Klub 44 M

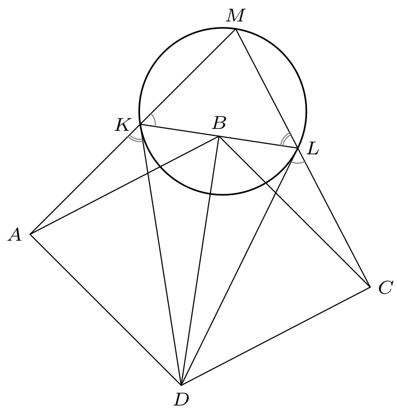
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2021

Przypominamy treść zadań:

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C. Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostopadłości $DA \perp AK$, $DB \perp BK$, $DB \perp BL$, $DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M. Dowieść, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D.

818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leqslant n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n.



817. Należy pokazać, że proste KD, LD są styczne do okręgu (KLM). Zgodnie z twierdzeniem o stycznej i cięciwie, jest to równoważne równości kątów:

(1) $$\sphericalangle MKL = \sphericalangle CLD, \qquad \sphericalangle MLK = \sphericalangle AKD.$$

Czworokąty $ADBK$ oraz $CDBL$ mają kąty proste przy wierzchołkach A, B oraz B, C; każdy z nich ma więc okrąg opisany. Wobec tego

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle ADB, \qquad \sphericalangle ABD = \sphericalangle AKD,$$
$$\sphericalangle MLK = \sphericalangle CDB, \qquad \sphericalangle CBD = \sphericalangle CLD.$$

Do uzyskania związków (1) wystarczy mieć równości

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD, \qquad \sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$$

– a one są oczywiste, bo to pary kątów naprzemianległych w równoległoboku $ABCD$.

818. Wykażemy najpierw tezę zadania dla liczb nieparzystych $n \geqslant 3$ (założenie $n \geqslant 9$ nie będzie chwilowo potrzebne). Wystarczy znaleźć liczbę naturalną ℓ spełniającą warunki

(2) $$2^\ell \equiv 1 \pmod n \quad \text{oraz} \quad \tfrac{2}{3}n \leqslant \ell < n;$$

wówczas bowiem liczba $m = n - \ell$ czyni zadość wymaganiom: $0 < m \leqslant \frac{1}{3}n$; $2^n = 2^m 2^\ell \equiv 2^m \pmod n$.

Użyjemy funkcji Eulera φ, określonej (na przykład) wzorem

(3) $$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}$$

(iloczyn po wszystkich dzielnikach pierwszych p liczby n); widać z tego wzoru, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla $n \geqslant 3$.

Skoro n jest liczbą nieparzystą, podstawowa własność funkcji φ (*twierdzenie Eulera*) zapewnia, że $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$. Jeśli więc $\varphi(n) \geqslant \frac{2}{3}n$, to biorąc we wzorze (2) $\ell = \varphi(n)$, mamy to, o co chodzi. Taka sytuacja zawsze ma miejsce, gdy n jest potęgą liczby pierwszej: $n = q^j$; bo wtedy (wzór (3)): $\varphi(n) = n \cdot \frac{q-1}{q} \geqslant \frac{2}{3}n$.

Zbadania wymaga sytuacja, gdy $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$; zatem liczba n nie jest potęgą liczby pierwszej i daje się przedstawić jako iloczyn czynników (nieparzystych) $a, b \geqslant 3$, względnie pierwszych. Wówczas $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)$ (znana własność funkcji Eulera). W myśl wcześniejszej uwagi, wartości φ dla argumentów a, b są parzyste: $\varphi(a) = 2\alpha$, $\varphi(b) = 2\beta$; tak więc $\varphi(n) = 4\alpha\beta$. Przy tym (znów na mocy twierdzenia Eulera):

$$2^{2\alpha} \equiv 1 \pmod a, \qquad 2^{2\beta} \equiv 1 \pmod b,$$

skąd (przez podniesienie do potęg β, α): $2^{2\alpha\beta} \equiv 1$ zarówno $(\bmod\ a)$, jak i $(\bmod\ b)$. A ponieważ $n = ab$ (a, b względnie pierwsze), wynika stąd, że

$$2^{2\alpha\beta} \equiv 1 \pmod n.$$

Skoro $\varphi(n) < \frac{2}{3}n$, liczba $2\alpha\beta = \frac{1}{2}\varphi(n)$ jest mniejsza niż $\frac{1}{3}n$, więc pewna jej wielokrotność (oznaczmy ją ℓ) wpada do przedziału $[\frac{2}{3}n, n)$; zatem spełnia wymagany warunek (2). Mamy tezę dla n nieparzystych, $n \geqslant 3$.

Niech teraz $n > 8$ będzie liczbą parzystą – ale nie potęgą dwójki: $n = 2^j c$; $c \geqslant 3$ nieparzyste; $j \geqslant 1$. Na mocy wykazanej części zadania istnieje liczba naturalna $b \leqslant \frac{1}{3}c$, dla której $2^b \equiv 2^c \pmod c$. Niech $m = 2^j b$; zatem $2^m \equiv 2^n \pmod c$. Ponadto $m \geqslant 2^j > j$, skąd $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j}$. W konsekwencji $2^m \equiv 2^n \pmod{2^j c}$, czyli $(\bmod\ n)$ – jak wymaga teza zadania.

Pozostaje przypadek, gdy $n > 8$ jest potęgą dwójki: $n = 2^j$; $j \geqslant 4$. Teraz wystarczy wziąć $m = \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$. Dla $j \geqslant 4$ mamy $\frac{1}{3}n = \frac{1}{3}2^j \geqslant j$, więc $m \geqslant j$; każda z liczb 2^m, 2^n dzieli się przez 2^j, czyli przez n. Wszystkie przypadki zostały rozpatrzone, dowód jest zakończony.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 811 ($WT = 2{,}44$) i 812 ($WT = 1{,}60$) z numeru 12/2020

Marcin Małogrosz	Warszawa	45,69
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Jerzy Cisło	Wrocław	42,38
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Mikołaj Pater	Opole	36,14
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	32,13

Pan Marcin Małogrosz przekracza próg 44p. już po raz czwarty.