Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2021

Zadania z matematyki nr 819, 820

Redaguje Marcin E. KUCZMA

819. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Rozważamy ciągi kolejno przyległych trójkącików, z których żaden nie powtarza się (trójkąciki przyległe mają wspólny bok).
(**a**) Wyznaczyć największą możliwą liczbę trójkącików w takim ciągu.
(**b**) Czy i jak zmieni się wynik, jeśli dodatkowo zażądamy, by ostatni trójkącik przylegał do pierwszego?

820. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c:

$$\frac{a^2}{b^2+bc}+\frac{b^2}{c^2+ca}+\frac{c^2}{a^2+ab}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

Zadanie 820 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2020

Przypominamy treść zadań:

811. Funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma tę własność, że każda z funkcji $g(x) = xf(x)$ oraz $h(x) = 2f(2x) - f(x)$ ma granicę 0 przy $x \to 0$. Czy stąd wynika, że także funkcja f ma granicę 0 przy $x \to 0$?

812. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ iloczyn $\prod_{k=2}^{n}(2^k-2)$ dzieli się przez $n!$.

811. Odpowiedź: tak. *Dowód:* dla $x \neq 0$ niech $H(x)$ oznacza kres górny wartości $|h(t)|$, gdy $0 < |t| \leqslant |x|$. Skoro $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, zatem także $\lim_{x\to 0} H(x) = 0$. Z określenia funkcji g i h wynika związek $g(2t) - g(t) = th(t)$. Dlatego

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)+g\left(\frac{x}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right)+g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

dla każdej liczby naturalnej n. Jasne, że $|h(x/2^k)| \leqslant H(x)$ dla $k \geqslant 1$. Tak więc

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}|x|\cdot H(x)+\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\leqslant|x|\cdot H(x)+\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$$

dla $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Przy ustalonym $x \neq 0$ przechodzimy z n do nieskończoności i otrzymujemy oszacowanie $|g(x)| \leqslant |x| \cdot H(x)$, słuszne dla wszystkich $x \neq 0$. Podzielenie przez $|x|$ daje nierówność $|f(x)| \leqslant |H(x)|$. Stąd teza.

812. Niech $v_p(N)$ oznacza wykładnik potęgi, w jakiej liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby naturalnej N. Dany w treści zadania iloczyn oznaczmy W_n. Do uzyskania tezy zadania wystarczy pokazać, że $v_p(W_n) \geqslant v_p(n!)$ dla każdej liczby pierwszej p.

Ustalmy liczbę pierwszą p. Jeżeli $p \geqslant 3$, to na mocy małego twierdzenia Fermata dzieli ona różnicę $2^{p-1} - 1$. Jest zatem (dla $j = 1, 2, 3, \ldots$) dzielnikiem liczby $\left(2^{p-1}\right)^j - 1$, więc także i jej dwukrotności, czyli liczby $2^{pj-j+1} - 2$. Liczby tej ostatniej postaci są czynnikami iloczynu definiującego W_n, gdy $pj - j + 1 \leqslant n$, czyli dla $j = 1, 2, \ldots, \lfloor\frac{n-1}{p-1}\rfloor$. Wobec tego

$$v_p(W_n)\geqslant\left\lfloor\frac{n-1}{p-1}\right\rfloor \tag{1}$$

dla każdej liczby pierwszej $p \geqslant 3$. Jest to również prawda dla $p = 2$, bowiem wówczas prawa strona (1) to $n - 1$, zaś W_n jest iloczynem $n - 1$ liczb parzystych.

Niech m będzie największym wykładnikiem, dla którego $p^m \leqslant n$. Oszacowanie wartości $v_p(n!)$ uzyskamy przez sekwencję zależności (w której początkowa równość to *wzór Legendre'a* – dobrze znany, a przy tym nietrudny do wykazania):

$$v_p(n!)=\sum_{i=1}^{m}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p^i}=\frac{n}{p}\cdot\frac{1-p^{-m}}{1-p^{-1}}=\frac{n-np^{-m}}{p-1}\leqslant\frac{n-1}{p-1}\,.$$

Stąd wniosek, że

$$v_p(n!)\leqslant\left\lfloor\frac{n-1}{p-1}\right\rfloor. \tag{2}$$

Nierówności (1) i (2) składają się na dowodzoną tezę $v_p(W_n) \geqslant v_p(n!)$. To kończy rozwiązanie zadania.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 805 ($WT = 1{,}61$) i 806 ($WT = 1{,}80$) z numeru 9/2020

Janusz Olszewski	Warszawa	46,84
Marek Spychała	Warszawa	46,39
Tomasz Wietecha	Tarnów	45,86
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Jerzy Cisło	Wrocław	33,45

Nowicjuszem nie jest (!) żaden z trzech Panów: Janusz Olszewski (po raz 21), Marek Spychała (po raz 3), Tomasz Wietecha (po raz 13). Pięknie! Tak dalej! Serdecznie gratulujemy!