



się twierdzeniami o *pełności* i *niezupełności*. Sytuacja ma się inaczej w języku angielskim, gdzie twierdzenia te nazywają się *Gödel's completeness theorem* oraz *Gödel's incompleteness theorem*, sugerując, że Gödel zwiariował i raz udowodnił *completeness*, a kolejnym razem *incompleteness*.

Podsumowując, o ile w konkretnym modelu zachodzi albo $\mathcal{M} \models \varphi$, albo $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, to w przypadku teorii może się zdarzyć, że $\Gamma \not\models \varphi$ oraz $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Co gorsze, wszystkie dostatecznie silne teorie mają takie zdania niezależne – pochodzą one od pomysłowego kodowania w danej teorii paradoksu kłamcy i wykorzystania narzędzi z teorii obliczeń. Oznacza to, że zawsze musimy się liczyć z tym, iż rozważana formuła może leżeć na tej „ziemi niczyjej”: nie da się jej ani udowodnić, ani obalić. Z drugiej strony, nasza sytuacja jest tak dobra, jak tylko w tych warunkach może być: jeśli tylko dana formuła φ jest konsekwencją Γ we wszystkich modelach, to prędzej czy później znajdziemy na to dowód.

Przez firankę, czyli jak odkryto pulsary

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika w Warszawie

Być może to właśnie z powodu braku jasnych światła Izaak Newton pisząc swe dzieło o optyce, opisał światło jako strumień cząsteczek. Interferencję można bowiem wytłumaczyć tylko opierając się na falowej naturze światła.

Gdy zapada zmrok i za oknem zapalają się światła, warto spojrzeć na odległą latarnię przez gęstą firankę lub półprzezroczystą zasłonę, rozpostartą oburącz prostopadle do kierunku widzenia. Obraz latarni rozpadnie się na konstelację światełek rozłożonych w kratkę, zorientowaną równoległe do nitki materiału. A teraz przysuwając jedną z rąk nieco bliżej twarzy ustawmy materiał skosem do kierunku patrzenia: światełka zaczynają się rozsuwać. Zaraz, zaraz, przecież (pionowe) nitki widziane pod kątem są ułożone bliżej, więc skąd rozsunięcie?

Dyfrakcja światła ze źródeł punktowych. Sinusoidalną falę światła, a dokładniej wektor pola elektrycznego E o amplitudzie E_0 , wygodnie jest przedstawić za de Moivre'em jako $E = E_0 e^{i\Phi} \equiv E_0 (\cos \Phi + i \sin \Phi)$, gdzie faza fali Φ zależna od czasu t i położenia l w kierunku rozchodzenia się fali to $\Phi(t, l) = 2\pi(t/T - l/\lambda) \equiv \omega t - kl$. Stałe T i λ to okres i długość fali, $\omega = 2\pi/T$ i $k = 2\pi/\lambda$ to częstość kołowa i liczba falowa, a prędkość fali $c = \lambda/T = \omega/k$. Przez i oznaczamy urojoną jedność $i^2 = -1$ i tylko część rzeczywistą rozwiązania (niezawierającą i) traktujemy jako prawdziwą falę. Rozpatrzmy teraz N identycznych źródeł fali rozłożonych wzdłuż linii prostej w odstępach a . Jeśli oscylują one w fazie, ale patrzymy na nie z oddali pod kątem θ względem prostopadłej, to różnica drogi do obserwatora pomiędzy sąsiednimi źródłami będzie $l = a \sin \theta$, a odpowiednia różnica fazy to

$$(1) \quad \Phi_{n+1} - \Phi_n \equiv \phi = ka \sin \theta.$$

Zatem obserwowana suma pól elektrycznych to

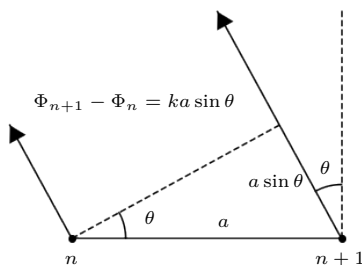
$$(2) \quad E = E_0 e^{i\Phi_1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi} = E_0 e^{i\Phi_1} \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} = E_0 e^{i(\Phi_1 + N\phi/2 - \phi/2)} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)},$$

gdzie Φ_1 to obserwowana faza pierwszego źródła. Obliczając sumę, skorzystaliśmy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego. Łatwo go również wykazać indukcyjnie, bowiem po dodaniu kolejnego wyrazu i sprowadzeniu do wspólnego mianownika dostaniemy wyrażenie dla $N + 1$ źródeł. Przyjmując za jednostkę natężenie pola dla $\theta = \phi = 0$, otrzymujemy

$$(3) \quad I_1(\theta) = \frac{\sin^2(N\phi/2)}{N^2 \sin^2(\phi/2)} \xrightarrow[N a \equiv D = \text{const}]{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)^2} \equiv I_2(\theta).$$

Funkcja I_1 opisuje natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym od N spójnych (zgodnych w fazie) źródeł, na przykład za układem wąskich szczelin oświetlonych światłem lasera lub odległej lampy. Dla $\phi \approx 0$ sinusy można zastąpić ich argumentami i widać, że natężenie osiąga maksimum główne $I_1(0) = 1$. Graniczny rozkład I_2 po prawej stronie odpowiada dążącej do nieskończoności liczby źródeł $N \rightarrow \infty$ umieszczonych w przedziale o ustalonej szerokości $\text{const} = D \equiv Na$, czyli przy a i θ dążących do 0. Sinus w mianowniku można wtedy zastąpić jego argumentem: oznaczając różnicę skrajnych faz $\Delta\Phi \equiv N\phi = Nka \sin \theta = kD \sin \theta$,

O użyteczności wzoru de Moivre'a świadczy m.in. poniższa regułka, pozwalająca zapamiętać wzory trygonometryczne dla sumy kątów: $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = e^{i\alpha + i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)$. Porównanie osobno części rzeczywistej i urojonej daje wspomniane wzory.



Z wzoru de Moivre'a wynika też $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$. Obserwator nie rejestruje jednak pola elektrycznego E , a natężenie promieniowania proporcjonalne do uśrednionego po czasie kwadratu rzeczywistej części pola $I \sim \langle (\text{Re } E)^2 \rangle$. Skoro po czasie $T/4$ rzeczywista i urojona część Φ zamieniają się rolami, to $\langle (\text{Re } E)^2 \rangle = \langle (\text{Im } E)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E|^2 \rangle = \text{const}$, gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że moduł jedynego czynnika zmiennego w czasie to $|e^{i\omega t}|^2 = 1 = \text{const}$ z jedynki trygonometrycznej.

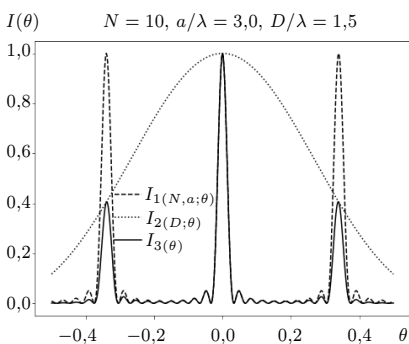
otrzymujemy wynik dla I_2 . Przykładem może być granica dla N stykających się szczelin, czyli otwór o szerokości D . Z I_2 i $\Delta\Phi = 0$ wynika maksimum główne o wysokości 1 i szereg *maksimów pobocznych* o szybko malejącej wysokości.

Wzór (3) dla skończonego N pokazuje też, że wartości I_1 powtarzają się z okresem 2π , zatem kolejne maksima główne, odpowiadające na ekranie jasnym prążkom dyfrakcyjnym, pojawiają się dla faz $\phi_m \equiv ka \sin \theta = m2\pi$, $|m| = 0, 1, 2, \dots$, gdzie m jest nazywane *rzędem maksimum*. Jeśli $ka/(2\pi) = a/\lambda \gg 1$, to dla $|m| \ll a/\lambda$ prążki dyfrakcyjne pojawiają się dla tak małych θ , że $\sin \theta \approx \theta$, a ich położenia odpowiadające kątom $\theta_m \approx \phi_m/(ka) = 2\pi m/(ka) = m\lambda/a$ są rozmieszczone prawie w równych odstępach $\Sigma = \lambda/a$. Pomiędzy nimi jest $N - 1$ małych *maksimów pobocznych (wtórnych)* rozdzielonych kolejnymi zerami licznika, o natężeniu szybko malejącym w miarę oddalania się od maksimum głównego. Szerokość maksimów głównych określona odległością sąsiednich zer licznika wynosi $\sigma = 2\lambda/(Na) = 2\lambda/D$. Dla $m \gtrsim a/(3\lambda)$ zmiany $\sin \theta$ są mniejsze od zmiany kąta, i układ prążków zaczyna się wyraźnie rozciągać. Analogiczne rozważania stosują się do pojedynczego otworu o szerokości D , w szczególności szerokość maksimum głównego jest też $\sigma = 2\lambda/D$.

W praktyce nie ma idealnych źródeł punktowych, jeśli jednak rozmiar d źródła jest dość mały, $d \ll a/m$, to różnica faz promieniowania z jego różnych punktów jest znacznie mniejsza niż 2π , a ich wkłady dodają się prawie w tej samej fazie. Ponadto, o ile takimi źródłami mogą być dosyć wąskie szczeliny, to by zapewnić zgodność fazy, trzeba je oświetlić prawie płaską falą padającą z dokładnie prostopadłego kierunku, np. spójnym światłem lasera. Jeśli jednak układ szczelin o szerokości $D = Na$ oświetla lampa o rozmiarze L umieszczona w odległości R , to różnica skrajnych kątów padania jest około $\alpha \approx (L + D)/R$. Światło lampy jest praktycznie spójne, o ile w stożku o kącie rozwarcia α fala kulista różni się od płaskiej o mniej niż $\lambda/2$, czyli

$$\lambda/2 > R - R \cos(\alpha/2) = R(1 - (1 - \alpha^2/8 + \dots)),$$

korzystając z rozwinięcia cosinusa dla małych kątów, skąd dalej $R > (L + D)^2/(4\lambda)$. Jeśli lampa jest większa lub znajduje się bliżej, czyli ostatnia nierówność nie jest spełniona, to światło pochodzące od różnych szczelin nie będzie w fazie, co spowoduje dodatkowe równomierne oświetlenie ekranu, a w skrajnym wypadku całkowicie zakłóci prążki interferencyjne.



Przykład rozkładu prążków na ekranie

Zgubiony czynnik 2π w nieoznaczoności $\Delta x \Delta p_x = h/2$ u nas wynika z innej niż u Heisenberga definicji niepewności: tu jej miarą jest łatwiejsza do wyznaczenia maksymalna szerokość prążka (100% natężenia w nim), a u Heisenberga rozrzut 1σ jest mniejszy, bo obejmuje tylko 68% natężenia wokół centrum prążka.

A co się stanie, jeśli prawie płaska fala od lampy pada pod kątem β na płaszczyznę szczelin? Wtedy wystarczy we wzorze (1) zastąpić $\sin \theta$ przez $\sin \theta - \sin \beta$, wskutek czego obraz prążków na ekranie przesunie się tak, by zerowej różnicy faz odpowiadał kąt $\theta = \beta$. Natomiast zmieni się odstęp między prążkami, bowiem teraz ze zmianą $\delta\theta$ sinus zmienia się wolniej z kątem, co formalnie można zapisać, różniczkując $|\sin' \beta \delta\theta| = \cos \beta |\delta\theta| < |\delta\theta|$. Prościej jednak zauważyć, że identyczne przesunięcie faz uzyskamy, ustawiając szczeliny w płaszczyźnie prostopadłej do oświetlenia przez lampę i gęściej, w odległości $a \cos \beta$, tj. takiej jak ich pozycje rzutowane na płaszczyznę prostopadłą do wiązki światła lampy. Odpowiada to powiększonej separacji obrazów interferencyjnych $\Sigma(\beta) = \lambda/(a \cos \beta) > \Sigma(0)$, co wyjaśnia obserwacje zza ustawionej skośnie firanki. Trzeba tylko zauważyć, że zamiast śledzenia prążków wzdłuż ekranu nieruchome oko obserwatora widzi prążki od kolejnych układów nitek widzianych pod rosnącym kątem θ . Takie ewolucje prążków można objaśnić, jedynie odwołując się do dyfrakcji i interferencji fal.

Dyfrakcja na otworach i zasada nieoznaczoności. Jak wiadomo, światło wykazuje naturę zarówno falową, jak i cząsteczkową. Planck zauważył, że widmo promieniowania w równowadze termicznej da się wyjaśnić, przyjmując, że światło transportuje energię w porcjach $E = h\nu = hc/\lambda$, gdzie h to stała Plancka. Potwierdził to Einstein, wskazując, że w zjawisku fotoelektrycznym pojedyncze elektrony są wybijane z oświetlonej fotokatody, ale tylko gdy energia porcji światła (zwana fotonem lub kwantem) przekracza energię wiązania elektronu W w materiale, czyli dla $h\nu > W$. Jak jednak fala może być cząstką? Nieporozumienie bierze się z wyobrażenia światła jako fali płaskiej $E_0 e^{i\Phi}$. Taka fala jest nieskończona, a zatem nierealistyczna: przy stałym natężeniu niesłaby nieskończoną ilość energii. Rzeczywiste źródła światła mają skończoną energię – w przypadku światła to mogą być pojedyncze atomy. Wysyłają one zatem porcję światła w skończonym czasie, $\tau \sim 10^{-8}$ s, i o skończonej energii. Analogicznie po wrzuceniu do stawu kamienia do odległej trzcinki dociera paczka kilku/kilkudziesięciu grzbietów i potem fala zanika. Podobnie proszę sobie wyobrazić kwant światła. Jaki jest zatem związek z cząstkami? Mechanika kwantowa poucza, że nie można *równocześnie* wyznaczyć z dowolną dokładnością położenia x i odpowiedniej składowej pędu cząstki p_x , bowiem ich niepewności spełniają warunek $\Delta x \Delta p_x \geq h/(4\pi)$. Położenie fali/fotonu przechodzącego przez układ szczelin jest określone z dokładnością $\Delta x = \pm D/2$. A co wiadomo o jego pędzie? Energia cząstki to w ogólnym przypadku $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Foton jest cząstką bezmasową (masa spoczynkowa $m = 0$), zatem $E = pc$, czyli $p = E/c = h/\lambda$. Jednocześnie kierunek fali za szczelinami ma rozrzut kątowy $\sigma/2 = \pm \lambda/D$. Odpowiada to niepewności kierunku wektora p wynikającego z rozrzutu jego poprzecznej składowej $\Delta p_x = p\sigma/2 = (h/\lambda)(\lambda/D) = h/D$. Mamy zatem $\Delta x \Delta p_x = (D/2)(h/D) = h/2$.

A co się stanie, jeśli w przypadku (3) szczeliny są szerokie? Wtedy natężenie prążków I_1 będzie dodatkowo modulowane natężeniem każdej ze szczelin w tym

kierunku:

$$(4) \quad I_3(\theta) = I_2(\theta)I_1(\theta) = \frac{\sin^2(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)^2} \frac{\sin^2(N\phi/2)}{N^2 \sin^2(\phi/2)}.$$

Kontrolą poprawności może być rozpatrzenie pustego otworu: układu szerokich szczelin o odstępach równym ich szerokości, czyli dla $\Delta\Phi = \phi$. Wzór (4) przekształca się na wzór (3) dla I_2 , ale – jak należało oczekiwać – dla różnicy faz $\Delta\Phi = N\phi$ odpowiadającej szerokości D całego otworu. W przypadku układu prostopadłych szczelin, takiego jaki tworzą nitki, musimy wprowadzić dwa kąty w prostopadłych kierunkach, θ i η , i uwzględnić modulację w obu kierunkach: $I_4(\theta, \eta) = I_3(\theta)I_3(\eta)$.

W szczególnym wypadku dużego kwadratowego otworu o boku d równoległa wiązka znacznie się rozbiega pod kątem $\sigma = 4\pi/(kd) = 2\lambda/d$, co determinuje rozdzielczość kątową obrazu tworzonego przez optykę za taką przesłoną. Jeśli, jak w teleskopach i kamerach, otwór jest okrągły, o średnicy d , kąt rozbieżności będzie większy, bo nie cała szerokość daje pełny wkład do obrazu interferencyjnego. Obraz interferencyjny to centralne koło i otaczające je pierścienie, opisywane odpowiednią funkcją Bessela, a rozdzielczość obrazu to $\sigma \approx 2,44\lambda/d$ rad.

Wzór (2) można też zapisać jako

$$(5) \quad E(\mathbf{k}) = E_0 e^{i\Phi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\Phi_n - \Phi_0)} = E_0 \sum_{\mathbf{r}} \Theta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

gdzie $\Phi_n = \mathbf{k}\mathbf{r}_n - \omega t$, \mathbf{r}_n to wektor położenia n -tego źródła, a \mathbf{k} jest wektorem falowym o długości $k = 2\pi/\lambda$ i kierunku ku obserwatorowi pod kątem θ do prostopadłej do płaszczyzny źródeł. Korzystając z takiej definicji, można za pomocą komputera obliczyć wartość sumy dla dużej liczby źródeł rozmieszczonych w jednym lub dwóch wymiarach. Jeśli są one rozmieszczone gęściej niż w odległości λ , to w przybliżeniu pokażą obraz interferencji światła równomiernie oświetlającego jeden lub kilka otworów skończonej wielkości. W drugiej równości (5) funkcja Θ przyjmuje wartości 0 lub 1, gdy wektor \mathbf{r} wskazuje, odpowiednio, przesłonę lub otwór/źródło. W tym drugim przypadku sumując, zakładamy, że \mathbf{r} przebiega gęsto rozłożone wartości w całej płaszczyźnie szczelin czy otworów, przybliżając całkę po tej płaszczyźnie.

Sposoby wykorzystania dyfrakcji i interferencji światła. Przy stałym kierunku oświetlenia zmiana długości fali λ również spowoduje przesunięcie kierunku maksimum interferencyjnego. Właśnie tak działają siatki dyfrakcyjne rozszczepiające światło na barwy, podobnie jak pryzmaty. Zaletą siatek jest bardziej równomierne rozszczepienie (rozdzielczość) w różnych barwach. By uzyskać wysoką rozdzielczość (małą szerokość maksimów), astronomowie używają siatek o rozmiarach sięgających 30 cm × 80 cm, pracując w wysokich rzędach m dochodzących do kilkudziesięciu (gdzie m jest rzędem maksimum). Wtedy jednak widma sąsiednich m o podobnych długościach fal nakładają się na siebie. By tego uniknąć, stosuje się drugi element nieco rozszczepiający wiązkę światła poprzecznie do siatki, co powoduje ułożenie widm dla kolejnych m jak wiersze w książce. Taki kształt widma odpowiada współczesnym detektorom elektronicznym i np. w części optycznej umożliwia pokrycie dużego zakresu, od 0,4 nm (kolor niebieski) do 0,8 nm (bliska podczerwień) przez widmo obejmujące około 40 rzędów, przy detektorze o boku 4000 pikseli, rozciągające się na 160 000 pikseli.

Typowa kamera telefonu ma otwór o średnicy rzędu 1 mm. W świetle widzialnym o $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-6}$ m jej rozdzielczość dyfrakcyjna to $\sigma \approx 0,0013$ rad ≈ 4 minuty kątowe. W przypadku typowego telefonu matryca o boku 4000 pikseli i polu widzenia kamery rzędu 30 stopni daje rozmiar kątowny piksela 0,45', zatem dyfrakcja istotnie ogranicza jakość obrazu. W przypadku teleskopu Hubble'a o średnicy 2,5 m, obserwującego w analogicznej długości fal, odpowiada to 0,1'', podczas gdy atmosfera zwykle ogranicza rozdzielczość nawet największych teleskopów ziemskich do 1'', co odpowiada rozszczepieniu wiązki światła wskutek obecności konwekcyjnych wirów na niespójne wiązki światła o średnicy rzędu 25 cm. Astronomowie (oraz wojskowi podglądający satelity z Ziemi) poprawiają więc obrazy za pomocą aktywnej optyki. Analogiczne wzory stosują się dla fal biegnących w odwrotnym kierunku, wystarczy tylko w nich

Jak interferencja działa w dwóch wymiarach, można obejrzeć na obrazkach, uruchamiając program w Pythonie do pobrania z users.camk.edu.pl/alex/papers/siatka.tgz.

Druga równość w (5) sugeruje zatem, że w dalszej odległości za szczelinami pole elektryczne można wyrazić przez 2-wymiarową transformatę Fouriera funkcji położenia Θ , a odpowiednie natężenie światła, czyli kwadrat jej wartości bazwzględnej, to widmo mocy w 2 wymiarach.

Ruchy powietrza zniekształcają obraz gwiazd (również ich widma spektroskopowe). Aby poradzić sobie z tym problemem, astronomowie w czasie obserwacji dużymi teleskopami wykorzystują tzw. „optykę adaptatywną” – dostosowują kształt lustera teleskopu do obserwowanych zniekształceń, korygując (wyostrzając) w ten sposób obraz obserwowanej gwiazdy. Odpowiednie zniekształcenie lustera oblicza się, obserwując wiązkę lasera wyrzaloną specjalnie w tym celu w niebo. Tworzy ona na niebie sztuczną gwiazdę, którą obserwujemy za pomocą teleskopu. Doskonale wiemy, jak taka „laserowa gwiazda” powinna wyglądać. Dlatego astronomowie są w stanie wskazać zniekształcenia spowodowane przez drgania powietrza i na tej podstawie odpowiednio dostosować zwierciadło teleskopu, aby im przeciwdziałać.



Rozwiązanie zadania M 1671.

$$1 = \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$2 = \sqrt{4},$$

$$3 = -[-\sqrt{4!!}],$$

$$4 = 4,$$

$$5 = -[-\sqrt{4!}],$$

$$6 = - \left[- \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4!)!}}}}} \right],$$

$$7 = 4!! - \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$8 = 4!!,$$

$$9 = 4!! + \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$10 = \left[\sqrt{(-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$11 = - \left[- \sqrt{(-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$12 = \frac{4!}{\sqrt{4}},$$

$$13 = 4!! - [-\sqrt{4!}],$$

$$14 = \left[\sqrt{\sqrt{(4!!)!}} \right],$$

$$15 = - \left[- \sqrt{\sqrt{(4!!)!}} \right],$$

$$16 = 4 \cdot 4,$$

$$17 = - \left[- \sqrt{\sqrt{\sqrt{4!}} \cdot (-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$18 = \left[\sqrt{((-[-\sqrt{4!}])!) \cdot (-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$19 = \left[\sqrt{(4!!)!} \right],$$

$$20 = - \left[- \sqrt{(4!!)!} \right].$$

Czy wystarczy jedna czwórka?

Zmieniając elektronicznie opóźnienie fazowe od anten, można zmieniać kierunek antenowych listków, nie oglądając się na obrót Ziemi. Tak właśnie działają nadawcze i odbiorcze anteny radarów z przełączaniem fazy. W odróżnieniu od dawnych czas są one płaskie. Największe nieruchome anteny do śledzenia pocisków balistycznych miały 150 m wysokości i 700 m szerokości.

zmienić znak czasu. Taka rozdzielczość to jednak wciąż za mało, by zmierzyć średnice kątowe gwiazd. W obserwatoriach Paranal w Chile i Mauna Kea na Hawajach sumuje się zatem światło z wielu teleskopów odległych od siebie o $D \sim 100$ m i rejestruje powstały obraz interferencyjny. Taki obraz odpowiada interferencji światła przechodzącego przez szczeliny w odległości D , zatem pozwala poprawić dyfrakcyjną rozdzielczość kątową największych teleskopów o czynnik co najmniej 10. Podobnie jak poprzednio, z powodu niestabilności atmosfery procedurę trzeba powtarzać wielokrotnie w każdej sekundzie i dopiero uśrednienie wielu takich obrazów daje rozdzielczość wynikającą z dyfrakcji/interferencji. W ten sposób zmierzono średnice kilkudziesięciu gwiazd.

Z uwagi na obrót Ziemi przesunięcie fazowe między teleskopami ulega zmianie, zatem kumulując wyniki otrzymane w ciągu kilku godzin, dostajemy obrazy dyfrakcyjne z kilkudziesięciu różnych pozycji teleskopów, tak jakbyśmy obserwowali przez dwuwymiarową przesłonę z kilkudziesięcioma otworami. W ten sposób dla największych gwiazd (np. Betelgezy, α Ori) poprzez komputerowe „odkręcenie” obrazu dyfrakcyjnego można także uzyskać obraz oświetlającego źródła (odpowiedni algorytm to odwrotna transformata Fouriera w dwóch wymiarach). Taki sposób obserwacji nazywa się syntezą apertury. Teleskopy biorące udział w obserwacjach nie zbierają więcej światła, ale uzyskana pełniejsza informacja o przesunięciach fazowych daje rozdzielczość obrazu taką jak dla lustra o rozmiarze porównywalnym z D . Jakość ostatecznego obrazu zależy od stopnia wypełnienia obszaru powierzchni prostopadłej do kierunku źródła przez rzuty kolejnych położań teleskopów na tę powierzchnię.

Interferencja fal radiowych. Gdy jednak obserwator jest daleko od franki, widzi tylko to promieniowanie, które pada na ekran w wąskim zakresie θ , czyli albo maksimum, albo prawie nic, w zależności od jego położenia względem prążków interferencyjnych. Nawet niewielkie przesunięcie źródła oświetlającego szczeliny o kąt σ spowoduje, że jego jasny obraz w maksimum zniknie. Jeśli oświetlenie pochodzi od kosmicznego źródła radiowego, to szczeliny można zastąpić dipolowymi antenami odbiorczymi, a interferencję uzyskać w układzie elektrycznym sumującym odbierane oscylacje napięcia. Ponieważ przewody od anten będą różnej długości, należy je połączyć poprzez elektroniczne układy opóźniające, tak by sumować sygnały w zgodnej fazie. Właśnie tak został zaprojektowany radioteleskop IPS, zbudowany w 1967 roku w Cambridge jako dwuwymiarowa siatka 4096 dipoli czułych w długości fali 3,5 m, rozmieszczonych na polu o powierzchni 1,6 ha. Gdy radioteleskop ten obracał się wraz z Ziemią, kierunki odpowiadające kilkunastu kolejnym maksimum interferencji (tzw. listki antenowe) omiały większość nieba, rejestrując kolejne kosmiczne źródła. Jego aparatura przeznaczona do rejestracji szybkiej scyntylacji plazmy międzygwiazdowej zarejestrowała pierwszy pulsar radiowy (CP 1919, teraz oznaczony PSR B1919+21), z okresem impulsu 1,337 sekundy i szerokością impulsu 0,04 sekundy. Odkryte później pulsary mają okresy nawet kilkaset razy krótsze. Jeśli za regularny sygnał odpowiada rotacja, to każda „normalna” gwiazda, nawet tak niewielka jak biały karzeł (promień ~ 5000 km), zostałaby rozerwana przez siłę odśrodkową, zatem detekcja pulsarów była w istocie odkryciem gwiazd neutronowych o masie nieco większej od Słońca, ale promieniu zaledwie ~ 10 km.

Drgania fali światła są tak szybkie, że żadna elektronika za nimi nie nadąży, zatem syntezę apertury trzeba przeprowadzać, sumując interferujące wiązki światła w czasie rzeczywistym. Fale radiowe oscylują natomiast znacznie wolniej, zatem można po prostu wielokrotnie w każdym cyklu rejestrować natężenie zmiennego pola elektrycznego w antenie, o ile dysponujemy zegarem o stabilności lepszej niż okres fali w całym czasie obserwacji. Stosując zegary atomowe, można takie obserwacje prowadzić przez kilka tygodni za pomocą radioteleskopów na różnych kontynentach. Dopiero w dedykowanych komputerach, tzw. korelatorach, dodaje się zarejestrowane oscylacje pola elektrycznego i aplikuje transformatę Fouriera, co dla $D \sim 10\,000$ km i $\lambda \sim 10$ cm pozwala na sporządzenie obrazów radiowego nieba z rozdzielczością $\sigma \approx 0,005''$. Niedawno opublikowany pierwszy w historii obraz czarnej dziury M87* został sporządzony właśnie w ten sposób, dla mikrofal radiowych $\lambda = 1,3$ mm.