Pełna treść zadań wraz z rozwiązaniami znajduje się na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej www.kgof.edu.pl.

Nagrodami w Olimpiadzie Fizycznej były bony podarunkowe oraz książki. Ponadto wszyscy finaliści będą zwolnieni z egzaminu maturalnego z fizyki i automatycznie uzyskają ocenę najwyższą. Pierwszych pięciu laureatów otrzymało zaproszenia do udziału w Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej, która odbędzie się na Litwie w lipcu tego roku. Ponadto pięciu uczniów, którzy w tym roku nie zdają matury, weźmie udział w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej, przeprowadzanej w tym roku zdalnie.

W zawodach finałowych Olimpiady uczestniczyło 77 uczniów ze wszystkich rejonów Polski, **tytuły laureatów przyznano 23 osobom**. Oto ich lista w porządku zajętych miejsc:

1. **Emil Kisielewicz**, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni, Gdynia, nauczyciel: Artur Kolincio
2. **Łukasz Orski**, Akademickie LO PWr, Wrocław, nauczyciel: Mirosław Kozłowski
3. **Antoni Grabowski**, Uniwersyteckie LO, Toruń, nauczyciel: Maciej Wiśniewski
4. **Juliusz Banecki**, Gdańskie Liceum Autonomiczne, Gdańsk, nauczyciel: Artur Ludwikowski
5. **Antoni Skoczypiec**, V LO im. A. Witkowskiego, Kraków
6. **Miłosz Matraszek**, XIV LO im. S. Staszica, Warszawa, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska
7. **Piotr Borodako**, V LO im. A. Witkowskiego, Kraków, nauczyciele: Witold Zawadzki, Tomasz Zajac
8. **Dawid Maskalaniec**, Prywatne LO w Szczecinku, Szczecinek, nauczyciel: dr hab. Karol Bartkiewicz
9. **Jakub Wróbel**, XIV LO im. S. Staszica, Warszawa, nauczyciele: Leszek Gładczuk, Elżbieta Zawistowska, Joanna Bogdanowicz
10. **Marcin Welter**, IV LO w Toruniu im. Tadeusza Kościuszki, Toruń, nauczyciel: Maciej Wiśniewski
11. **Korneliusz Obarski**, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin, nauczyciele: Piotr Kononowicz, Marek Sowa
12. **Kacper Paciorek**, V LO im. A. Witkowskiego, Kraków, nauczyciel: Tomasz Zajac
13. **Bartosz Żbik**, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków, nauczyciel: Witold Zawadzki
14. **Szymon Życiński**, LO nr II im. Joachima Chreptowicza, Ostrowiec Świętokrzyski, nauczyciel: Wojciech Studzieźba
15. **Bartłomiej Leks**, III LO im. A. Mickiewicza, Katowice, nauczyciel: Mariusz Turek
16. **Piotr Maksymiuk**, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie, Lublin, nauczyciele: Piotr Kononowicz, Paweł Dyniec, Grzegorz Zawadzki
17. **Jakub Lewandowski**, Liceum Politechniki Łódzkiej, Łódź, nauczyciele: Dariusz Krzyżański, Bogusława Kłos
18. **Krzysztof Sierocki**, II LO im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej, Poznań, nauczyciel: Damian Mikulski
19. **Michał Lipiec**, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków, nauczyciel: Witold Zawadzki
20. **Piotr Klubka**, II LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. A. Frycza Modrzewskiego, Rybnik, nauczyciel: Grzegorz Łopatka
21. **Patryk Michalski**, XIV LO im. S. Staszica, Warszawa, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska
22. **Tymoteusz Siemieniuk**, V LO im. A. Witkowskiego, Kraków, nauczyciel: Tomasz Zajac
23. **Ryszard Kobiera**, IX LO im. Klementyny Hoffmanowej, Warszawa, nauczyciel: Monika Owczarek



XXVIII Olimpiada Informatyczna

W dniach 13–16 kwietnia 2021 r. odbyły się zawody III stopnia XXVIII Olimpiady Informatycznej. Ze względu na pandemię w tym roku zarówno zawody II stopnia, jak i zawody III stopnia zostały zorganizowane zdalnie przez Internet. Do zawodów III stopnia zostało zakwalifikowanych 168 zawodników, którzy w tej edycji Olimpiady wyjątkowo nie mieli jeszcze zagwarantowanego tytułu finalisty. W ciągu dwóch dni zawodów uczestnicy rozwiązywali w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuł finalisty Olimpiady 104 zawodnikom, którzy w zawodach III stopnia uzyskali co najmniej 130 punktów, i wyróżnił tych spośród finalistów, którzy zdobyli co najmniej 165 punktów. Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zgodnie z poniższą listą (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie oi.edu.pl.

Laureaci I miejsca

1. **Antoni Buraczewski** (483, LO nr III im. Adama Mickiewicza, Wrocław)
2. **Jan Strzeszyński** (475, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)
3. **Bartłomiej Czarkowski** (440, III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
4. **Daniel Soboński** (404, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)

Laureaci II miejsca

5. **Jeremiasz Preiss** (395, LO nr XIV, Wrocław)
6. **Łukasz Orski** (385, Akademickie LO PW, Wrocław)
7. **Marcel Szelwiga** (379, LO nr XIV, Wrocław)
8. **Michał Stawarz** (356, XIV LO, Warszawa)
9. **Wojciech Weremczuk** (353, VI LO, Radom)
10. **Antoni Długosz** (350, V LO, Kraków)
11. **Olaf Surgut** (349, LO nr XIV, Wrocław)
12. **Jakub Bachurski** (343, XIV LO, Warszawa)
13. **Kacper Paciorek** (339, V LO, Kraków)
14. **Piotr Blinowski** (335, I LO, Lublin)
15. **Jakub Dziura** (306, XIV LO, Warszawa)

Laureaci III miejsca

16. **Jakub Kądziołka** (289, Akademickie LO Politechniki Śląskiej, Gliwice)
17. **Bartosz Kucypera** (284, LO nr XIV, Wrocław)
18. **Stanisław Czech** (273, III LO, Gdynia)
19. **Jacek Muszyński** (268, XIV LO, Warszawa)
- 20.–21. **Mateusz Hurkała** (267, V LO, Kraków)
Maciej Mejer (267, III LO, Gdynia)
22. **Paweł Pilarowski** (266, XIV LO, Warszawa)
- 23.–24. **Dawid Ratyński** (265, XIV LO, Warszawa)
Dominik Wawszczak (265, XIV LO, Warszawa)

25. **Rafał Mańczyk** (262, LO nr XIV, Wrocław)
- 26.–27. **Bogdan Błędziński** (259, XIV LO, Warszawa)
Bartosz Brejna (259, LO nr XIV, Wrocław)
28. **Filip Szczepański** (251, III LO, Gdynia)
- 29.–30. **Mikołaj Bulge** (241, XIV LO, Warszawa)
Kamil Szymczak (241, VIII LO, Warszawa)
31. **Wojciech Ładysz** (237, I LO, Białystok)
32. **Mateusz Jacniacki** (235, I LO, Lublin)
33. **Jakub Kaszycki** (232, XIV LO, Warszawa)
34. **Hubert Wasilewski** (230, XIV LO, Warszawa)
35. **Tymoteusz Kucharek** (229, XIV LO, Warszawa)
36. **Marek Wiśniewski** (227, LO nr XIV, Wrocław)
- 37.–39. **Tymon Cichocki** (222, III LO, Gdynia)
Patryk Malcher (222, LO nr XIV, Wrocław)
Grzegorz Ryn (222, V LO, Kraków)
- 40.–41. **Andrzej Jabłoński** (220, LO Sióstr Prezentek, Rzeszów)
Franciszek Witt (220, III LO, Gdynia)
- 42.–43. **Gabriel Antas** (219, I LO, Jasło)
Maciej Bielik (219, XVIII LO, Warszawa)
- 44.–45. **Jakub Rożek** (215, III LO, Gdynia)
Wiktor Siatkowski (215, LO nr XIV, Wrocław)
46. **Paweł Gadziński** (214, V LO, Bielsko-Biała)
- 47.–49. **Mikołaj Dziok** (211, VIII LO, Warszawa)
Wojciech Raczuk (211, III LO, Gdynia)
Marek Zbysiński (211, XIV LO, Warszawa)
50. **Wiktor Krzemiński** (210, LO nr XIV, Wrocław)
51. **Michał Opala** (207, LO nr XIV, Wrocław)
52. **Łukasz Smoliński** (206, LO, Mińsk Mazowiecki)
53. **Grzegorz Suwaj** (205, LO nr XIV, Wrocław)
54. **Bartosz Chomiński** (198, LO nr XIV, Wrocław)
- 55.–56. **Piotr Grynfelder** (195, XIV LO, Warszawa)
Michał Wiliński (195, III LO, Gdynia)

LXIV Olimpiada Astronomiczna

Olimpiada Astronomiczna przebiega w trzech etapach. Zadania zawodów I stopnia (szkolnych) są rozwiązywane w warunkach pracy domowej. Zadania zawodów II i III stopnia mają charakter pracy samodzielnej (pod kontrolą i w ograniczonym czasie).

Tematyka Olimpiady wiąże ze sobą astronomię, fizykę i astronomiczne aspekty geografii. Często nawiązuje do najnowszych wydarzeń astronomicznych. Duża liczba zadań rachunkowych wymaga od uczestników dobrego opanowania warsztatu matematycznego.

Zawody finałowe odbywają się w Planetarium Śląskim, które jest organizatorem Olimpiady. Jednym z zadań zawodów centralnych jest przeprowadzenie samodzielnej obserwacji astronomicznej, jeśli pozwala na to pogoda. Wśród zadań finałowych znajduje się też zadanie sprawdzające znajomość wyglądu nieba, rozwiązywane pod sztucznym niebem planetarium.

Wyniki tegorocznej Olimpiady Astronomicznej zostaną zamieszczone w numerze sierpniowym Delt. Tymczasem można je sprawdzić na stronie www.planetarium.edu.pl/oa.htm.



„Obcy” z planety Ziemia

Wszyscy już wiedzą, niektórzy piszą o tym nawet w książeczkach dla dzieci (miałam okazję czytać taki egzemplarz, autorstwa lubianego przez kobiety pisarza, Janusza L. Wiśniewskiego), że piękna struktura podwójnej helisy DNA powstaje dzięki połączeniu dwu niezależnych nici przez „mostki” wiążące zasadę adeninę (A), w jednej z nici, z zasadą tyminą (T), w drugiej, oraz zasadę guaninę (G) z cytozyną (C). W parze A:T powstają dwa mostki, w parze G:C – trzy. Konieczne w trakcie wielu procesów biologicznych rozerwanie tych mostków – skutkujące rozsunięciem dwu niezależnych nici helisy – wymaga nakładu energii.

Jeszcze w XX wieku sformułowano hipotezę o istnieniu „biosfery w cieniu”, mikrobiologicznej sfery ziemskiej radykalnie różnej od powszechnie znanej i opisywanej przez biologów i geofizyków. Postulowano np. istnienie „DNA”, w którym fosfor zastąpiony jest arsenem. Takiego DNA nie znaleziono i nie udało się zsyntetyzować chemicznie. Wydaje się, że na tej Ziemi ewolucja, po niewątpliwie różnych, nieznanach nam próbach, zdecydowała o istnieniu jednej wersji budowy chemicznej materiału genetycznego. Widocznie naprawdę optymalnej... Ale może są światy z innym DNA?

Nie chodzi jedynie o strukturę kanoniczną DNA: świat z cienia musiałby dysponować zestawem enzymów różnych od tych znanych obecnie i prawdopodobnie również nieznanach dotąd przekształceń genetycznych. Przypomina się także, sensacyjne w latach 70. XX wieku, odkrycie szczególnej struktury podwójnej helisy zbudowanej w obu niciach z naprzemiennych zasad G/C. Taka helisa ma odwrotny kierunek skrętności od powszechnie istniejącej i zupełnie różną strukturę przestrzenną, nazwaną Z-DNA. Strukturę Z-DNA uzyskano syntetycznie, odkryto też, że przejściowo i nietrwale występuje w pewnych procesach komórkowych, pełniąc rolę chemicznego sygnału.

Chemicznie modyfikowanymi składnikami DNA zajmowało się od wielu lat wielu uczonych, m.in. nasz „pierwszy biofizyk” David Shugar i jego zespół*. Niektóre modyfikacje odkrywano jako pojedyncze zmiany w rzadko znajdujących wirusach i bakteriofagach. Funkcjonalnie ważne okazały się, gdy czyniły DNA niewrażliwym lokalnie na działanie enzymów restrykcyjnych. Są to enzymy bakteryjne, stanowiące rodzaj systemu uodparniającego bakterie na infekcję obcym DNA (bakteriofagowym), zależne ściśle od standardowych zasad nukleinowych. Modyfikacje składników czyniły często DNA (bakteriofagów) odpornym na destrukcję enzymami restrykcyjnymi. Znane są też inne lokalne modyfikacje genomów (zazwyczaj przez dodanie grupy metylowej), od których zależna jest tzw. kontrola epigenetyczna w komórkach roślin i zwierząt.

W Szanghaju i Paryżu, nieomal jednocześnie, odkryto ostatnio nieznaną dotychczas cząsteczkę DNAZ, w której zasada A jest tak modyfikowana, że może utworzyć 3 (a nie 2) mostki z zasadą T. Ta zmiana czyni niezwykle DNA bardziej trwałym chemicznie i enzymatycznie.

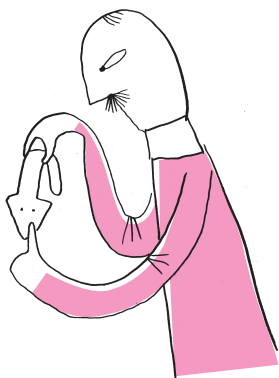
Odkrycie dziwnego DNA przypisuje się dość odległej w czasie pracy rosyjskich wirusologów, którzy go zauważyli, ale nie kontynuowali jego analizy. Dopiero w ostatnim czasie poddano sekwencjonowaniu DNA z kilku podobnych bakteriofagów morskich bakterii – i okazało się, że niosą one gen uczestniczący w syntezie modyfikowanej adeniny, którą to syntezę kończy gen zakażanej bakterii. Kolejnym spektakularnym odkryciem było znalezienie bakteriofagowego enzymu wprowadzającego modyfikowaną resztę A do DNA, a także usuwającego wszystkie „normalne” A uprzednio do tego DNA włączone.

Im dłużej myślimy o DNAZ, tym więcej stawiamy pytań o jego przemianę w cząstce bakteriofaga, obecnej w bakterii-gospodarzu. Dla mnie ciekawym pytaniem jest: dlaczego podobnej zmianie nie podlega zakażona bakteria i jej DNA? No i do czego jeszcze to odkrycie doprowadzi?

Obcy są już w oceanach.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

*David Shugar – założyciel pierwszych studiów biofizycznych w Polsce (w Uniwersytecie Warszawskim). Pracowałam w Jego zespole od 1959 roku, badając pochodne kwasów nukleinowych, był moim promotorem doktoratu (1965) i opiekunem pracy habilitacyjnej (1975).



Astronomia milimetrowa – obserwatorium ALMA

Aleksandra HAMANOWICZ*

*Space Telescope Science Institute, Baltimore, USA

Astronomia milimetrowa to dział radioastronomii zajmujący się badaniem molekularnego i atomowego gazu oraz kosmicznego pyłu o temperaturach nieprzekraczających 100 stopni Kelwina. Są to typowe warunki występujące w obłokach przestrzeni międzygwiazdowej, w której możliwe jest powstawanie nowych gwiazd. Ze względu na bardzo niskie temperatury obszary te są niewidoczne w zakresie światła widzialnego, ale świecą jasno w milimetrowej i submilimetrowej części widma. Obserwacje w zakresie milimetrowych długości fal umożliwiają astronomom śledzenie procesów gwiazdotwórczych o różnych rozmiarach: począwszy od badań dysków protoplanetarnych istniejących wokół młodych gwiazd po obłoki molekularne, z których powstają gwiazdy. Anteny działające w pasmach submilimetrowych rejestrują słabe sygnały z regionów gwiazdotwórczych pochodzących nawet z najodleglejszych, a co za tym idzie najstarszych galaktyk (z okresu gdy Wszechświat miał mniej niż $0,7 \times 10^9$ lat, o przesunięciu ku czerwieni $z \sim 8$).

Astronomia milimetrowa wykorzystuje obserwacje w zakresie fal radiowych wysokiej częstotliwości (100–1000 GHz), wykonywane za pomocą technik obserwacyjnych radioastronomii. Obserwacje fal o tak wysokiej częstotliwości są niezwykle trudne ze względu na fakt, iż znajdują się one na granicy przepuszczalności ziemskiej atmosfery. Jakość obserwacji zmienia się bardzo w zależności od warunków atmosferycznych, zależy zwłaszcza od wilgotności powietrza. Najtrudniejsze są obserwacje w zakresie najwyższych częstotliwości, gdzie przepuszczalność

atmosfery dla takiego promieniowania spada niemal do zera i jest osiągalna tylko w wyjątkowo suchych warunkach atmosferycznych. Para wodna jest największym problemem obserwacji milimetrowych, gdyż molekule wody w atmosferze znacznie zmniejszają rejestrowany sygnał, chętnie absorbując promieniowania milimetrowe, i dodatkowo przez swoją emisję termiczną zwiększają szum zaburzający obserwacje. Ze względu na te specyficzne wymagania obserwatoria milimetrowe budowane są na wysoko położonych, suchych płaskowyżach, takich jak Plateau de Bure w Alpach Francuskich czy płaskowyż Chajnantor w Andach Chilijskich.

ALMA (*Atacama Large Millimeter Array*), największy i najbardziej czuły teleskop milimetrowy na świecie, powstał dzięki współpracy między Ameryką Północną, Europą oraz Azją Wschodnią. Zarządzany jest bezpośrednio przez Joint ALMA Observatory. Polska, dzięki partnerstwu z ESO (*European Southern Observatory*), jest częścią tego międzynarodowego projektu (www.eso.org/public/poland/teles-instr/alma/). Jest to obecnie najnowocześniejszy teleskop służący do badania najzimniejszych obiektów we Wszechświecie. Interferometr ALMA jest umieszczony w wysoko położonym obserwatorium (5000 m n.p.m.) w pustynnych Chilijskich Andach, około 50 km na wschód od San Pedro de Atacama w północnym Chile, jednym z najsuchszych, a tym samym najlepszych miejsc do obserwacji astronomicznych na świecie.

Wyjątkowa lokalizacja radioteleskopu ALMA realizuje dwa wymagania obserwatorium milimetrowego – wysokość nad poziomem morza oraz suchość powietrza.

ALMA to największy na świecie teleskop naziemny, obejmujący łączny obszar o średnicy 16 kilometrów, na którym umieszczonych jest 66 anten. Pięćdziesiąt głównych 12-metrowych anten może zmieniać swoją pozycję na płaskowyżu, regulując osiąganą przez obserwatorium rozdzielczość (im anteny są rozstawione dalej od siebie, tym większa wypadkowa wielkość wirtualnego teleskopu i lepsza rozdzielczość). Cztery dodatkowe, również 12-metrowe, anteny wykonują pomiar całkowitej jasności obiektu, pozwalając skalibrować obserwacje wysokiej rozdzielczości. Kolejnych dwanaście 7-metrowych anten może zostać dołączonych do obserwacji (jeszcze bardziej wzmacniając czułość instrumentu) lub mogą być one używane osobno. Pole widzenia ALMA zależy od częstotliwości, na których prowadzone są obserwacje: od 1 minuty kątowej dla najniższych częstotliwości (84–116 GHz, tzw. Band 3) do 10 sekund kątowych dla najwyższych częstotliwości (602–720 GHz, Band 9). Z tego powodu ALMA ani żaden inny interferometr radiowy czy milimetrowy nie nadają się do dużych przeglądów nieba i są używane głównie do dokładnych obserwacji pojedynczych obiektów.

Dzięki transformacji Fouriera sygnał (obraz) z wielu teleskopów składany jest do pojedynczego sygnału będącego obrazem obserwowanego obiektu. Dla Czytelnika Zainteresowanego, wzór na transformację Fouriera: en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform_pierwszy_wzór pod „definition”

Technika interferometrii radiowej, będąca podstawą działania obserwatorium ALMA, pozwala osiągnąć wysoką rozdzielczość i czułość dzięki połączeniu obserwacji z wielu małych teleskopów – bez konieczności budowy potężnego, jednolitego teleskopu. Grupa połączonych razem małych teleskopów obserwuje jednocześnie ten sam obiekt. Zarejestrowany sygnał jest przekazywany do kolimatora, w którym przy znajomości dokładnej odległości między antenami sygnał może być sprowadzony do jednej fazy. Połączenie tych sygnałów wzmacnia mierzone natężenie, a informacja o różnicy faz między kolejnymi parami anten pozwala na stworzenie dwuwymiarowego wzoru interferencyjnego.



Rozwiązanie zadania M 1680.
Układ równań możemy równoważnie zapisać jako

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{cases}$$

Ponieważ

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \frac{3 \operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha)^3}{1 - 3 \operatorname{tg}(\alpha)^2},$$

więc podstawiając $x = \operatorname{tg}(\alpha)$, dla pewnego $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, widzimy, że pierwsze równanie przedstawia się jako $y = \operatorname{tg}(3\alpha)$, drugie jako $z = \operatorname{tg}(9\alpha)$, a trzecie jako $x = \operatorname{tg}(27\alpha)$. Wobec tego $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(27\alpha)$, więc

$$(x, y, z) = \left(\operatorname{tg} \frac{k\pi}{26}, \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{26}, \operatorname{tg} \frac{9k\pi}{26} \right)$$

dla $k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12\}$.

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 1028.

Po wejściu w obszar działania pola magnetycznego naładowana cząstka porusza się po skomplikowanym torze (po krzywej śrubowej wokół linii sił pola) i opuszcza ten obszar z prędkością o zmienionym kierunku oraz niezmięionej wartości w stosunku do prędkości, z jaką w ten obszar weszła. Jeśli względem obserwatora cząstka porusza się z prędkością \vec{v} i zderza się z obszarem występowania pola (obłok zjonizowanego gazu) poruszającego się względem obserwatora z prędkością \vec{u} , to względem pola prędkość cząstki wynosi $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$ przed zderzeniem i \vec{V}' po zderzeniu, przy czym $|\vec{V}'| = |\vec{V}|$. Po zderzeniu obserwator zarejestruje cząstkę o prędkości $\vec{w} = \vec{u} + \vec{V}'$. Największy wzrost energii kinetycznej cząstki obserwator zarejestruje, gdy zwroty \vec{v} i \vec{u} są przeciwne, a w wyniku zderzenia kierunek prędkości cząstki względem pola zmieni się na przeciwny. Zmiana energii kinetycznej cząstki o masie m wyniesie wówczas (obliczenie dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła):

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2}m(v+2u)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \\ &= 2mu(v+u). \end{aligned}$$

Udowodniliśmy, że zaproponowany mechanizm może prowadzić do przyspieszania cząstek.

W pracach dotyczących omawianego efektu Fermi przeprowadził obliczenia w ramach szczególnej teorii względności – obliczenia i wynik są nieco bardziej skomplikowane, ale wniosek pozostaje niezmienny.

E. Fermi, *Physical Review* **75**, 1169 (1949);

E. Fermi, *The Astrophysical Journal* **119**, 1 (1954).

Tak połączone w sieć anteny działają jak elementy jednego dużego teleskopu, o wielkości równej odległości między parą najdalej położonych od siebie anten. W ten sposób ALMA uzyskuje rozdzielczość nawet dziesięciokrotnie wyższą niż Kosmiczny Teleskop Hubble'a.

Poprzez transformację Fouriera interferometryczny wzór może zostać następnie przekształcony w matematyczną reprezentację oryginalnego sygnału – obraz obserwowanego obiektu. Analizując obserwacje interferometryczne, należy więc pamiętać, że nie patrzymy na rzeczywisty obraz nieba, jak to ma miejsce w przypadku detektorów optycznych, ale jego matematyczną reprezentację, odtworzoną ze wzoru interferometrycznego. Analiza takich danych jest bardziej skomplikowana, gdyż niektóre struktury mogą być nieistniejącymi w rzeczywistości artefaktami transformacji Fouriera, niebędącymi reprezentacją rzeczywistych właściwości obserwowanego obiektu.

Teleskopy milimetrowe i interferometria radiowa dostarczyły najciekawsze odkrycia i obrazy obiektów autonomicznych ostatnich lat, takie jak szczegółowe mapy dysków protoplanetarnych czy obraz czarnej dziury w sercu galaktyki M87. Dzięki rozwojowi tej dziedziny w ciągu ostatniej dekady odkrywamy ciemny i zimny kosmos, który wcześniej był przed nami ukryty.

Jak nie wierzyć w liczby rzeczywiste?

Aleksy SCHUBERT*

Dyskusje na temat wiary matematycy zwykle uważają za coś wykraczającego poza zakres ich aktywności. Nie zmienia to jednak faktu, że czasem na ten temat się wypowiadają. Na przykład Leonhard Euler w swoim dziele *Vollständige Anleitung zur Algebra* z 1770 roku pisał tak:

Ponieważ wszystkie liczby, jakie można sobie wyobrazić, są albo większe od 0, albo mniejsze od 0, albo równe 0, to jasne jest, że pierwiastki kwadratowe liczb ujemnych nie mogą być uważane za możliwe liczby [liczby rzeczywiste]. W związku z tym musimy przyjąć, że takie liczby są niemożliwe. To zaś prowadzi nas do pojęcia liczb, które ze swej istoty są niemożliwe, a zwykle nazywane liczbami urojonymi albo fantastycznymi, gdyż istnieją one tylko w wyobraźni.

Tak oto sławny matematyk poddał w wątpliwość istnienie liczb urojonych, czy szerzej – zespolonych, które dziś stanowią jeden z centralnych obiektów badawczych matematyki.

Dlaczego jednak w ogóle można poddawać w wątpliwość istnienie czegoś, co zostało nazwane *rzeczywistym*? Cóż, sięgnijmy po wypowiedź innego sławnego matematyka, Leopolda Kroneckera. Przypisuje mu się taką wypowiedź:

Liczby naturalne stworzył dobry Bóg. Reszta jest dziełem człowieka.

Według tego zdania ewidentnie liczby rzeczywiste mają gorszy status niż naturalne. Możemy zatem uciec się do naszej dociekliwości i zacząć zgłębiać różnice między liczbami naturalnymi a rzeczywistymi, zwłaszcza te dotyczące intuicji leżących u podstaw ich istnienia.

Liczby naturalne mają to do siebie, że łatwo jest nam znaleźć w naszym otoczeniu ich *reprezentacje* fizyczne. Na przykład reprezentacją fizyczną liczby 5 jest pięć palców mojej prawej ręki, a reprezentacją fizyczną liczby 2 jest dwoje moich uszu. Natychmiast ktoś może powiedzieć, że reprezentacją fizyczną liczby rzeczywistej jest punkt na prostej. Zaraz, zaraz, ale czy punkt jest czymś, co istnieje w świecie fizycznym? Przecież gdy narysujemy punkt na prostej, to on ma jakąś długość. Wtedy jednak trudno jest nam powiedzieć, jaką faktycznie liczbę reprezentuje. Może reprezentuje tylko liczbę wymierną? – takich jest przecież mnóstwo w zakresie, na jakim jest rozpięty.

Jednak żeby zacząć mówić bardziej precyzyjnie o powyższych rozróżnieniach, dobrze jest dokładniej wiedzieć, czym jest liczba rzeczywista. Otóż potrzebę

istnienia innych liczb niż naturalne i wymierne widzieli już starożytni Grecy. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do kwadratu o boku 1 wynikało, że jego przekątna ma długość $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Z kolei, jeśli przyjąć, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, to $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są naturalne. Z tego stosunkowo szybko dojdziemy do równości $2q^2 = p^2$. Jednak ta jest niemożliwa do spełnienia, bo jakie by liczby p i q nie były, to lewa strona tej równości ma w rozkładzie na czynniki pierwsze nieparzystą liczbę wystąpień 2, prawa zaś – parzystą.

Grecy znaleźli też sposób na radzenie sobie z takimi liczbami, a nawet dwa sposoby. Jeden z nich, pochodzący od Eudoksosa, polegał na tym, żeby nie przejmować się specjalnie dokładnym wyrażeniem liczby, ale operować na przybliżeniach, w razie czego dokładność przybliżenia dostosowując do problemu, jaki rozwiązujemy. Inne podejście, pochodzące od Teajtetosa, zasadzało się na zapisywaniu liczby w postaci ułamka łańcuchowego. I tak liczbę $\sqrt{2}$ można zapisać w postaci łatwego do intuicyjnego odczytania ułamka

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Poniższych ułamków starożytni zapewne nie znali, ale warto zobaczyć, jak ładnie w tej postaci zapisują się liczby π oraz e :

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \dots}}}$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$



Rozwiązanie zadania M 1678.

Nazwijmy dwóch graczy *sąsiadami*, jeśli pochodzą z tego samego miasta. Przypuśćmy, że w którejś rundzie nie było meczu pomiędzy sąsiadami. Możemy zatem w tej rundzie podzielić uczestników na pary osób z różnych miast. Weźmy pod uwagę dowolnego uczestnika. Jego przeciwnik w tej rundzie nie jest jego sąsiadem, a w każdej innej partii gra nie więcej niż jeden jego sąsiad. Wobec tego mniej niż połowa wszystkich przeciwników wybranego uczestnika to jego sąsiedzi. Oznacza to, że każdy uczestnik rozegrał więcej gier z niesąsiadami niż z sąsiadami, a zatem łączna liczba rozgrywek między sąsiadami wyniosła mniej niż połowę wszystkich rozgrywek – sprzeczność.

Współczesne pojęcie liczby rzeczywistej ukształtowało się w XIX wieku. Wtedy pojawiły się dwie definicje liczb rzeczywistych. Jedna z nich wprowadzała je przez tzw. *przekroje Dedekinda*. Druga przez tzw. *ciągi Cauchy’ego*. Chociaż ta pierwsza definicja ma matematycznie lepsze własności, to skupimy się na tej drugiej – jest ona bliższa naszemu codziennemu doświadczeniu liczb rzeczywistych przedstawianych w postaci rozwinięcia dziesiętnego. Przez ciąg Cauchy’ego będziemy rozumieli takie przyporządkowanie liczbom naturalnym liczb wymiernych, że zachodzi następujący warunek:

dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje takie miejsce N w ciągu, że dla dowolnych liczb m, k większych od N liczba przyporządkowana m różni się od liczby przyporządkowanej k o mniej niż $\frac{1}{10^n}$.

Według tej definicji, jeśli będziemy rozważali kolejne elementy ciągu

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3,1, \quad a_3 = 3,14, \quad \dots, \\ a_n = \text{rozwińcie } \pi \text{ do } n - 1 \text{ miejsc po przecinku, } \dots$$

to dla dowolnego $\frac{1}{10^n}$ od pewnego momentu, a konkretnie od $N = n + 1$, dowolne elementy o dalszych indeksach będą się od siebie różniły o mniej niż $\frac{1}{10^n}$.

Co ciekawe, po pewnej dozie zastanowienia, możemy dojść do wniosku, że rozwinięcia dziesiętne, z wyjątkiem jednego małego drobiazgu, jednoznacznie opisują wszystkie liczby rzeczywiste. To drobne zaburzenie, o którym wspominam na marginesie, łatwo jest usunąć i nie wpływa ono na prawdziwość tego, o czym piszę dalej.

Tak ukształtowane pojęcie liczb rzeczywistych nie budziło już wątpliwości wśród matematyków, ponieważ dobrze dawało się wpasować w podzielaną przez ogromną większość społeczności matematycznej platonistyczną wizję istnienia. W ramach tej wizji cechę istnienia gotowi jesteśmy przypisać *wszystkim* rzeczom dającym się sprowadzić za pomocą dobrze znanych narzędzi do bytów wcześniej już uznanych za istniejące, czyli w języku matematyki rzeczom, dla których

Chodzi o to, że liczba 1 da się zapisać także jako 0,(9), czyli ułamek nieskończony z samymi dziewiątkami w rozwinięciach dziesiętnych.



Rozwiązanie zadania F 1027.

Pęknięcie wieży (kolumny) z piasku wzdłuż płaszczyzny wymaga zerwania sił przylegania ziaren piasku spowodowanych istnieniem „mostków” z wody zwilżającej piasek. Potrzebna do tego siła T działająca równoległe do powierzchni S' pęknięcia jest proporcjonalna do liczby zerwanych mostków, a więc do powierzchni pęknięcia S' :

$$T = c \cdot S'.$$

Przesunięcie części kolumny nad pęknięciem wymaga działania dodatkowej siły pokonującej tarcie. Dla powierzchni pod kątem α do poziomu wymaga to, aby składowa F_t ciężaru kolumny F , styczna do pęknięcia, spełniała warunek:

$$F_t > c \cdot S' + \mu F_n,$$

gdzie F_n oznacza siłę prostopadłą do płaszczyzny pęknięcia. Źródłem sił F_t i F_n jest ciężar F górnej części kolumny: $F_t = F \sin \alpha$, $F_n = F \cos \alpha$. Dodatkowo $S' = S/\cos \alpha$, gdzie S oznacza pole przekroju poziomego. Otrzymujemy warunek:

$$F > \frac{c \cdot S}{\sin \alpha \cos \alpha - \mu \cos^2 \alpha}.$$

Najmniejsza siła (F_{kr}) spełniająca warunek odpowiada kątowi α_m , dla którego mianownik przyjmuje wartość maksymalną. Warunek konieczny maksimum: $\cos 2\alpha_m + \mu \sin 2\alpha_m = 0$. Po podstawieniu $\operatorname{tg} \phi = \mu$ i skorzystaniu z własności funkcji trygonometrycznych otrzymujemy: $\alpha_m = \pi/4 + \phi/2$, dla piasku $\alpha_m \approx 60^\circ$, a krytyczna wartość siły F to:

$$F_{kr} = \frac{c \cdot S}{1 - \sin \phi}.$$

Czytelników Dociekliwych czytających *Deltę* na plaży zachęcamy do wykonania odpowiednich obserwacji i pomiarów.

Co ciekawe, bardzo podobne pojęcie liczby pojawiło się w notatkach Ady Lovelace. Kto wie, gdyby maszyna analityczna Babbage'a powstała w XIX wieku, możliwe, że używalibyśmy właśnie takiego pojęcia liczby rzeczywistej.

To jedna z wielu możliwych równoważnych definicji tego pojęcia, napisana tak, aby lepiej pasowała do rozwinięć dziesiętnych liczb.

Odpowiedź do zagadki z *Małej Deltę*:

Wystarczy przyciąć lustro wysoko na 90 cm. Trzeba je jeszcze tylko odpowiednio zawiesić. Żebyśmy mogli zobaczyć się w całości, górna krawędź lustra powinna znaleźć się dokładnie w połowie wysokości między czubkiem głowy a oczami. A gdybyśmy chcieli zobaczyć w nim również nasze stopy, nie może ich zasłaniać żadna szafka ani umywalka. . .

da się pokazać *model*. Tutaj za istniejące uważamy liczby naturalne, ciągi nieskończone oraz wyniki działań na zbiorach bytów już istniejących.

Jest jeszcze drugi ważny sposób uznawania rzeczy za istniejące w ramach platonistycznego spojrzenia. Można za istniejące uznać takie byty, które możemy opisać za pomocą pewnych praw podstawowych, tzw. *aksjomatów*, a te w sposób systematyczny odnieść do rzeczywistości. Na tej zasadzie uznajemy istnienie punktów i prostych w geometrii Euklidesowej czy liczb naturalnych. Na tej też zasadzie były rozumiane liczby rzeczywiste przed pojawieniem się tych definicji, ale nie było dobrego narzędzia do określenia pełnego zbioru aksjomatów tych liczb.

Wszystko to wygląda bardzo dobrze, dopóki jednak nie przyjrzymy się temu, ile jest liczb rzeczywistych. Otóż niemiecki matematyk Georg Cantor pokazał, że liczb rzeczywistych – reprezentowanych jako nieskończone ciągi rozwinięć dziesiętnych – jest istotnie więcej niż liczb naturalnych. Na tyle więcej, że nie istnieje przekształcenie z liczb naturalnych, które „wyczerpałoby” wszystkie liczby rzeczywiste. Skądinąd wiadomo, że wszelkich zapisów skończonych, jakie można dokonać za pomocą skończonego zestawu znaków, jest co najwyżej tyle, ile liczb naturalnych. Zatem gdybyśmy użyli do ich wykonania *wszystkich* przedmiotów ze znanego nam, siłą rzeczy skończonego, świata, to nie dalibyśmy rady opisać wszystkich liczb rzeczywistych – nawet przy założeniu, że dysponujemy nieskończoną energią i czasem oraz możemy układać te przedmioty na wszystkie możliwe sposoby. Tego nie dałoby się zrobić, nawet używając *wszystkich* liczb naturalnych! Zatem tak jak łatwo znajdujemy skończone reprezentacje dla liczb naturalnych w naszym świecie, nie uda się to z liczbami rzeczywistymi. Mamy tutaj jeszcze jeden dodatkowy kłopot: chciałoby się pokazać choć jedną taką liczbę, w którą możemy na tej zasadzie nie wierzyć – żeby było wiadomo, w co nie wierzyć. Tymczasem tego nie jesteśmy w stanie w ogóle zrobić.

Oczywiście ten argument nie oznacza, że wszystkie liczby rzeczywiste nie mają reprezentacji. Widzieliśmy wcześniej w tym tekście, że $\sqrt{2}$, π czy e swoje reprezentacje mają, choćby w postaci ułamków łańcuchowych. Możemy pójść nieco dalej i pokusić się o bardzo ogólną, pochodzącą w istocie swej od Alana Turinga, definicję *obliczalnej liczby rzeczywistej*.

Liczba rzeczywista x jest obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje algorytm, czyli przepis, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, taki że dla każdej liczby n

$$f(n) \leq x < f(n) + \frac{1}{10^n}.$$

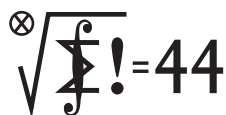
Takie liczby będą miały swoje reprezentacje w postaci wspomnianych wyżej *przepisów*. Z kolei przepisy możemy zakodować w postaci liczb naturalnych na przykład tak: ponumerujemy wszystkie słowa w słowniku języka polskiego oraz znaki interpunkcyjne. Niech przepis składa się z ciągu słów i znaków przestankowych w_1, \dots, w_k . Niech odpowiadające im liczby według powyższego ponumerowania będą równe, odpowiednio, n_1, \dots, n_k . Przepis możemy zareprezentować jako liczbę $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, gdzie p_1, \dots, p_k, \dots to kolejne liczby pierwsze. Oczywiście nie wszystkie liczby dadzą po odkodowaniu „sensowne” przepisy, ale za to wszystkie „sensowne” przepisy dadzą się w ten sposób przedstawić jako liczby.

Są matematycy, którzy zajmują się tak określonym pojęciem liczby obliczalnej. Wydaje się jednak, że nie zastąpi ono tradycyjnego podejścia, już choćby dlatego, że ciężko byłoby namówić rzesze studentów do dodatkowej regularnej pracy polegającej na pokazywaniu, iż taki czy inny ciąg jest obliczalny. Jednak jak ktoś chce, to może nie wierzyć we wszystkie liczby rzeczywiste, a jedynie w te, łatwiejsze do przyjęcia, obliczalne, zapisywalne jako program komputerowy. Ta wizja jest szczególnie bliska mnie, informatykowi. Tymczasem dla chętnych dwa ciekawe pytania: czy suma liczb obliczalnych jest obliczalna? I drugie, trudniejsze: czy iloczyn liczb obliczalnych jest obliczalny? Na oba pytania odpowiedź jest pozytywna, ale sam proces dojścia do niej jest bardzo ciekawy i odkrywczy.

Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

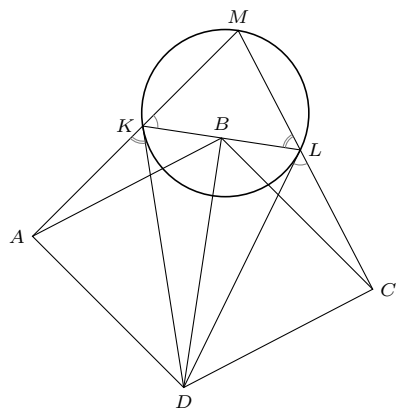
Rozwiązania zadań z numeru 3/2021



Przypominamy treść zadań:

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C . Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostokątności $DA \perp AK, DB \perp BK, DB \perp BL, DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M . Dowiedz, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D .

818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leq n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n .



817. Należy pokazać, że proste KD, LD są styczne do okręgu (KLM). Zgodnie z twierdzeniem o stycznej i cięciwie, jest to równoważne równości kątów:

$$(1) \quad \sphericalangle MKL = \sphericalangle CLD, \quad \sphericalangle MLK = \sphericalangle AKD.$$

Czworokąty $ADBK$ oraz $CDBL$ mają kąty proste przy wierzchołkach A, B oraz B, C ; każdy z nich ma więc okrąg opisany. Wobec tego

$$\begin{aligned} \sphericalangle MKL &= \sphericalangle ADB, & \sphericalangle ABD &= \sphericalangle AKD, \\ \sphericalangle MLK &= \sphericalangle CDB, & \sphericalangle CBD &= \sphericalangle CLD. \end{aligned}$$

Do uzyskania związków (1) wystarczy mieć równości

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD, \quad \sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$$

– a one są oczywiste, bo to pary kątów naprzemianległych w równoległoboku $ABCD$.

818. Wykażemy najpierw tezę zadania dla liczb nieparzystych $n \geq 3$ (założenie $n \geq 9$ nie będzie chwilowo potrzebne). Wystarczy znaleźć liczbę naturalną ℓ spełniającą warunki

$$(2) \quad 2^\ell \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{2}{3}n \leq \ell < n;$$

wówczas bowiem liczba $m = n - \ell$ czyni zadość wymaganiom: $0 < m \leq \frac{1}{3}n$; $2^n = 2^m 2^\ell \equiv 2^m \pmod{n}$.

Użyjemy funkcji Eulera φ , określonej (na przykład) wzorem

$$(3) \quad \varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}$$

(iloczyn po wszystkich dzielnikach pierwszych p liczby n); widać z tego wzoru, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla $n \geq 3$.

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 811 ($WT = 2,44$) i 812 ($WT = 1,60$) z numeru 12/2020

Marcin Małogrosz	Warszawa	45,69
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Jerzy Cisło	Wrocław	42,38
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Mikołaj Pater	Opole	36,14
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	32,13

Pan Marcin Małogrosz przekracza próg 44p. już po raz czwarty.

Skoro n jest liczbą nieparzystą, podstawowa własność funkcji φ (twierdzenie Eulera) zapewnia, że $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Jeśli więc $\varphi(n) \geq \frac{2}{3}n$, to biorąc we wzorze (2) $\ell = \varphi(n)$, mamy to, o co chodzi. Taka sytuacja zawsze ma miejsce, gdy n jest potęgą liczby pierwszej: $n = q^j$; bo wtedy (wzór (3)): $\varphi(n) = n \cdot \frac{q-1}{q} \geq \frac{2}{3}n$.

Zbadania wymaga sytuacja, gdy $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$; zatem liczba n nie jest potęgą liczby pierwszej i daje się przedstawić jako iloczyn czynników (nieparzystych) $a, b \geq 3$, względnie pierwszych. Wówczas $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)$ (znana własność funkcji Eulera). W myśl wcześniejszej uwagi, wartości φ dla argumentów a, b są parzyste: $\varphi(a) = 2\alpha, \varphi(b) = 2\beta$; tak więc $\varphi(n) = 4\alpha\beta$. Przy tym (znow na mocy twierdzenia Eulera):

$$2^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{a}, \quad 2^{2\beta} \equiv 1 \pmod{b},$$

skąd (przez podniesienie do potęg β, α): $2^{2\alpha\beta} \equiv 1$ zarówno \pmod{a} , jak i \pmod{b} . A ponieważ $n = ab$

(a, b względnie pierwsze), wynika stąd, że

$$2^{2\alpha\beta} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Skoro $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$, liczba $2\alpha\beta = \frac{1}{2}\varphi(n)$ jest mniejsza niż $\frac{1}{3}n$, więc pewna jej wielokrotność (oznaczymy ją ℓ) wpada do przedziału $[\frac{2}{3}n, n)$; zatem spełnia wymagany warunek (2). Mamy tezę dla n nieparzystych, $n \geq 3$.

Niech teraz $n > 8$ będzie liczbą parzystą – ale nie potęgą dwójki: $n = 2^j c$; $c \geq 3$ nieparzyste; $j \geq 1$. Na mocy wykazanej części zadania istnieje liczba naturalna $b \leq \frac{1}{3}c$, dla której $2^b \equiv 2^c \pmod{c}$. Niech $m = 2^j b$; zatem $2^m \equiv 2^n \pmod{c}$. Ponadto $m \geq 2^j > j$, skąd $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j}$. W konsekwencji $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j c}$, czyli \pmod{n} – jak wymaga teza zadania.

Pozostaje przypadek, gdy $n > 8$ jest potęgą dwójki: $n = 2^j$; $j \geq 4$. Teraz wystarczy wziąć $m = \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$. Dla $j \geq 4$ mamy $\frac{1}{3}n = \frac{1}{3}2^j \geq j$, więc $m \geq j$; każda z liczb $2^m, 2^n$ dzieli się przez 2^j , czyli przez n . Wszystkie przypadki zostały rozpatrzone, dowód jest zakończony.

Klub 44 F



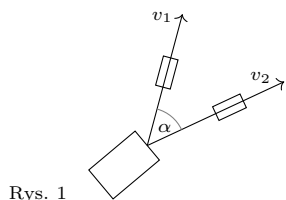
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2021

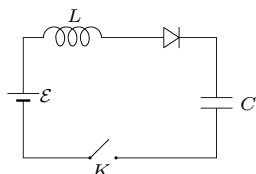
Przypominamy treść zadań:

714. Ciężka skrzynia przesuwana jest przy pomocy dwóch traktorów, które poruszają się z prędkościami v_1 i v_2 , między którymi jest kąt α (rys. 1). Jak jest skierowany i jaką ma wartość wektor prędkości skrzyni w chwili, gdy liny są równoległe do wektorów v_1 i v_2 ?

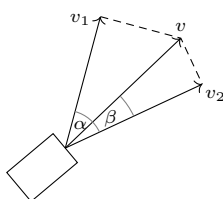
715. Do jakiego napięcia naładuje się kondensator o pojemności C po zamknięciu klucza K w obwodzie przedstawionym na rysunku 2? Jaka będzie maksymalna wartość natężenia prądu podczas ładowania? Siła elektromotoryczna baterii wynosi \mathcal{E} , opór wewnętrzny baterii i opory przewodów łączących są zaniedbywalne. Dioda jest idealna – w kierunku przewodzenia ma opór zerowy, a w kierunku zaporowym jej opór jest nieskończenie wielki. Indukcyjność cewki L jest na tyle duża, że proces ładowania jest powolny.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

714. Liny są nierozciągliwe, więc rzut prostopadły wektora prędkości skrzyni v na kierunek pierwszej liny ma wartość v_1 , a na kierunek drugiej v_2 . Wektory v_1 i v_2 są składowymi prędkości skrzyni, ale z różnych rozkładów na kierunki prostopadłe. Koniec wektora v znajduje się na przecięciu prostokątów do lin, wystawionych z końców wektorów v_1 i v_2 (rys. 3). Z rysunku widać, że $v_1 = v \cos(\alpha - \beta)$ oraz $v_2 = v \cos \beta$. Stąd

$$v_2/v_1 = \cos \beta / (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 1 / (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

$$\operatorname{tg} \beta = v_1 / (v_2 \sin \alpha) - \operatorname{ctg} \alpha.$$

Wartość wektora prędkości skrzyni dana jest wzorem

$$v = v_2 / \cos \beta = v_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

715. Oznaczmy przez Q_{\max} maksymalny ładunek na kondensatorze po zakończeniu procesu ładowania. Praca źródła prądu równa jest energii pola elektrycznego wewnątrz kondensatora

$$\mathcal{E}Q_{\max} = Q_{\max}^2 / 2C, \quad \text{stąd } Q_{\max} = 2C\mathcal{E}.$$

Maksymalna wartość napięcia, do jakiego naładuje się kondensator, $U = 2\mathcal{E}$.

Drugie prawo Kirchhoffa dla badanego obwodu ma postać

$$(*) \quad \mathcal{E} - LdI/dt - Q/C = 0.$$

Gdy natężenie prądu jest maksymalne $I = I_{\max}$, jego pochodna po czasie znika i ładunek na kondensatorze $Q = C\mathcal{E}$. Z zasady zachowania energii mamy wtedy

$$\mathcal{E}Q = LI_{\max}^2 / 2 + Q^2 / 2C.$$

Stąd

$$I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}.$$

Możemy też znaleźć zależność od czasu natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze. Różniczkując równanie (*) po czasie otrzymujemy

$$d^2I/dt^2 + I/LC = 0.$$

Rozwiązanie tego równania po uwzględnieniu, że $I(0) = 0$, ma postać

$$I = I_{\max} \sin \omega t, \quad \text{gdzie } \omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Ładunek na kondensatorze

$$Q = -(I_{\max}/\omega) \cos \omega t + I_{\max}/\omega,$$

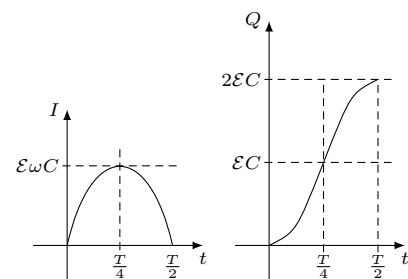
bo $Q(0) = 0$. Podstawiając I oraz Q do równania (*), które musi być spełnione w każdej chwili czasu, otrzymujemy

$$I_{\max} = \mathcal{E}\omega C = \mathcal{E} \sqrt{C/L}, \quad Q_{\max} = 2I_{\max}/\omega = 2\mathcal{E}C.$$

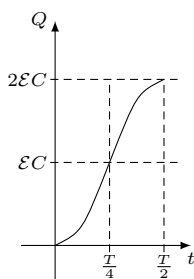
Zależność natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze od czasu ilustrują rysunki 4a i 4b.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 706 ($WT = 2,6$), 707 ($WT = 1,67$), 708 ($WT = 2,36$) i 709 ($WT = 1,65$) z numerów 11/2020 i 12/2020

Tomasz Wietecha	Tarnów	15	– 45,27
Jan Zambrzycki	Białystok	3	– 44,89
Michał Koźlik	Gliwice	4	– 42,82
Tomasz Rudny	Poznań		41,38
Konrad Kapcia	Poznań	1	– 33,63
Piotr Adamczyk	Warszawa		33,44
Paweł Perkowski	Ożarów	3	– 32,26
Ryszard Woźniak	Kraków		31,46
Jacek Konieczny	Poznań		31,33
Sławomir Buć	Mystków		29,75



Rys. 4a



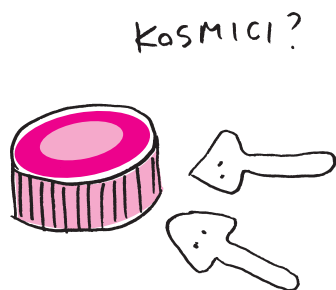
Rys. 4b

Skrypt regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Misja DART



Wszystko wskazuje na to, że lata dwudzieste obecnego wieku są początkiem prawdziwego podboju Układu Słonecznego przez Ziemiaków: oprócz przeróżnych misji satelitarnych planowana jest księżycowa baza orbitalna, a także ponowne lądowanie ludzi na powierzchni Księżyca, nie wspominając oczywiście o dalekosieżnych planach podboju i zasiedlenia Marsa. Z bardziej prozaicznej strony, przedmiotem coraz poważniejszych badań naukowych staje się problem rosnącej nieustannie liczby „śmieci kosmicznych” krążących wokół Ziemi, a ogólniej, podejmuje się szacowanie i reagowanie na zagrożenie pochodzące z kosmosu, np. asteroidy na kursie kolizyjnym. W filmie *Armageddon* z 1998 roku przedstawiony został „bombowy” pomysł rozłupania asteroidy na kawałki – w rzeczywistości (ogłędnie mówiąc) był niezbyt mądry; kolidujące z Ziemią ciała niebieskie mogą być tańszym kosztem i w sposób bezpieczniejszy przesuwane na inną orbitę.

Misja DART (*Double Asteroid Redirection Test*) agencji NASA i Johns Hopkins Applied Physics Laboratory (APL) jest pierwszym testem technologii motywowanej obroną Ziemi przed uderzeniem asteroidy. Będzie to demonstracja techniki *impaktora kinetycznego*, czyli fizycznego oddziaływania wysłanego specjalnie w tym celu satelity, który miałby wywołać zmiany ruchu asteroidy w przestrzeni kosmicznej. Jeśli start rakiety SpaceX Falcon 9 w połowie 2021 roku pójdzie zgodnie z planem, testowa operacja na niczego niespodziewającej się asteroidzie przewidywana jest we wrześniu 2022 roku.

Celem DART jest potencjalnie zagrażająca Ziemi asteroida Didymos (65803), będąca przedstawicielem grup Apollo i Amora, to znaczy asteroid krążących po orbitach przecinających się z orbitą Ziemi, wewnątrz orbity Marsa. Okres obiegu Didymosa wokół Słońca to około 2,11 lat. Nazwa Didymos jest znacząca, po grecku oznacza bliźniaka, obiekt jest bowiem układem podwójnym. Składnik pierwotny Didymosa ma około 780 metrów średnicy, natomiast składnik wtórny (lub „księżyc” o nazwie Dimorphos, nieformalnie zwany też Didymoon) mierzy około 160 metrów, czyli jest bardziej zbliżony rozmiarem do typowych asteroid, które stanowią największe zagrożenie dla Ziemi. To Dimorphos jest celem misji DART. Didymos był od dłuższego czasu intensywnie obserwowany przez ziemskie teleskopy, aby dokładnie poznać parametry orbitalne przed przybyciem satelity DART.

Niewielka zmiana orbity Dimorphosa zostanie osiągnięta poprzez celowe zderzenie satelity o masie 500 kg z księżycem z prędkością około 6 km/s, przy użyciu zaawansowanego oprogramowania do autonomicznej nawigacji. Zderzenie zmieni prędkość księżycyca na jego orbicie wokół składnika głównego o ułamek procenta, co zmodyfikuje nieco (o kilka minut) okres orbitalny, który obecnie wynosi 11,92 godziny: wystarczająco dużo, aby można było tę zmianę wykryć za pomocą ziemskich teleskopów. Oprócz przetestowania wpływu na ruch ciał niebieskich misja DART ma też na celu sprawdzenie nowego typu napędu: silnika jonowego NEXT-C (NASA’s Evolutionary Xenon Thruster) korzystającego z odrzutu jonów przyspieszanych siłami elektrostatycznymi i zasilanego bateriami słonecznymi.

Michał BEJGER

Niebo w lipcu

W Polsce lipiec jest ostatnim miesiącem roku, gdy w południe Słońce znajduje się na tyle wysoko nad widnokresem, że jest możliwe wystąpienie zjawiska łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: www.atoptics.co.uk/cha2.htm), a równocześnie, z drugiej strony, w nocy wędruje na tyle płytko pod nim, że można liczyć na obserwacje obłoków srebrzystych. Pod koniec miesiąca Słońce przecina równoleżnik 20° deklinacji, a dzień zaczyna się szybko skracać. Dzięki temu na teren całego kraju wracają noce astronomiczne i ponownie można obserwować słabiej świecące obiekty.

W lipcu nadarzy się okazja do dostrzeżenia z obszaru Polski wszystkich planet Układu Słonecznego. Niestety spośród jasnych planet tylko zbliżające się do sierpniowych opozycji Jowisz i Saturn są widoczne bez kłopotu. Także Uran i Neptun, przechodzące przez swoje opozycje, odpowiednio, w listopadzie i wrześniu, znajdują się całkiem wysoko na nocnym niebie. Natomiast świecące wieczorem planety Wenus i Mars oraz pojawiająca się o świcie planeta Merkury doświadczą niekorzystnego nachylenia ekliptyki do widnokreśgu i ich warunki obserwacyjne będą bardzo trudne.

Planeta **Merkury** 4 lipca osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą ponad 21° . Tym razem nie mamy szczęścia, gdyż planeta wędruje pod wciąż niedużo nachyloną do widnokregu ekliptyką, przez co o świetle Merkury zdąży się wznieść na wysokość zaledwie kilku stopni ponad widnokrąg, największą wysokość osiągając 13 lipca. Wtedy zajmie pozycję 4° nad północno-wschodnią częścią nieboskłonu. Na szczęście dla nas jasność Merkurego z czasem się zwiększa od $+0,5^m$ w dniu maksymalnej elongacji do -1^m pod koniec drugiej dekady lipca. W tym okresie widzialna tarcza planety skurczy się od $8''$ do $6''$, faza zaś urośnie od 35% do ponad 80%. Jednak 8 lipca odnalezienie Merkurego będzie odrobinę łatwiejsze dzięki Księżycowi w fazie jedynie 4%, który przejdzie 3° na północ od Merkurego. Tego samego dnia Merkury zbliży się na niecałe $15'$ do gwiazdy ζ Tauri, czyli południowego rogu Byka. O świetle Srebrny Glob zajmie pozycję na wysokości 6° i razem z Merkurym oraz świecącą 5° nad Księżycem gwiazdą El Nath, czyli północnym rogiem Byka, utworzą ciekawą konfigurację.

Wcześniej Księżyc zaprezentuje się na niebie porannym, zaczynając miesiąc jakieś 30° od Jowisza i jednocześnie 7° od Neptuna. Księżyc przejdzie przez now 10 lipca rano, 1 lipca wieczorem zaś – przez ostatnią kwadrę. Pierwsze pięć dni lipca Srebrny Glob spędzi na pograniczu gwiazdozbiorów Wieloryba, Ryb i Barana, wędrując pod ekliptyką. Stąd o świetle nie wznieś się wyżej niż $\sim 20^\circ$ ponad widnokrąg. Warto tutaj odnotować spotkanie Księżyca z **Uranem** w dniach 4 i 5 lipca. Najpierw Srebrny Glob w fazie 29% zbliży się doń na 8° , a następnego dnia wzejdzie 5° od planety w fazie zmniejszonej do 21%. Odnalezienie Urana to zadanie niełatwe, gdyż planeta świeci blaskiem $+5,8^m$ i na dwie godziny przed wschodem Słońca wznosi się na wysokość 10° ponad wschodni widnokrąg. Zadanie dodatkowo utrudni jaśniejsze już wtedy niebo. Przez kolejne trzy poranki Księżyc odwiedzi gwiazdozbiór Byka: 6 lipca przejdzie 6° na południe od Plejad, a dobę później 5° na północ od Aldebarana, 8 lipca zaś nastąpi wspomniane spotkanie z Merkurym. Warto wtedy obserwować cienki sierp Srebrnego Globu (w fazie od 14% do 4%) z bardzo ładnie prezentującym się tzw. światłem popielatym. Jak łatwo się wtedy przekonać, ciemna strona Księżyca jest czasami bez kłopotu widoczna z Ziemi.

Na niebie wieczornym w pierwszej części miesiąca można próbować dostrzec dwie sąsiadki Ziemi, czyli planety **Wenus** i **Mars**. Druga planeta od Słońca dąży do październikowej maksymalnej elongacji, natomiast Mars dąży do spotkania ze Słońcem, które nastąpi również w październiku. W lipcu Wenus zwiększy elongację od 20° do 33° , Mars zaś zachowa się odwrotnie. Wenus przez cały miesiąc utrzyma jasność $-3,9^m$, przy średnicy tarczy około $12''$ i fazie powyżej 83%. Mars świeci w tym miesiącu z jasnością $+1,8^m$, a jego tarcza ma średnicę $4''$. Niestety ze względu na pogarszające się nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu obie planety nie będą zbyt dobrze widoczne. Godzinę po zachodzie Słońca Wenus na początku lipca zajmie pozycję na wysokości zaledwie 3° nad północno-zachodnim widnokregiem, a pod koniec miesiąca zmniejszy tę wysokość do niewiele

ponad 1° . Mars początkowo pokaże się na wysokości 5° , by jeszcze przed końcem drugiej dekady lipca zniknąć ostatecznie w zorzy wieczornej.

Na pożegnanie Marsa obie planety zaprezentują się na niebie w ciekawej konfiguracji z Księżycem tuż po jego nowiu. Księżyc w fazie zaledwie 3% 11 lipca znajdzie się 8° na prawo od pary planet, oddzielonej wtedy zaledwie 1° od siebie. Dobę później znacznie lepiej widoczny, w fazie 8%, pokaże się niecałe 5° od planet, które przedzieli wtedy niecałe $40'$. Dodatkowo 8° na lewo od Księżyca pojawi się Regulus, najjaśniejsza gwiazda Lwa. Kolejnego dnia, 13 lipca, Wenus przejdzie mniej niż $30'$ od Marsa, Księżyc zaś zwiększy fazę do 14% i pokaże się 7° na wschód od najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Do końca miesiąca Wenus powędruje w lewo wzdłuż widnokregu, zbliżając się 21 lipca na niewiele ponad 1° do Regulusa. Mars pod koniec miesiąca zbliży się doń jeszcze bardziej, ale z Polski niestety nie da się już tego dostrzec.

Po minięciu Wenus i Marsa 17 lipca Księżyc przejdzie przez I kwadrę, świecąc 8° od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Trzy dni później Srebrny Glob w fazie zwiększonej do 86% zbliży się na 5° do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, by 22 lipca zakryć gwiazdę Nunki, jedną z jaśniejszych gwiazd Strzelca. Zjawisko to zajdzie w południowo-zachodniej części Polski, niestety na jasnym niebie, dodatkowo podczas zachodu Słońca. Polska znajdzie się na północnej granicy zjawiska. Na linii od Łeby poprzez Ciechanów do Hrubieszowa nastąpi zakrycie brzegowe.

Księżyc przejdzie przez pełnię 24 lipca, by w kolejnych dwóch nocach dotrzeć na odległość 5° najpierw do **Saturna**, a potem do **Jowisza**. Obie planety w lipcu poruszają się na zachód w odległości mniej więcej 20° od siebie. Saturn świeci z jasnością około $+0,2^m$, prezentując w teleskopach tarczę o średnicy $18''$. Jowisz natomiast w trakcie miesiąca zwiększy jasność od $-2,6^m$ do $-2,8^m$, zwiększając jednocześnie średnicę swojej tarczy od $45''$ do $48''$. Saturn kreśli swoją pętlę w gwiazdozbiorze Koziorożca, podczas gdy Jowisz przebywa w sąsiednim Wodniku. Obie planety wznoszą się w tym sezonie nieco wyżej niż w sezonie poprzednim. Saturn góruje na wysokości 20° , natomiast Jowisz czyni to 5° wyżej. Stąd powinno dać się zauważyć poprawę wyglądu tarcz obu planet w teleskopach.

Pod koniec miesiąca, 28 lipca, Srebrny Glob w fazie ponad 80% zbliży się na 5° do planety **Neptun**, która w tym sezonie obserwacyjnym kreśli swoją pętlę ponad 5° na północny wschód od gwiazdy φ Aqr. W lipcu i sierpniu planeta przejdzie przez wnętrza czworokąta gwiazd 6. i 7. wielkości, które pomogą w jej identyfikacji. Oczywiście noc spotkania z Księżycem nie jest najlepszą porą na obserwacje Neptuna, lepiej próbować polować nań w pierwszej części miesiąca, jednak wtedy na przeszkodzie stanie niższe położenie planety nad widnokregiem i jaśniejsze niebo. Ostatniej nocy miesiąca Księżyc znajdzie się w ostatniej kwadrze, mijając Urana w odległości 3° .

Ariel MAJCHER

Odkrycie, którego jeszcze nie było

Mają rozmiar Warszawy, masę pół miliona mas Ziemi, są oddalone od naszej planety o tysiące lat świetlnych i obracają się niezwykle szybko. Ponieważ ich pole magnetyczne jest nawet miliardy razy silniejsze od ziemskiego, stanowią charakterystyczne źródła fal radiowych o bardzo stabilnych częstotliwościach. Mowa tu oczywiście o pulsarach, czyli szczególnym rodzaju gwiazd neutronowych, odkrytych ponad pół wieku temu przez Jocelyn Bell.

Można powiedzieć, że pulsary stanowią wykrywalne i bardzo stabilne radiowe „zegary” galaktyczne. Czterdzieści pięć z nich było przedmiotem ponaddwunastoletnich badań prowadzonych przez zespół North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav). Ponad setka astrofizyków, głównie z USA i Kanady, przyglądała się temu, na ile stabilne w czasie są częstotliwości sygnału nadawanego przez te pulsary, mając nadzieję, że fale grawitacyjne – niewielkie okresowe odkształcenia czasoprzestrzeni – spowodują na pozór losowe przesuwanie się rejestrowanej częstotliwości wokół wartości średniej.

W zebranych i przeanalizowanych danych zespół NANOGrav znalazł intrygujący sygnał o niskiej częstotliwości, niewykluczone, że pochodzący od fal grawitacyjnych. Fale te mogłyby być wytwarzane przez pary supermasywnych czarnych dziur – każda o masie nawet miliarda mas Słońca – krążących wokół siebie w galaktykach oddalonych od Ziemi o miliony lat świetlnych. Obserwacja fal grawitacyjnych z tych źródeł pozwoliłaby zrozumieć, jak takie czarne dziury i ich galaktyki macierzyste rosną i ewoluują.

Efekt jest jeszcze zbyt słaby, aby mówić o odkryciu w ścisłym znaczeniu tego słowa. Na pewno NANOGrav był w stanie wykluczyć niektóre efekty inne niż fale grawitacyjne, takie jak wpływ materii naszego Układu Słonecznego lub pewne błędy w zbieraniu danych. Z tego względu bezpośrednia detekcja nowej klasy fal grawitacyjnych wydaje się możliwa w ciągu najbliższych kilku lat, jeśli zwiększyć liczbę obserwowanych pulsarów i czas obserwacji.

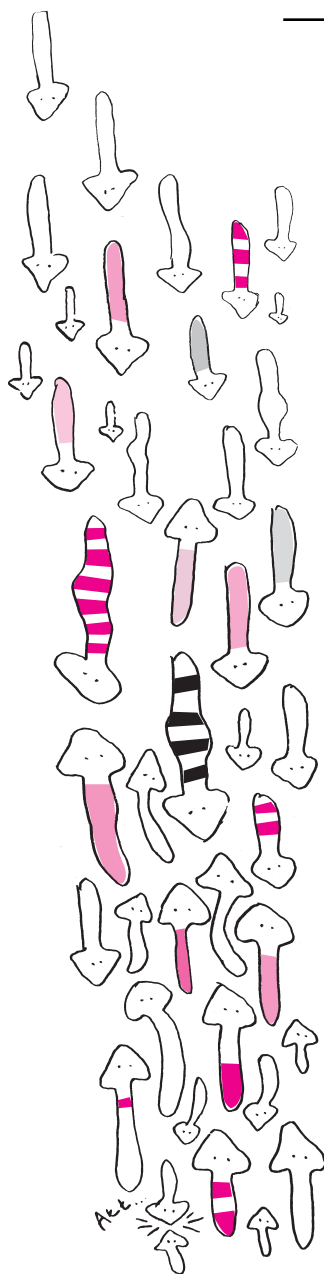
Czy coś może pójść nie tak? Niestety, jak najbardziej. 1 grudnia 2020 roku miała miejsce spektakularna katastrofa. Wążąca niemal 1000 ton platforma instrumentów ponadtrzystumetrowego radioteleskopu w Arecibo w Puerto Rico zawałowała się i spadła do wnętrza jego czaszy, mieszczącej się w naturalnym, wulkanicznym kraterze. To ten właśnie radioteleskop był jednym z głównych źródeł danych dla NANOGrav, który musi teraz znaleźć alternatywne możliwości, najprawdopodobniej dzięki rozszerzeniu międzynarodowej współpracy.

Oczywiście odkrycie fal grawitacyjnych nie jest niczym (bardzo) nowym. W 2015 roku LIGO dokonało pierwszej bezpośredniej obserwacji fal grawitacyjnych pochodzących ze zderzających się czarnych dziur. LIGO i jego odpowiedniki: Virgo w Europie i Kagra w Japonii, wykorzystują specjalnie zbudowane interferometry do wykrywania fal grawitacyjnych o wysokiej częstotliwości. Sygnał badany przez NANOGrav jest zupełnie inny: pochodzi od dziesiątek par obiektów znajdujących się „w tle”, a częstotliwość poszukiwanych fal grawitacyjnych jest o wiele rzędów wielkości mniejsza i sięga nanoherców, co odpowiada okresowi oscylacji rzędu kilkudziesięciu lat!

Informacja o możliwym zbliżającym się odkryciu zelektryzowała, oczywiście, fizyków teoretycznych. Jak grzyby po deszczu pojawiły się prace łączące dane NANOGrav ze strunami kosmicznymi, pierwotnymi czarnymi dziurami czy gwałtownymi przejściami fazowymi we wczesnym Wszechświecie. Natychmiast zorganizowano liczne konferencje – w przerwach jednej z nich powstaje ten tekst. Jak na odkrycie, którego – jeszcze! – nie było, znalazło ono bardzo duży oddźwięk w świecie naukowym.

Krzysztof TURZYŃSKI

Z. Arzoumanian *et al.*, *The NANOGrav 12.5-year Data Set: Search For An Isotropic Stochastic Gravitational-Wave Background*, *Astrophysical Journal Letters* **905** (2020)





Jednoznaczność rozkładu w \mathbb{N} – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną oraz niech

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

będzie rozkładem na czynniki pierwsze zgodnie z definicją z poprzedniego kącika. Pokażę tu kilka dalszych wniosków z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu w \mathbb{N} .

Jeśli $n = a^2$ dla pewnej liczby naturalnej a , to wykładniki w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze są podwojonymi wykładnikami z rozkładu liczby a , wszystkie są zatem parzyste. W drugą stronę, jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są parzyste, to $\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1/2} p_2^{\alpha_2/2} \dots p_k^{\alpha_k/2}$ jest liczbą naturalną. Wnioskujemy zatem, że liczba n jest kwadratem liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wykładniki w jej rozkładzie na czynniki pierwsze są parzyste. Ogólniej – liczba n jest t -tą potęgą liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wykładniki w jej rozkładzie na czynniki pierwsze dzielą się przez t ; dowód jest zasadniczo taki sam.

Rozkład na czynniki pierwsze daje też nieco inne (bardziej szkolne niż algorytm Euklidesa) spojrzenie na liczby względnie pierwsze. Jeżeli $\text{NWD}(m, n) > 1$, to liczba $\text{NWD}(m, n)$ ma dzielnik pierwszy, który jest wspólnym dzielnikiem m i n , więc występuje w ich rozkładach na czynniki pierwsze. Implikacja odwrotna zachodzi w oczywisty sposób. Możemy stąd wywnioskować, że $\text{NWD}(m, n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba pierwsza z rozkładu liczby n jest inna niż wszystkie liczby pierwsze z rozkładu m .

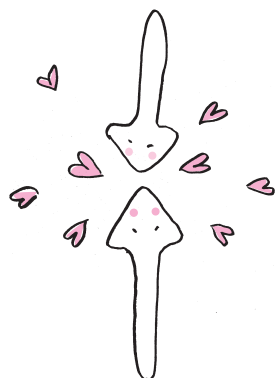
Łącząc powyższe dwie równoważności, możemy na przykład udowodnić, że jeśli iloczyn liczb względnie pierwszych m i n jest kwadratem liczby naturalnej, to obie te liczby również są kwadratami liczb naturalnych – ten fakt przyda się w zadaniach 1 i 2. Zapiszmy $m \cdot n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l} \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ – jest to rozkład na czynniki pierwsze, ponieważ wszystkie p_i i q_j są różne. Liczba mn jest kwadratem, więc wszystkie α_i i β_j są parzyste i w konsekwencji m i n są kwadratami liczb naturalnych. Analogiczne twierdzenia zachodzą oczywiście również dla wyższych wykładników.

Na koniec, rozkład na czynniki pierwsze pozwala na dokonanie pewnych specyficznych podstawień. Opiszę tu jedno. Podstawmy $\alpha_i = 2a_i + w_i$, przy czym a_i jest liczbą całkowitą nieujemną oraz $w_i \in \{0, 1\}$ (jest to po prostu zapis dzielenia przez 2 z resztą). Otrzymamy $n = k^2 b$ dla $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ oraz $b = p_1^{w_1} p_2^{w_2} \dots p_k^{w_k}$. Liczba b jest iloczynem kilku różnych liczb pierwszych. Takie liczby, zwane bezkwadratowymi (bo nie są podzielne przez kwadrat żadnej liczby pierwszej), mają ciekawą własność wzmacniania podzielności, która jest pomocna w zadaniach 3 i 4.

Niech b będzie liczbą bezkwadratową i $b \mid m^t$, dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m i t . Każdy dzielnik pierwszy liczby b jest dzielnikiem m^t , więc występuje w rozkładzie liczby m na czynniki pierwsze. Z tego wynika, że $b \mid m$.

Zadania

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n i liczba pierwsza p , dla których $n^2 + np$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykazać, że n również jest kwadratem liczby naturalnej.
2. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są parami względnie pierwsze i spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, ponadto b jest liczbą parzystą. Udowodnić, że istnieją takie liczby naturalne m i n , że $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ i $c = m^2 + n^2$.
3. Różne liczby całkowite dodatnie m i n spełniają podzielność $m \mid n^2$. Udowodnić, że $|m - n| \geq \sqrt{m}$.
4. Liczby całkowite dodatnie m i n spełniają podzielność $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.
5. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeśli istnieje taka liczba pierwsza p , że $p \mid n$, ale $p^2 \nmid n$. Dowieść, że wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.



Wskazówki do zadań

1. Z algorytmu Euklidesa otrzymamy $\text{NWD}(n, n+p) \in \{1, p\}$. Jeśli $n = kp$ dla pewnego naturalnego k , to $n^2 + np$ jest kwadratem liczby naturalnej (dlaczego?). Stąd $p \nmid n$, więc $\text{NWD}(n, n+p) = 1$.

2. Liczby a i c są nieparzyste. Równość $(a/c)^2 = (b/c)^2 + (n/c)^2$ i wykaż, że $\text{NWD}(a/c, b/c) = 1$.

3. Niech $m = k^2 b$ dla liczby naturalnej k i liczby bezkwadratowej b . Uzasadnić, że $kb \mid n$, i wywnioskować, że $|m - n| \geq kb \geq \sqrt{m}$.

4. Podstawmy $m = k^2 b$ dla liczby naturalnej k i liczby bezkwadratowej b . Wywnioskować, że $kb \mid n$, i podstawić $n = kbl$. Z danej podzielności otrzymać wniosek, że $b \mid l$, czyli $b = l$.

5. Uzasadnić, że każdą liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10^{12}\}$, która nie jest dobrą, można zapisać (niekoniecznie w postaci $a^2 b^3$, dla pewnych liczb całkowitych dodatnich $a \leq 10^6$ i $b \leq 10^4$).

KONKURS LITERACKI

POLSKIEJ FUNDACJI FANTASTYKI NAUKOWEJ

II EDYCJA

POLSKA FUNDACJA FANTASTYKI NAUKOWEJ OGŁASZA NABÓR OPOWIADAŃ DO DRUGIEJ EDYCJI KONKURSU LITERACKIEGO DLA DEBIUTANTÓW. JEGO CELEM JEST WYŁONIENIE NAJLEPSZYCH TEKSTÓW UTRZYMANÝCH W KONWENCJI FANTASTYKI NAUKOWEJ.

Konkurs literacki Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej (PFFN) jest skierowany do osób, które ukończyły 16 lat i dotychczas nie opublikowały żadnej książki lub wydały co najwyżej jedną publikację beletrystyczną drogą self-publishingu. Nadesłane opowiadania muszą mieć charakter oryginalnych i dotąd niepublikowanych prac.

PFFN ma na celu popularyzację fantastyki naukowej, dlatego prace konkursowe muszą być w znaczącym stopniu oparte na fundamencie obowiązujących praw, teorii albo prognoz naukowych bądź na ich logicznym rozwinięciu, zgodnym ze współczesną wiedzą naukową. Teksty liczące od 15 000 do 50 000 znaków (ze spacjami) należy wysłać drogą elektroniczną na adres mailowy: konkurs@pffn.org.pl. Termin nadsyłania: **od 1 czerwca do 31 sierpnia 2021 roku.**

Prace zweryfikowane pod kątem spełnienia wymogów formalnych oraz warsztatu literackiego oceni Jury w składzie:

- dr hab. Leszek Błaszkiwicz (astrofizyk; członek Polskiego Towarzystwa Astronomicznego)
- dr hab. Edyta Rudolf (teoretyczka literatury)
- dr Krzysztof M. Maj (groznawca, teoretyk literatury i narracji; redaktor naczelny czasopisma naukowo-literackiego „Creatio Fantastica”)
- dr Szymon Charzyński (fizyk teoretyk, redaktor naczelny miesięcznika „Delta”)
- Romuald Pawlak (pisarz fantastyki)

Konkurs objęły patronatem medialnym redakcje miesięczników „Delta” oraz „Młody Technik” – czasopism, które od kilkadziesiątu lat popularyzują wiedzę naukowo-techniczną, a to ostatni ma także za sobą długą tradycję wspierania na swoich łamach twórców polskiej science fiction. Patronat honorowy nad konkursem zapewniło Krakowskie Biuro Festiwalowe, operator programu Kraków Miasto Literatury UNESCO.

Ogłoszenie wyników nastąpi w pierwszym kwartale 2022 roku. Pełny regulamin oraz formularz uczestnictwa znaleźć można na stronie <https://pffn.org.pl/konkurs>.

Najlepsze utwory zostaną opublikowane w Antologii Polskiej Fantastyki Naukowej za rok 2022, która ukaże się nakładem Wydawnictwa IX. Zwycięzcy, oprócz egzemplarza wydanego zbioru, otrzymają pamiątkowe dyplomy oraz nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwo IX, Wydawnictwo Powergraph oraz Wydawnictwo Warbook.

Warto przypomnieć, iż zeszłoroczna, pierwsza edycja konkursu literackiego PFFN cieszyła się bardzo dużym zainteresowaniem. Nadesłano bowiem 168 opowiadań, wpisujących się w nurt science fiction, których tematyka poruszała kwestię sztucznej inteligencji i robotyki, rzeczywistości wirtualnej, możliwych scenariuszy zagłady świata czy klasyczną problematykę lotów kosmicznych oraz potencjalnych kontaktów z pozaziemskimi cywilizacjami.

Ilustracja: Vivi Ekhart