Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2021

Zadania z matematyki nr 821, 822

Redaguje Marcin E. KUCZMA

821. Niech B będzie ustaloną liczbą naturalną; $B \geqslant 3$. Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie pozycyjnym przy podstawie B (cyframi zapisu są elementy zbioru $\{0,\ldots,B-1\}$; cyfra wiodąca różna od zera). Rozważamy liczby naturalne N, których cyfry zapisu tworzą ciąg ściśle rosnący (największa cyfra w rzędzie jedności). Obliczyć maksymalną wartość sumy cyfr iloczynu $(B-1)N$, gdy N przebiega zbiór wszystkich liczb rozważanej postaci.

822. Dany jest trójkąt ABC. Dla dowolnego punktu D na boku BC (różnego od wierzchołków) zakreślamy okrąg ω_D, przechodzący przez D oraz środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Udowodnić, że istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D.

Zadanie 822 zaproponował pan Mikołaj Pater.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 807 ($WT = 1{,}85$) i 808 ($WT = 1{,}74$) z numeru 10/2020

Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Jerzy Cisło	Wrocław	37,04
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	30,53
Tomasz Czajka	Santa Clara	29,88

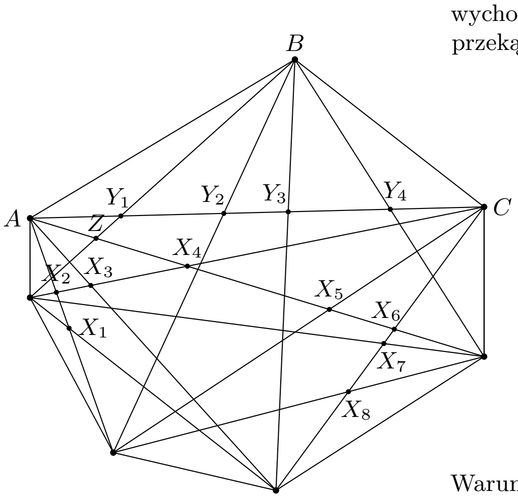
Rozwiązania zadań z numeru 1/2021

Przypominamy treść zadań:

813. Dany jest wielokąt wypukły W (kąty $< 180^\circ$) oraz liczba naturalna m, mniejsza od liczby jego przekątnych. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów przecięć przekątnych (leżących wewnątrz W); zakładamy, że żaden z tych punktów nie należy do trzech przekątnych. Udowodnić, że w zbiorze S można wyróżnić m-elementowy podzbiór M, nie zawierający żadnego cyklu. Przez *cykl* rozumiemy dowolny cykliczny układ punktów (dowolnej długości $\geqslant 3$), w którym każde sąsiednie dwa punkty leżą na jednej przekątnej, ale żadne kolejne trzy nie leżą na jednej przekątnej.

814. W pewnym trójkącie jeden z kątów ma miarę α. Dowieść, że
$$2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant \frac{r}{R}\,,$$
gdzie, jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego.

813. Dowód przez indukcję względem n, liczby wierzchołków wielokąta. Dla $n \leqslant 5$ twierdzenie jest oczywiste. Ustalmy $n > 5$ i przyjmijmy słuszność twierdzenia dla wielokątów o $n-1$ wierzchołkach. Weźmy dowolny n-kąt wypukły W_n, w którym żadne trzy przekątne nie mają punktu wspólnego. Wybierzmy dowolne trzy kolejne wierzchołki A, B, C i odetnijmy trójkąt ABC; zostanie wielokąt wypukły W_{n-1}. Jego przekątne – to uprzednie przekątne wielokąta W_n, z wyjątkiem AC oraz tych wychodzących z punktu B; liczba przekątnych spadła o $n-2$. Zbiory punktów przecięć przekątnych (w tych dwóch wielokątach) oznaczmy odpowiednio S_n i S_{n-1}.



Niech m będzie liczbą mniejszą od liczby przekątnych wielokąta W_n; liczba $m-n+2$ jest mniejsza od liczby przekątnych wielokąta W_{n-1}. W myśl założenia indukcyjnego, w zbiorze S_{n-1} istnieje $(m-n+2)$-elementowy podzbiór $\{X_1,\ldots,X_{m-n+2}\}$, nie zawierający cyklu. Chcemy znaleźć w zbiorze S_n podzbiór m-elementowy M o analogicznej własności. Uzyskamy go, dołączając do punktów X_i punkty $Y_1,\ldots,Y_{n-3}$, w których przekątne wielokąta W_n, wychodzące z B, przecinają odcinek AC, oraz jeszcze jeden punkt Z zbioru S_n, wybrany dowolnie na jednej z tych przekątnych; np. na BY_1 (rysunek ilustruje konfigurację dla $n = 7$, $m = 13$).

Wśród punktów X_i nie było cyklu. Aby cykl się pojawił w zbiorze M, musiałby zawierać co najmniej jeden z punktów Y_j. Na prostych BY_j nie leży żaden punkt X_i (nigdzie nie spotykają się trzy przekątne). Warunek definiujący *cykl* wymaga, by tworząca go łamana stale zakręcała. Jeśli jednym z jej punktów jest któryś Y_j, to inny Y_k musi być innym jej punktem; ale z punktów $Y_2,\ldots,Y_{n-3}$ nie ma już odejścia ani do Z, ani do punktów X_i. Nie istnieje więc cykl w zbiorze M. To kończy krok indukcyjny i dowodzi twierdzenia.

814. Niech A będzie wierzchołkiem kąta o mierze α (w rozważanym trójkącie), zaś O oraz I – środkami okręgów opisanego i wpisanego. Jeśli $AI = l$, to $\sin(\alpha/2) = r/l$. Należy zatem udowodnić nierówność
$$\frac{r}{l}\left(1-\frac{r}{l}\right) \geqslant \frac{r}{2R}\,,$$
równoważną (przez proste przekształcenie) następującej:
$$(l-R)^2 \leqslant R^2 - 2Rr.$$
Wzór Eulera $R^2 - 2Rr = OI^2$ sprowadza więc zadanie po prostu do nierówności trójkąta $|l-R| \leqslant OI$ dla punktów A, O, I.

W numerze 3/2021 rysunek ilustrujący rozwiązanie zadania 809 nie był dobry; w wydaniu elektronicznym tego numeru został już poprawiony. Przepraszamy Czytelników za niedopatrzenie.