Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 809 ($WT = 1{,}83$) i 810 ($WT = 2{,}03$) z numeru 11/2020

Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Jerzy Cisło	Wrocław	39,07
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Mikołaj Pater	Opole	32,35
Kacper Morawski	Warszawa	30,53

Zadania z matematyki nr 823, 824

Redaguje Marcin E. KUCZMA

823. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań
$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = -\sin(x+y+z).$$

824. Niech $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych ($p_1 = 2$). Dla $n \geqslant 1$ niech q_n oznacza liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od n (w zwykle używanej notacji: $q_n = \pi(n-1)$) i niech $a_n = n + p_n$, $b_n = n + q_n$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem dokładnie jednego z ciągów (a_n), (b_n).

Zadanie 824 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2021

Przypominamy treść zadań:

815. Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji $f, g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, spełniające równanie
$$f(x+y^3) + g(x^3+y) = h(xy) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

816. Liczba naturalna n ma taki dzielnik dodatni d, że $d^2 - 2$ dzieli się przez $n - 1$. Wykazać, że n jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

815. Niech f, g, h będzie trójką funkcji spełniających podane równanie. Biorąc $x = 0$, dostajemy $g(y) = h(0) - f(y^3)$; a po wstawieniu do wyjściowego równania:

(1) $$f(x+y^3) + h(0) - f\big((x^3+y)^3\big) = h(xy).$$

Podstawienie $y = -x^3$ daje zależność

(2) $$f(x - x^9) = h(-x^4) - h(0) + f(0).$$

Różnica $x - x^9$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste oraz zmienia znak przy zamianie x na $-x$. Stąd wniosek, że f jest funkcją parzystą.

Ustalmy liczbę $w < 0$. Wykażemy, że $h(w) = h(0)$. Wystarczy w tym celu znaleźć liczby x, y takie, że

(3) $$(x^3+y)^3 = -(x+y^3) \quad \text{oraz} \quad xy = w,$$

bowiem wówczas (wobec parzystości f) lewa strona (1) przyjmuje wartość $h(0)$. Dla $xy = w$ pierwsze równanie (3) pomnożone stronami przez x^3 ($\neq 0$) przybiera postać

(4) $$(x^4+w)^3 + x^4 + w^3 = 0.$$

Wielomian (zmiennej x) po lewej stronie (4) ma dla $x = 0$ wartość ujemną, a dla dużych $|x|$ wartość dodatnią, więc dla pewnego x_0 ma wartość 0. Biorąc $y_0 = w/x_0$, uzyskujemy spełnienie obu związków (3), wystarczających do uzasadnienia równości $h(w) = h(0)$.

Wobec dowolności wyboru liczby $w < 0$ znaczy to, że funkcja h jest stała na przedziale $(-\infty, 0]$. Teraz równanie (2) pokazuje, że $f(x - x^9) = f(0)$ dla wszystkich x; czyli f jest funkcją stałą na zbiorze liczb rzeczywistych. Zatem także funkcja $g(y) = h(0) - f(y^3)$ jest stała oraz (dzięki równaniu wyjściowemu) funkcja h jest stała. Jasne, że każda trójka funkcji stałych $f \equiv A$, $g \equiv B$, $h \equiv A + B$ spełnia zadane równanie.

816. Gdy $d = 1$, więc $d^2 - 2 = -1$, wówczas $n = 2$, co spełnia warunek tezy zadania. Dalej przyjmujemy $d \geqslant 2$. W myśl założenia, istnieją liczby całkowite k, m takie, że

(5) $$n = kd, \qquad d^2 - 2 = m(n-1) = m(kd-1).$$

Oczywiście $k \geqslant 1$; a skoro $d \geqslant 2$, widać, że także $m \geqslant 1$. Drugi warunek w wierszu (5) mówi, że d jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 - mkx + (m-2)$. Niech c będzie drugim pierwiastkiem tego trójmianu. Tak więc
$$c + d = mk, \qquad cd = m - 2.$$
Liczba $c = mk - d$ też jest całkowita.

Jeśli $m > 2$, to $c = (m-2)/d > 0$, czyli $c \geqslant 1$, i mamy ciąg zależności
$$0 \leqslant (c-1)(d-1) = cd - (c+d) + 1 =$$
$$= (m-2) - (mk) + 1 = m(1-k) - 1 \leqslant -1,$$
sprzeczność. Jeśli $m = 1$, wychodzi $cd = -1$, znów sprzeczność (bo $d \geqslant 2$).

Pozostaje przypadek, gdy $m = 2$. Wtedy (wobec (5)) $d^2 - 2kd = 0$, skąd $d = 2k$; zatem liczba $n = kd = 2k^2$ jest podwojonym kwadratem – a o to chodziło.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.