

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 3 (562) 2021

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

O tym,
jak przydatne
jest dudnienie
str. 9




Gitara
elektryczna,
czyli od dźwięku
do prądu
i z powrotem
str. 18

UNIwersytet
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (562)

Robert Hooke i grawitacja <i>Grzegorz Łukaszewicz, Mikołaj Sierżęga</i>	str. 1
 Zadania	str. 5
Kody korekcyjne <i>Artur Jeż</i>	str. 6
Spokojnie, to tylko wielomian <i>Mariusz Skalba</i>	str. 8
Matematyczny kącik muzyczny IV: O tym, jak przydatne jest dudnienie <i>Konstanty Kostrzewski</i>	str. 9
Kropki kwantowe <i>Krzysztof Pawłowski</i>	str. 11
Twierdzenie Sparre–Andersena <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 12
O przybliżaniu ułamekami <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 14
 O pewnej manipulacji (w nauce) <i>Magdalena Fikus</i>	str. 17
Gitara elektryczna, czyli od dźwięku do prądu i z powrotem <i>Wojciech Borkowski</i>	str. 18
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Woda na Księżycu	str. 22
Niebo w marcu	str. 22
Aktualności Przez gwiazdy do cierpień	str. 24
 Twierdzenie Ptolemeusza <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:
Jak nie wylać herbaty w pociągu.



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Robert Hooke i grawitacja

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Portrait of a Mathematician (około 1680 r.), autorstwa Mary Beale, jest jedynym portretem przedstawiającym (prawdopodobnie) Roberta Hooke'a



Charakterystyczny The Monument to the Great Fire of London jest pamiątką po tragicznym pożarze Londynu i instrumentem naukowym jednocześnie

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Mikołaj SIERŻĘGA*

Celem tego artykułu jest zainteresowanie Czytelnika postacią uczonego Roberta Hooke'a (1635–1703). Był on jednym z pionierów rewolucji naukowej XVII wieku, zapomnianym przez ponad 200 lat, a dopiero od niedawna odkrywany na nowo. Wkład Hooke'a w rozwój szeregu dyscyplin filozofii naturalnej jest wręcz przytłaczający, o czym wymownie świadczy fakt, że jego dokonania zajmują jedną trzecią piętnastotomowego opracowania *Early Science in Oxford* autorstwa Roberta T. Gunthera; informacja pochodzi z [7]. Historia Roberta Hooke'a jest jaskrawym przykładem znanej zasady Władimira I. Arnolda:

Jeśli jakiś koncept nosi nazwisko konkretnej osoby, to nie jest ono nazwiskiem jego odkrywcy.

Przez 40 lat Hooke pełnił funkcję kuratora eksperymentów naukowych w nowo powstałym Królewskim Towarzystwie w Londynie dla Rozszerzania Wiedzy o Przyrodzie (*The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge*), gdzie co tydzień demonstrował zgromadzonym członkom Towarzystwa zaprojektowane przez siebie eksperymenty i przybliżał najnowsze teorie naukowe. Po wielkim pożarze Londynu w 1666 roku nadzorował wraz ze swoim przyjacielem **Christopherem Wrenem** (1632–1723) dzieło odbudowy miasta. Podobnie jak w przypadku pracy naukowej i tutaj imponujący wkład Hooke'a został z czasem zapomniany. Dziś już nie istnieje wiele z zaprojektowanych przez niego budowli, ale dwa spektakularne przykłady na stałe wpisały się w panoramę miasta. Słynna St Paul's Cathedral była zaprojektowana przez Wrena wspólnie z Hooke'iem, który dodatkowo nadzorował budowę. Również pomnik *The Monument to the Great Fire of London* został zaprojektowany przez Hooke'a. Autor nie przepuścił okazji, żeby uzupełnić swój projekt o funkcję naukową. Pusta w środku kolumna jest w istocie przyrządem pomiarowym, długim solidnym tubusem wycelowanym pionowo w niebo. Przy wykorzystaniu zjawiska paralaksy miał umożliwić Hooke'owi eksperymentalne udowodnienie **ruchu Ziemi dookoła Słońca**. Mniej oczywistą pamiątką po Hooke'u jest wyznaczona przez niego sieć nowych ulic Londynu, w szczególności w dzielnicy City.

Ogrom zobowiązań zawodowych sprawił, że Hooke nie znajdował czasu, żeby precyzyjnie opisać i właściwie opublikować swoje odkrycia. Te zaś często przypisywane były innym, którzy nierzadko zainspirowani przez Hooke'a doprowadzali proces do konkluzji i publikacji. Niektóre jego koncepcje wyprzedzały swój czas tak bardzo, że nawet nadzwyczajna aktywność naukowa XVII wieku nie zachęcała do plagiatu, np. jego pogląd, że **ciepło jest wynikiem niewidzialnych drgań** mikroskopijnych części składających się na ciała materialne. Obecnie kinetyczną teorię ciepła datujemy od przełomowych prac Jamesa Clerka Maxwella (1831–1879). A należy pamiętać, że dopiero na początku XX wieku, m.in. w następstwie pracy Einsteina nad ruchami Browna, kinetyczna teoria awansowała z przydatnego matematycznego modelu opartego na wymyślonych podstawowych cząstkach materii na adekwatny opis rzeczywistości.

W przypadku odkryć bardziej zharmonizowanych ze stanem ówczesnej wiedzy Hooke nie raz musiał bronić swojego pierwszeństwa lub skarżył się publicznie, że jego pomysły zostały skradzione. Zyskał przez to reputację osoby kłótniwej i zadufanej w siebie, co z kolei skłoniło wielu mu współczesnych, jak i przyszłych, badaczy do opinii, że wywody Hooke'a były przechwałkami bez pokrycia. Odkryte w pierwszej połowie XX wieku dzienniki uczonego, a także listy znaczących postaci ówczesnego świata naukowego, takich jak np. Halley, Flamsteed czy Huygens, wskazują jednak, że te twierdzenia nie były na wyrost.

Być może najważniejsze osiągnięcie Hooke'a jest jednocześnie tym, którego autorstwo jest w powszechnej świadomości przypisane jego największemu rywalowi. Mówimy tu o **teorii grawitacji**, nieodłącznie kojarzonej z postacią Isaaca Newtona (1642–1727) i jego magnum opus – *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Zasady matematyczne filozofii naturalnej) – wydanym w 1687 roku.

Robert Hooke pracował nad własną teorią grawitacji przynajmniej od roku 1665, a swoje rozważania wielokrotnie przedstawiał publicznie, w tym w formie

pisemnej (w latach 70.) w tzw. wykładach Cutlerowskich. Krótki opis tej teorii można przeczytać w książce J. Kierula ([6] na stronie 254), same zaś wykłady można bez trudu znaleźć w sieci. Spójrzmy zatem na główne założenia teorii Hooke'a.

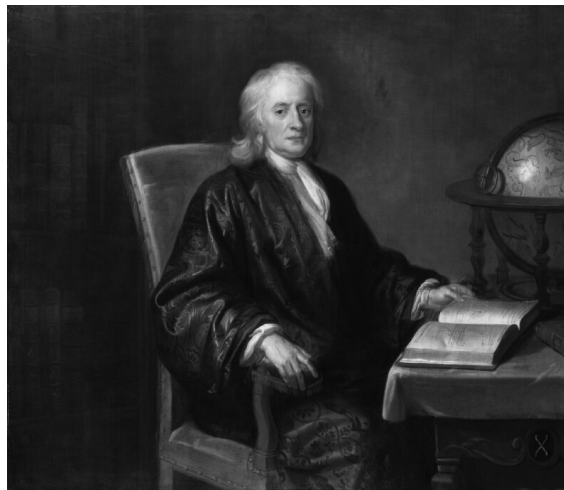
1. Wszystkie ciała niebieskie obdarzone są mocą przyciągającą w kierunku swego centrum. Wszystkie ciała niebieskie, w szczególności ciała naszego układu planetarnego, oddziałują na siebie wzajemnie (na ruch każdego mają wpływ wszystkie pozostałe).
2. Wszystkie ciała wprawione w prosty i prostoliniowy ruch będą kontynuować taki ruch po linii prostej, dopóki nie zostaną przez jakieś działające moce odchylone i zmuszone do ruchu po jakiejś złożonej linii krzywej.
3. Moce przyciągające są tym potężniejsze w działaniu, im bliżej ich środka znajduje się ciało, na które działają. Owe moce przyciągające maleją odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości.

Brzmi znajomo, czyż nie? Zwróćmy przede wszystkim uwagę na to, co zawierają powyższe założenia. Pierwsze założenie mówi, że grawitacja jest *powszechna*, i prawidłowo przedstawia działające siły co do ich *kierunku*. Założenie trzecie precyzuje *wartość* siły grawitacji działającej między dwoma ciałami. Założenie drugie jest tzw. pierwszym prawem Newtona, które zresztą za sprawą Galileusza i Kartezjusza było wówczas powszechnie znane.

Hooke i Newton starli się już w 1671 roku, ale w innym obszarze badań. Obaj uczeni mieli silną pozycję w świecie nauki. Nazwisko Hooke'a znane było w całej Europie, Newton zaś w wieku zaledwie 27 lat za sprawą rekomendacji Isaaca Barrowa przejął katedrę matematyki w Cambridge. Obu cechowała chorobliwa wręcz ambicja rozszyfrowania wszelkich tajemnic natury. Po szeregu owocnych lat poświęconych matematyce Newton w ramach swoich zobowiązań akademickich pochylił się nad problemami optyki i zadał podstawowe pytanie o samą naturę światła, co rychło doprowadziło do konfliktu z Hooke'iem. Podczas gdy Newton proponował teorię korpuskularną, Hooke obstawał przy teorii falowej. Argumenty podnoszone w tej dyspacie były nie tylko merytoryczne, a po pierwszym spotkaniu pozostał niesmak. Spór zainicjowany przez tych dwóch gigantów nie znalazł rozwiązania za ich życia. Przez długi czas teoria falowa świeciła triumfy, aż do nastania mechaniki kwantowej na początku XX wieku, gdy światło ponownie stało się strumieniem cząstek. Uczeni być może nie weszliby ponownie na kurs kolizyjny, gdyby nie nowa funkcja Hooke'a w The Royal Society. W 1679 roku został on sekretarzem Towarzystwa. Do jego zadań należało utrzymywanie, w imieniu instytucji, korespondencji z wieloma wiodącymi uczonymi, w tym z Newtonem. W liście z 1679 roku Hooke przedstawił Newtonowi swoją teorię dotyczącą grawitacji.

Niewątpliwie Newton rozpoczął swoje badania nad ruchem ciał niebieskich na wiele lat przed otrzymaniem zarysu teorii od Hooke'a. Wydaje się jednak, że to

ów list był decydujący w obraniu przez Newtona nowego kursu w swoich rozważaniach. Jego koncepcje dotyczące teorii grawitacji przed rokiem 1684 były mieszaniną teorii wirów Kartezjusza i sił magnetycznych, co przedstawił w pracach na temat komety z przełomu lat 1680–1681, o której doniósł Newtonowi Królewski Astronom Flamsteed.

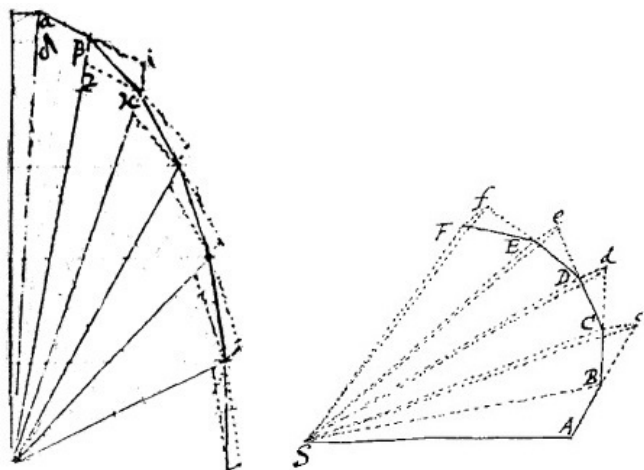


Isaac Newton ok. 1726 roku, u schyłku życia

Wpływ Hooke'a dotyczył nie tylko ogólnego kształtu teorii, ale też technicznych aspektów dowodu matematycznego. I tak Newton przyjął sugestię Hooke'a, że ruch orbitalny jest wynikiem zestawienia ruchu po prostej stycznej z tendencją w stronę źródła siły, którym jest ciało centralne, a **nie – jak chciał Newton – z odchyleniem w kierunku prostopadłym do ruchu i proporcjonalnym do krzywizny trajektorii**. Co więcej, sama metoda dowodu opiera się na promowanym przez Hooke'a pomysle, że siła grawitacyjna to efekt okresowych impulsów emitowanych przez materię, podobnych w charakterze do światła czy dźwięku. Była to idea prawdopodobnie zainspirowana wcześniejszymi badaniami nad falową naturą światła, które też doprowadziły Hooke'a do zapostulowania siły malejącej z kwadratem odległości. W *trójwymiarowej* przestrzeni natężenie światła na sferze o promieniu r i o środku w punkcie źródła światła jest odwrotnie proporcjonalne do r^2 . Wynika to z tego, że pole sfery jest równe $4\pi r^2$. Dowód Newtona pierwszego prawa Keplera, tj. eliptyczności orbit planetarnych, opiera się na aproksymacji zakrzywionej trajektorii przez tor kawałkami liniowy, gdzie proste fragmenty odpowiadają ruchowi bezwładnemu, zaś punkty zmiany kierunku odpowiadają doświadczeniu przez ciało impulsu przyciągającego w stronę centrum siły.

Na marginesie następnej strony zestawiamy ilustrację konstrukcji trajektorii ciała pod wpływem sił centralnych w wykonaniu Newtona (w pracy *De Motu Corporum* z roku 1684) i szkic Hooke'a (z nieopublikowanego manuskryptu datowanego na rok 1685). Pomimo iż istnieje spore prawdopodobieństwo, że Hooke miał szansę zapoznać się z publikacją Newtona – gdy sporządzał swój szkic, na pewno metoda nie była dla

niego żadną nowością, gdyż konstrukcja jest niczym innym aniżeli graficznym przedstawieniem idei, które głosił od lat. Dlaczego Hooke rozważał siłę malejącą liniowo? Wiadomo, że chciał zademonstrować zasadność swojej teorii za pomocą eksperymentu, w którym rolę planety odegrałoby wahadło sferyczne. Siła zmieniająca się liniowo z odległością była aspektem jego badań nad drganiami i sprężystością. Przynajmniej w tym obszarze potomni uczą się o prawie Hooke'a!



Z lewej: aproksymacja trajektorii, ruchu pod wpływem siły malejącej proporcjonalnie do odległości (w wykonaniu Hooke'a).
Z prawej: aproksymacja trajektorii, ruchu pod wpływem siły malejącej z kwadratem odległości (w wykonaniu Newtona)

Być może gdyby Hooke w ciągu kilku lat poprzedzających korespondencję z Newtonem poświęcił więcej czasu na skrupulatną analizę, mówilibyśmy dzisiaj o teorii grawitacji Hooke'a. Z pewnością możemy powiedzieć, że powszechny pogląd, według którego Hooke'owi brakowało zdolności matematycznych, żeby przekuć swoje hipotezy w bezsporną demonstrację, jest krzywdzący. Być może krokiem, którego mu zabrakło, było umiejętne przejście do granicy z krokiem aproksymacji. Newton z całym swoim doświadczeniem zdobytym przy formułowaniu rachunku różniczkowego był w tym względzie wiodącym ekspertem. Poprawną i bardzo starannie uzasadnioną matematyczną teorię grawitacji przedstawił dopiero w 1687 roku w *Principiach*.

Dlaczego przy wszystkich swych osiągnięciach Hooke zniknął z horyzontu? To fascynująca historia, na którą wpływ miały elementy ludzkie oraz aspekty pozanaukowe. Pewne jest, że decydującym elementem zepchnięcia Hooke'a na margines wielkiej nauki była głęboka i dobrze udokumentowana osobista niechęć Newtona, który w ostatnich latach życia Hooke'a miał dominującą pozycję w środowisku naukowym. Należy wspomnieć, że nie ma w *Principiach* odnośników do roli Roberta Hooke'a w rozwoju teorii grawitacji. Hooke nic nie osiągnął w środowisku związanym z The Royal Society, chociaż protestował. Mało tego, niedługo po jego śmierci Newton został prezesem Towarzystwa. Jednym z jego pierwszych zadań było przeniesienie instytucji do nowej siedziby. Czy (jak twierdzą niektórzy) nowy prezes polecił spalić portret Hooke'a? Czy też (jak

twierdzą inni) nie zadbał o to, żeby portret zawisł w nowej siedzibie? Tego raczej nigdy się nie dowiemy. Do niedawna sądzono, że do naszych czasów nie przetrwał żaden wizerunek uczonego. Dopiero w 2020 roku postać Hooke'a została skojarzona z postacią matematyka namalowaną przez Mary Beale! Będąc gigantem za życia, Newton urósł jeszcze bardziej po śmierci, kiedy jego akolici wynieśli go do pozycji nieomal boskiej.

Historia tego sporu została przez wieki zredukowana do łatwostrawnych uproszczeń, które są sukcesywnie powielane w podręcznikach szkolnych. Do niedawna historycy, prawie bez wyjątku, przedstawiali wkład Hooke'a w teorię grawitacji jako mało istotny. Jego teorię lekceważono, opisywano jako domysły podane bez właściwego uzasadnienia – dopiero Newton podał dowody, twierdzono. Aura Newtona oślepiła. Podobnych historii jest na pewno więcej. Im dalej w przeszłość, tym trudniej oddzielić prawdę od mitów. Aby jednak skierować ten artykuł na bardziej optymistyczne tory, spójrzmy jeszcze na kilka przykładów, gdzie oddany został należny szacunek wizjonerom nauki.

Wizjonerzy nauki

- W 1650 roku w Sztokholmie zmarł przedwcześnie wielki filozof i matematyk **René Descartes**. Skrzynia zawierająca jego notatki odesłana została do Francji. W niej znaleziono także sekretny dziennik uczonego. Niektóre wpisy w dzienniku były zaszyfrowane. Historia zapisków Kartezjusza, skopiowanych przez **Gottfrieda Leibniza** i ostatecznie odkodowanych dopiero w latach 80. ubiegłego wieku, jest niezwykła.



Kartezjusz & Leonhard Euler

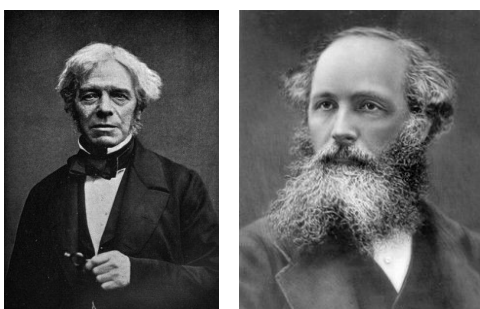
Dowiadujemy się z nich, że słynne *twierdzenie o wielościanach Eulera* znane było Kartezjuszowi. Obecnie można już się spotkać z twierdzeniem Eulera–Kartezjusza lub wręcz po prostu *Kartezjusza o wielościanach*. Warto tu zwrócić uwagę, w kontekście oskarżeń wysuwanych pod adresem Hooke'a, że ani Kartezjusz, ani Euler nie udowodnili twierdzenia, a pomimo to ich pionierska rola doceniona została w nomenklaturze.

- **Michael Faraday** był genialnym eksperymentatorem i wizjonerem, którego prace nad elektromagnetyzmem zmieniły świat na zawsze. Nie dokonał on jednak matematyzacji swoich odkryć, która, jak już się przekonaaliśmy, bywa uważana za właściwe ukoronowanie

pracy naukowej. Teorię matematyczną zbudował **James Clerk Maxwell**, który jednak często podkreślał, że szedł za inspirującą wizją Faradaya, i zachęcał do zgłębiania jego prac:

Faraday jest i musi na zawsze pozostać ojcem elektromagnetyzmu. (...) Aby zrozumieć naukową potęgę Faradaya, najlepsze, co możemy zrobić, to przeczytać pierwszą i drugą serię jego „Researches” oraz porównać je... z całym biegiem nauki o elektromagnetyzmie od tamtej pory, który nie dodał żadnej nowej idei do przedstawionych, a tylko zweryfikował prawdziwość i wartość naukową każdej z nich.

J. Clerk Maxwell,
Nature 8 (1873), strony 398 i 400



Michael Faraday & James Clerk Maxwell.

• Od roku 1907 do 1915 **Albert Einstein** pracował nad ogólną teorią względności. Pomimo głębokiego zrozumienia istoty teorii wyprowadzenie prawidłowego równania pola wymagało opanowania skomplikowanego aparatu matematycznego geometrii Riemannowskiej. Latem 1915 roku Einstein odwiedził Getyngę, gdzie podzielił się swoimi przemyśleniami z **Davidem Hilbertem**. Kilka miesięcy później Einstein opublikował ostateczną wersję teorii. Dowiedział się też, że w tym samym czasie Hilbert również napisał pracę zawierającą tożsame równanie pola. Pomimo pewnych napięć Hilbert nie wahał się, żeby wskazać Einsteina jako twórcę ogólnej teorii względności.

Uzyskane równania różniczkowe opisujące grawitację są według mnie w zgodzie ze wspianą ogólną teorią względności wyłożoną przez Einsteina w jego późniejszych pracach.

David Hilbert, cytowanie za Corry et al.



Albert Einstein & David Hilbert

• **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920) był genialnym indyjskim matematykiem, którego unikalne zdolności dostrzegania prawidłowości teoriolizbowych wykraczają poza ludzkie rozumienie. Znany brytyjski matematyk **Godfrey H. Hardy** zaprosił Ramanujana do współpracy w Cambridge. To, co dla Ramanujana było oczywiste, widoczne gołym okiem, dla Hardy’ego i szerszej społeczności matematycznej było zaskakujące i trudne do udowodnienia. Ramanujan nie zgadywał swoich niezwykle wzorów, on po prostu spisywał to, co widział wyraźnie. Idea dowodu jako sekwencji prostszych stwierdzeń, prowadzących do uzasadnienia trudniejszej do dostrzeżenia prawdy, mogła mu się wydać dziwna. Ramanujan zmarł w wieku zaledwie 32 lat, ale pozostawił po sobie ogromne dzieło pełne twierdzeń pozbawionych dowodu. Nie ma wątpliwości, że mamy do czynienia z twierdzeniami, a nie hipotezami, a ich autorem jest Ramanujan, a nie autor dowodu w naszym powszechnym rozumieniu. Hardy i inni zajęli się podawaniem precyzyjnych matematycznych dowodów. Ich następcy robią to do dziś, publikując opracowane wyniki w wielotomowej serii *Ramanujan’s Lost Notebook*. Obecnie trwają prace nad tomem szóstym. Zainteresowanych odsyłamy do bardzo dobrego artykułu w Wikipedii (anglojęzycznej).

Co się tyczy mnie, to trudno mi wyrazić, co zawdzięczam Ramanujanowi – od chwili, gdy go poznałem, jego oryginalność była dla mnie stałym źródłem inspiracji, a jego śmierć jest jednym z najgorszych ciosów, jakich kiedykolwiek doznałem.

G. H. Hardy, cytowanie za R. Kanigel str. 363.



Srinivasa Ramanujan & Godfrey H. Hardy

• Przekucie słynnej *hipotezy Poincaré’go* w twierdzenie stało się udziałem ekscentrycznego geniusza **Grigorija Perelmana** w pierwszych latach XXI wieku. Wraz z dowodem czekały sława, prestiżowe nagrody i znaczące sumy pieniędzy. Perelman rozczarowany mechanizmami panującymi w globalnej społeczności matematycznej odmówił nie tylko nagród, ale też skrytykował próbę wywyższenia jego wkładu ponad dokonania poprzedników, na których pracy budował, a w szczególności twórcy strategii dowodu opartej na teorii *potoków Ricci’ego* – **Richarda Hamiltona**.

Krótko mówiąc, główną przyczyną [odmowy przyjęcia Nagrody Milenijnej Instytutu Claya] jest mój sprzeciw wobec zorganizowanej społeczności matematycznej. Nie podobają mi się ich decyzje, uważam je za niesprawiedliwe.

(...) Uważam, że wkład Richarda Hamiltona w rozwiązanie tego problemu jest niemniejszy niż mój.

G. Perelman,
1 czerwca 2010 r., cytowanie za agencją Interfax.



Richard Hamilton & Grigoriy Perelman

W fizyce formułuje się nowe hipotezy na podstawie dostępnej wiedzy teoretycznej i eksperymentalnej, wglądu intuicyjnego i przeprowadzonych rachunków, a potem sprawdza się zgodność ustaleń z doświadczeniem. Gdy uzyska się potwierdzające rezultaty dla postulowanych hipotez, te ostatnie stają się fundamentem nowej teorii, którą potem dopracowuje się matematycznie, aby otrzymać dodatkowe relacje. Uzyskane wnioski matematyczne są dalej wskazówką dla

przewidywań i obserwacji nowych, niezauważonych wcześniej zjawisk. Fundamentalna w tym wszystkim jest podstawowa wizja. Powyżej mogliśmy zobaczyć przykłady, w których głęboki wgląd w istotę zagadnienia został mocno zaakcentowany na kartach historii nauki. Możliwe, że przyjdzie czas, gdy nazwisko Hooke'a będzie tak nierozdzielnie związane z klasyczną teorią grawitacji, jak Newtona jest obecnie.

Literatura:

- [1] Vladimir Igorevich Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser 1980.
- [2] Leo Corry, Jürgen Renn, John Stachel, *Belated Decision in the Hilbert–Einstein Priority Dispute*, Science vol. 278, 14 November 1997.
- [3] Robert Hooke's Diary. Nature 135, 297 (1935).
- [4] Stephen Inwood, *The Man Who Knew Too Much. The strange and inventive life of Robert Hooke, 1635–1703*, Macmillan Publishers Ltd, 2002.
- [5] Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, Charles Scribner's Sons, 1991 (Istnieje polski przekład).
- [6] Jerzy Kierul, *Newton*, PIW, 2010.
- [7] Michael Nauenberg, *Robert Hooke's Seminal Contribution to Orbital Dynamics*, Physics in Perspective volume 7, pages 4–34(2005).
- [8] Louise Diehl Patterson, *Hooke's Gravitation Theory and Its Influence on Newton. I: Hooke's Gravitation Theory*, Isis, Nov., 1949, Vol. 40, No. 4 (Nov., 1949), pp. 327-341.
- [9] Louise Diehl Patterson, *Hooke's Gravitation Theory and Its Influence on Newton. II: The Insufficiency of the Traditional Estimate*, Isis, Mar., 1950, Vol. 41, No. 1 (Mar., 1950), pp. 32-45.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1666. Czy istnieje pięciokąt wypukły, w którym długość każdej przekątnej jest równa długości któregoś z boków?

Rozwiązanie na str. 14

M 1667. Niech P będzie takim wielomianem stopnia 2000, że wielomian $P(x^2 - 1)$ ma dokładnie 3400 miejsc zerowych, a wielomian $P(1 - x^2)$ ma dokładnie 2700 miejsc zerowych. Udowodnij, że pewne dwa miejsca zerowe wielomianu P różnią się o mniej niż 0,002.

Rozwiązanie na str. 19

M 1668. Dla dowolnej liczby całkowitej $N \geq 2$ niech $f(N)$ oznacza sumę N i największego dzielnika N (różnego od N). Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $A \geq 2$, iterując wielokrotnie f na A , uzyskamy liczbę podzielną przez 3^{2020} .

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1019. Jak częstość drgań (wysokość tonu) f struny zależy od jej długości l , masy m i (siły) naciągu F ?

Rozwiązanie na str. 15

F 1020. Po zakończeniu swojej „misji” i wykonaniu wielu okrążeń Ziemi część satelitów wchodzi w górne warstwy atmosfery i powoli zbliża się do powierzchni Ziemi. Przyjmijmy jako model „spadania” satelity, że siła F hamująca jego ruch jest postaci $F = -Av^\alpha$, gdzie v jest prędkością satelity, a $A > 0$ i $\alpha > 0$ są pewnymi stałymi. Przyjmijmy dalej, że siła F jest na tyle mała, że podczas ruchu orbita pozostaje w dobrym przybliżeniu orbitą kołową – tzn. po każdym kolejnym obiegu odległość r satelity od środka Ziemi maleje bardzo niewiele w porównaniu z r . Jak w naszym modelu prędkość zbliżania się satelity do Ziemi zależy od odległości r ?

Rozwiązanie na str. 16



Każdemu zdarza się pomylić podczas pisania na klawiaturze. Nie każdy ciąg liter jest jednak sensownym słowem i dzięki tej nadmiarowości zwykle da się odtworzyć oryginalne słowo. Sytuacja staje się dużo trudniejsza przy wszelkiego rodzaju danych przetwarzanych przez komputery: numery kont bankowych, zawartości plików, transmisja radiowa... W jaki sposób wykrywać i poprawiać w nich błędy? Poniżej przedstawimy kody korekcyjne, które dodają do danych odpowiednią „nadmiarowość” i dzięki temu pozwalają wykrywać i poprawiać błędy.

Skupmy się na razie na ciągach bitów. Każdy zapewne słyszał o bicie kontroli parzystości (kod parzystości): ustalamy pewną wartość k (powiedzmy $k = 7$) i po każdym k bitach dodajemy ich sumę modulo 2. Przy odczytywaniu sprawdzamy, czy suma (modulo 2) kolejnych $k + 1$ bitów wynosi 0: jeśli nie, to nastąpił błąd (i np. prosimy o powtórzenie). Innym naturalnym sposobem korekcji jest kod powtórzeniowy: każdy bit powtarzamy trzykrotnie i przy odczytywaniu „głosujemy większością”. Mimo użycia trzykrotnie więcej znaków już dwa błędy wystarczą, by źle „poprawić” wiadomość: 010 może oznaczać zarówno 000 z jednym błędem, jak i 111 z dwoma błędami; intuicyjnie nie jest to więc dobre rozwiązanie. Innym przykładem jest kod Hamminga, który pozwala poprawić 1 błąd: dla bitów b_1, b_2, b_3, b_4 dopisujemy bity $b_1 + b_2 + b_4, b_1 + b_3 + b_4, b_2 + b_3 + b_4$. Cierpliwy Czytelnik może sprawdzić, że kod Hamminga faktycznie pozwala poprawić jeden błąd. Do takiego kodu można dodać bit parzystości, poprawia on wtedy dalej jeden błąd, ale wykrywa dwa błędy.

Podobne rozwiązanie jak kontrola bitu parzystości stosowane jest przy numerach rachunków bankowych (dwie wiodące cyfry kontrolne) czy numerach ISBN książek (ostatnia cyfra).

Richard Hamming opracował swój kod oraz jego uogólnienia w ramach walki z plagą błędów powstających przy wpisywaniu bitów programów komputerowych. Tak, kiedyś robiono to ręcznie.

Kod Hamminga z bitem parzystości znany jest też jako SECDED *Single Error Correction Double Error Detection* i jest powszechnie implementowany w systemach komputerowych.

Jest subtelna różnica między kodem, czyli zbiorem ciągów, a kodowaniem, czyli przekształcaniem oryginalnej wiadomości w słowa kodowe. Najczęściej jednak kodowanie jest naturalne, a kod jest definiowany jako jego obraz, dlatego nie będziemy się nad tym rozwodzić.

Poprawianie, które „różni się najmniej”, jest naturalne, ale jego poprawność zależy od modelu: tu zakładamy, że błędy są (w odpowiednim sensie) losowe, jednak w pewnych scenariuszach należy poprawiać inaczej: np. możemy wiedzieć, że 1 jest zawsze przekazane poprawnie, a 0 niekoniecznie.

Korekcja Reeda–Solomona jest optymalna: kod może poprawiać najwyżej $\lfloor (n - k)/2 \rfloor$ błędów; jest to tzw. ograniczenie Singletona.

Podejźmy bardziej systematycznie do konstrukcji kodów korekcyjnych. Ustalmy zbiór \mathbb{F} symboli, np. $\mathbb{F} = \{0, 1\}$. Kodem będzie dla nas pewien zbiór $C \subseteq \mathbb{F}^n$ ciągów n -elementowych, które traktujemy jako wektory, nazywamy je też słowami kodowymi; zwykle C jest podprzestrzenią liniową i dlatego $|C| = |\mathbb{F}|^k$ dla pewnego $k \leq n$. Jest tak np. dla wszystkich rozważanych poprzednio kodów. Przypuśćmy, że otrzymaliśmy wiadomość $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \notin C$ spoza C . Do jakiego słowa kodowego należy ją poprawić? Naturalne jest poprawienie \vec{w} do $\vec{c} \in C$, które „różni się najmniej”. Formalnie odległość Hamminga $d_H(\vec{w}, \vec{c})$ między $\vec{w}, \vec{c} \in \mathbb{F}^n$ to liczba pozycji, na których \vec{w} i \vec{c} się różnią; później przyda nam się, że d_H spełnia nierówność trójkąta, tj. $d_H(\vec{u}, \vec{v}) \leq d_H(\vec{u}, \vec{w}) + d_H(\vec{w}, \vec{v})$. Reasumując, \vec{w} poprawiamy do $\vec{c} \in C$ o minimalnej odległości Hamminga od \vec{w} .

Przedstawimy teraz rodzinę kodów korekcyjnych Reeda–Solomona, która dla zadanych $k \leq n$ pozwala na poprawienie $\lfloor (n - k)/2 \rfloor$ błędów. Wiadomość $\vec{m} = (m_0, \dots, m_{k-1})$ kodujemy jako wartość wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i$ w punktach $0, 1, \dots, n - 1$ (można użyć innych punktów, dla ustalenia uwagi używaj jednak będziemy $0, 1, \dots, n - 1$), to znaczy jako $(w(0), \dots, w(n - 1))$. Odległość dwóch różnych słów kodowych to przynajmniej $n - k + 1$: jeśli $\vec{w} = (w_0, \dots, w_{n-1})$ i $\vec{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})$ są słowami kodowymi, to $\vec{w} - \vec{v}$ to ciąg wartości wielomianu $w(x) - v(x)$ w punktach $0, \dots, n - 1$. Wielomian $w(x) - v(x)$ jest niezerowy i $\deg(w(x) - v(x)) < k$, ma więc najwyżej $k - 1$ miejsc zerowych. Tak więc przynajmniej $n - k + 1$ spośród $(w_0 - v_0, \dots, w_{n-1} - v_{n-1})$ to niezerowe liczby, co oznacza, że $d_H(\vec{w}, \vec{v}) \geq n - k + 1$. Jeśli przy przesyłaniu kodu $\vec{w} \in C$ otrzymamy \vec{u} przy nie więcej niż $\lfloor (n - k)/2 \rfloor$ błędach, czyli $d_H(\vec{w}, \vec{u}) \leq \lfloor (n - k)/2 \rfloor$, to faktycznie \vec{w} jest najbliższym elementem z C dla \vec{u} : jeśli najbliższym byłby $\vec{v} \in C$, to wtedy nierówność

$$d_H(\vec{v}, \vec{u}) \leq d_H(\vec{w}, \vec{u}) \leq \lfloor (n - k)/2 \rfloor \text{ i } d_H(\vec{v}, \vec{w}) \leq d_H(\vec{v}, \vec{u}) + d_H(\vec{u}, \vec{w})$$

dają $d_H(\vec{v}, \vec{w}) \leq n - k$, sprzeczność.

Jak na razie nie powiedzieliśmy nic o współczynnikach wielomianów. Używanie liczb rzeczywistych jest problematyczne: liczby w kodowaniu w_0, \dots, w_{n-1} są bardzo duże i operowanie na nich jest bardzo kosztowne obliczeniowo. Zamiast zbioru liczb rzeczywistych używane są więc *ciała skończone*. Ciałami skończonymi są na przykład reszty z dzielenia przez p , gdzie p jest liczbą pierwszą. Ogólnie zaś jest to struktura, w której zdefiniowane są dodawanie i mnożenie spełniające oczekiwane przez nas własności, np. $a \cdot (b + c) = ab + ac$, możliwe jest zdefiniowanie dzielenia itd. Można pokazać, że dla każdej liczby

Co ciekawe, algorytm Welch–Berlekampa jest opatentowany: Lloyd R. Welch and Elwyn R. Berlekamp. Error correction of algebraic block codes. US Patent Number 4,633,470, December 1986.

pierwszej p i dodatniej liczby naturalnej k istnieje ciało o p^k elementach. Co więcej, również wielomiany o współczynnikach z ciała skończonego mają wiele własności wspólnych z wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, w szczególności nierozowy wielomian stopnia mniejszego niż k ma mniej niż k miejsc zerowych. I to właśnie wielomianów o współczynnikach z ciała skończonego używa się w kodach Reeda–Solomona. Zwykle używamy ciała o 2^m elementach, gdyż wtedy jeden kodowany element naturalnie odpowiada ciągowi m bitów. Zauważmy, że musimy zapewnić $n \leq 2^m$: nie możemy obliczyć wartości wielomianu $w(x)$ w więcej niż 2^m różnych punktach; dla ułatwienia punkty te dalej będziemy oznaczać przez $0, \dots, n-1$.

Wiemy już, że używając kodu Reeda–Solomona, możemy poprawiać błędy, jednak na razie znamy jedynie bardzo nieefektywną procedurę poprawiania: przeglądamy kolejne możliwe wiadomości i sprawdzamy, która najmniej różni się od otrzymanej. Do przejrzenia jest $|\mathbb{F}^k|$ wiadomości, co jest bardzo kosztowne. Podamy wydajny algorytm dekodowania Welch–Berlekampa; nie jest on najszybszy, lecz jest najprostszy w opisie i dowodzie poprawności. Niech (u_0, \dots, u_{n-1}) będzie otrzymaną wiadomością, zaś (w_0, \dots, w_{n-1}) słowem kodowym w odległości najwyżej $\lfloor (n-k)/2 \rfloor$; niech $w(x)$ będzie takim wielomianem stopnia mniejszego niż k , że $w(i) = w_i$ dla $i = 0, \dots, n-1$. Zdefiniujmy też wielomian błędu $e(x)$ jako

$$e(x) = \prod_{i: u_i \neq w_i} (x - i).$$

Wtedy $\deg(e) \leq \lfloor (n-k)/2 \rfloor$. Wielomianu tego nie znamy, ale pozwala nam on „usunąć błędy”: zauważmy, że dla $i = 0, \dots, n-1$ zachodzi

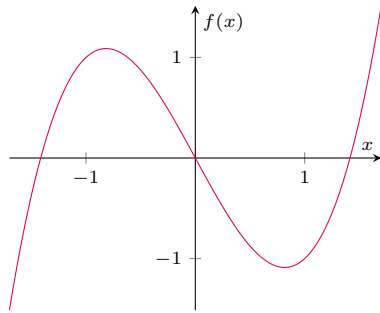
$$(1) \quad u_i e(i) = w(i) e(i)$$

Faktycznie: jeśli $u_i \neq w_i$, to obie strony równe są 0, w przeciwnym przypadku $u_i = w_i$. Zdefiniujmy wielomian $q(x) = w(x)e(x)$, wtedy $\deg(q) < \lfloor (n+k)/2 \rfloor$. Teraz mamy już dwa nieznanne wielomiany $q(x)$, $e(x)$, które spełniają jednak $q(x)/e(x) = w(x)$. Używając wielomianu $q(x)$, możemy uprościć (1) do

$$(2) \quad u_i e(i) = q(i) \text{ dla } i = 0, \dots, n-1.$$

Wielomiany $q(x)$, $e(x)$ mają $\lfloor (n+k)/2 \rfloor$ oraz $\lfloor (n-k)/2 \rfloor + 1$ współczynników oraz $e(x)$ ma współczynnik wiodący 1. Potraktujmy te n nieznanych współczynników jako zmienne. Wtedy (2) można potraktować jako układ n równań na n współczynników; otrzymane równania są liniowe, tzn. każdy ze współczynników mnożymy przez ustaloną liczbę. Równania te są nad ciałem skończonym, ale większość własności układów równań nad liczbami rzeczywistymi przenosi się na układy równań nad ciałami skończonymi, w szczególności można je rozwiązać tak jak układy równań nad liczbami rzeczywistymi, np. przez podstawienia. Układ (2) ma rozwiązanie: wielomiany $w(x)$, $e(x)$, $q(x)$ są dobrze określone (choć nam nieznanne), może mieć jednak wiele rozwiązań. Nie szkodzi: pokażemy, że jeśli $e'(x)$, $q'(x)$ jest innym rozwiązaniem, to $q(x)e'(x) = q'(x)e(x)$, i w takim razie $q(x)/e(x) = q'(x)/e'(x)$. Zauważmy, że z konstrukcji $\deg(q') < \lfloor (n+k)/2 \rfloor$ oraz $\deg(e') \leq \lfloor (n-k)/2 \rfloor$ i w takim razie $q(x)e'(x)$, $q'(x)e(x)$ mają stopień najwyżej $n-1$ i mają one takie same wartości w $i = 0, \dots, n-1$: $q(i)e'(i) = u_i e(i)e'(i) = q'(i)e(i)$, a więc są równe. Wystarczy więc wyliczyć dowolne rozwiązanie $q'(x)$, $e'(x)$ układu (2) i wtedy $w(x) = q'(x)/e'(x)$.

Kody Reeda–Solomona znalazły szerokie zastosowanie: na płytach CD i DVD, w standardzie GSM, w transmisji z sond kosmicznych, w kodach 2D... Nie są bez wad: choć poprawiają $\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ błędów, jednak nie na pojedynczych bitach, lecz na elementach ciała, które reprezentowane są jako wiele bitów. Ta wada staje się zaletą, gdy powstałe błędy pojawiają się „w serii”, gdyż wtedy wiele błędów wpływa na znacznie mniejszą liczbę elementów ciała. Ponadto ich gwarancje są „pesymistyczne” – poprawiają każde wystąpienie $(n-k)/2$ błędów, w wielu zastosowaniach błędy zdarzają się losowo i zwykle można poprawić ich o wiele więcej. Ale to temat na inny artykuł...



Spokojnie, to tylko wielomian

Mariusz SKAŁBA*

Niech $f(x) = x^3 - 2x$. Wokół tego prostego wielomianu zogniskują się nasze rozmyślenia na przestrzeni tego artykułu. Najpierw wykażemy, że f traktowany jako funkcja $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ jest iniekcją. Załóżmy nie wprost, że istnieją różne $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ takie, że

$$x_1^3 - 2x_1 = x_2^3 - 2x_2.$$

Przekształcamy powyższą równość:

$$x_1^3 - 2x_1 - x_2^3 + 2x_2 = 0 \iff (x_1^3 - x_2^3) - 2(x_1 - x_2) = 0.$$

Lewą stronę ostatniego wzoru rozkładamy na czynniki:

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2 = 0 \text{ (gdyż } x_1 \neq x_2).$$

Wykażemy teraz, że równanie

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x_1, x_2 . Jeśli $x_1 = a/c, x_2 = b/c$ (gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$) jest takim rozwiązaniem, to możemy założyć od początku, że $\text{NWD}(a, b, c) = 1$. Mamy zatem

$$a^2 + ab + b^2 = 2c^2,$$

skąd wynika natychmiast, że liczby a, b nie mogą być jednocześnie nieparzyste. Otrzymujemy dalej, że obie są parzyste, czyli $a = 2A, b = 2B$, gdzie $A, B \in \mathbb{Z}$.

Równanie przyjmuje postać:

$$4A^2 + 4AB + 4B^2 = 2c^2 \Rightarrow 2A^2 + 2AB + 2B^2 = c^2,$$

zatem również $c = 2C$, gdzie $C \in \mathbb{Z}$. Wychodzi na to, że $\text{NWD}(a, b, c) \geq 2$ – czyli sprzeczność.

Z drugiej strony wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest surjekcją – najprostsze uzasadnienie korzysta z własności Darboux funkcji ciągłych i konstatacji

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Podsumujmy:

- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ jest iniekcją, ale nie jest surjekcją, gdyż np. 2 nie jest postaci $x^3 - 2x$ dla żadnego $x \in \mathbb{Q}$;
- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest surjekcją, ale nie jest iniekcją, gdyż np. $f(\sqrt{2}) = f(0) = 0$.

Wykażemy teraz główny wynik naszego artykułu:

Istnieje $\mathbb{Q} \subset X \subset \mathbb{R}$ taki, że f dane powyższym wzorem jest bijekcją $f: X \rightarrow X$.

Oto dowód. Dla każdej liczby rzeczywistej a rozpatrzmy zbiór $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{R}$.

Jest on niepusty i co najwyżej trójelementowy. Określmy teraz funkcję $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, to z poprzednich rozważań wynika, że ten zbiór jest jednoelementowy; oznaczmy jego jedyny element przez $g(a)$. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, określamy $g(a) := \min(f^{-1}(\{a\}))$. W ten sposób określiliśmy funkcję $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia warunek

$$f(g(a)) = a \text{ dla każdego } a \in \mathbb{R}.$$

Możemy teraz określić docelowy zbiór X :

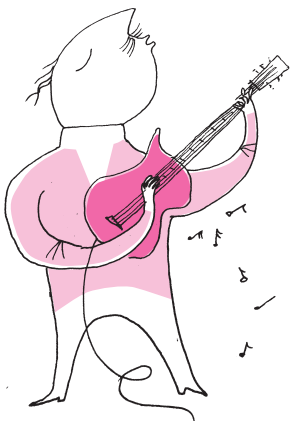
$$X := \bigcup_{k=0}^{\infty} g^k(\mathbb{Q}),$$

gdzie $g^k(\mathbb{Q})$ oznacza obraz zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} przy k -krotnej iteracji funkcji g (przyjmujemy, że $g^0(x) := x$ dla $x \in \mathbb{R}$).

Wykażemy najpierw, że $f(X) \subset X$. Niech więc $x \in X$ i rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $x \in g^k(\mathbb{Q})$ dla pewnego $k > 0$. Wówczas istnieje $w \in \mathbb{Q}$ takie, że $x = g^k(w)$. Mamy

$$f(x) = f(g^k(w)) = f(g(g^{k-1}(w))) = g^{k-1}(w) \in X.$$

W pozostałym przypadku $x \in g^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ mamy też $f(x) \in \mathbb{Q} = g^0(\mathbb{Q}) \subset X$.



Teraz wykażemy, że $f(X) = X$. Niech więc $y \in X$. Zatem $y = g^k(w)$ dla pewnego $k \geq 0$ oraz $w \in \mathbb{Q}$. Połóżmy $x := g(y)$. Wówczas $f(x) = f(g(y)) = y$ oraz $x = g^{k+1}(w) \in X$.

Wreszcie wykażemy, że $f : X \rightarrow X$ jest różnowartościowa. Niech więc $x_1, x_2 \in X$ oraz załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$. Oznaczmy tę wspólną wartość przez a . Możemy napisać

$$x_1 = g^k(w_1), \quad x_2 = g^m(w_2), \quad \text{gdzie } k \geq 0, m \geq 0, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}.$$

Jeżeli obie liczby k, m są dodatnie, to

$$f(x_1) = f(g^k(w_1)) = g^{k-1}(w_1), \quad f(x_2) = f(g^m(w_2)) = g^{m-1}(w_2),$$

czyli $g^{k-1}(w_1) = g^{m-1}(w_2)$. Otrzymujemy stąd

$$x_1 = g^k(w_1) = g(g^{k-1}(w_1)) = g(g^{m-1}(w_2)) = g^m(w_2) = x_2.$$

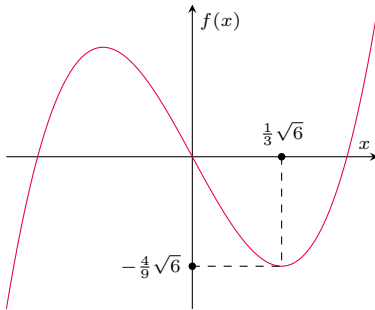
Rozpatrzmy przypadek $k = 0, m > 0$. Teraz $x_1 \in \mathbb{Q}$ oraz

$$f(x_1) = g^{m-1}(w_2).$$

Z określenia funkcji g mamy teraz $x_1 = g(g^{m-1}(w_2))$, czyli $x_1 = x_2$.

W ostatnim przypadku $k = m = 0$ powołujemy się na wykazaną wcześniej różnowartościowość funkcji $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ i otrzymujemy $x_1 = x_2$.

Zajmiemy się na koniec funkcją $g : X \rightarrow X$ pod kątem jej ciągłości w różnych punktach. Jest to funkcja odwrotna do „gładkiej” bijekcji $f : X \rightarrow X$. Faktycznie funkcja $f : X \rightarrow X$ jest ciągła, ale nazwalimy ją „gładką”, gdyż jest obcięciem do X wielomianu trzeciego stopnia! Wykażemy natomiast, że g nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$!



Standardowymi metodami analizy matematycznej można uzasadnić, że $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ jest najmniejszą wartością f na dodatniej półprostej, przyjmowaną dla argumentu $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Łatwo wynika stąd, że dla dowolnego $y \in X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$ istnieją $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ takie, że $x_1 < -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ oraz $x_2 > \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Oczywiście $x_1 < x_2$ oraz $f(x_1) = f(x_2) = y$. Niech teraz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_1 , natomiast $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_2 . Ponieważ f jest wszędzie ciągła, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_1) = y$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_2) = y$. Mamy dalej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_2,$$

czyli, na mocy definicji Heinego, g nie może być ciągła w y .

Wyszło na to, że zwykła bijekcja $f : X \rightarrow X$ ma dość niezwykłą bijekcję odwrotną g – ale moderując zaistniałą sytuację w duchu tytułu, uspokójmy Czytelników: *konstruując funkcję g , nie skorzystaliśmy nawet z pewnika wyboru!*

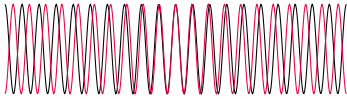
Matematyczny kącik muzyczny IV: O tym, jak przydatne jest dudnienie

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

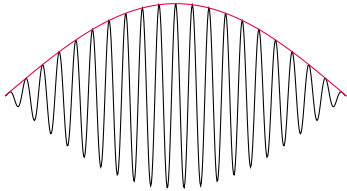
W numerze Δ_{20}^8 omówiliśmy sposoby strojenia instrumentów, jakie ludzkość opracowała na przestrzeni wieków. Ta część problemu jest natury koncepcyjnej i daje się całą opisać na kartce papieru. Ostatecznie jednak chcemy, by stojący obok nas instrument (na przykład fortepian) był nastrojony, a sama kartka papieru zapisana obliczeniami, jak potrzebne by one nie były, nie rozwiąże za nas tego problemu. Żyjemy w czasach, w których dostępne są urządzenia elektroniczne oraz przeróżne aplikacje wspomagające nas w strojeniu instrumentów, najczęściej gitary. Pojawia się pytanie: w jaki sposób radzono sobie w czasach, gdy takich „wspomagaczy” nie było?

Oczywiście muzycy mają statystycznie lepszy słuch i są wrażliwsi na różnice pomiędzy dźwiękami. Dlatego dużo łatwiej jest im zbliżyć się do zgodnego brzmienia. Gdy różnica pomiędzy częstotliwościami obu dźwięków jest jednak niewielka, nawet wprawne ucho może mieć trudności z jej wychyceniem. W tej sytuacji wykorzystuje się tzw. *zjawisko dudnienia*.

* Student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski



Rys. 1. Fale opisane funkcjami φ i ψ



Rys. 2. Fala $\varphi + \psi$ oraz fala o częstotliwości $\frac{|f_1 - f_2|}{2}$ (oznaczona kolorem)

Głosy w organach mają różnorakie stopaże. Stopaż to długość najniższej grającej piszczałki w danym głosie wyrażona w stopach (1 stopa to około 30,5 cm). Głosy ośmiostopowe (8') to głosy, które grają realną wysokość dźwięku, przypisaną do konkretnego klawisza. Głosy 4' grają oktawę wyżej, głosy 2 $\frac{2}{3}$ ' oktawę i kwintę wyżej, a głosy 16' oktawę niżej.

Rozważmy dwie fale opisane funkcjami $\varphi(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, $\psi(t) = \cos(2\pi f_2 t)$ z jednakową amplitudą jednostkową oraz małą różnicą częstotliwości. Wówczas brzmiąc razem, fale te nakładają się i tworzą falę

$$\varphi(t) + \psi(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right).$$

Ludzkie ucho odbiera to jako dźwięk o częstotliwości $\frac{f_1 + f_2}{2}$, który *dudni*, czyli jest na przemian głośny i cichy. Jest tak dlatego, że częstotliwość $\frac{|f_1 - f_2|}{2}$ jest bardzo mała i wchodzi w zakres infradźwięków.

Prosty stąd wniosek – im mniejsza różnica pomiędzy częstotliwościami dźwięków, tym rzadsze są dudnienia. Celem stroiciela jest zatem takie regulowanie wysokości jednego z dźwięków, by ostatecznie dudnienia się pozbyć, a im rzadziej dudnienia słyszy, tym bliżej jest tego celu.

Tak stroi się chociażby organy – do każdego klawisza przypisane są liczne piszczałki, każda charakteryzująca się osobną barwą. Zbiór piszczałek o tej samej barwie nazywamy *glosem organowym*. Chcąc więc nastroić jeden z głosów, porównuje się go z innym, korygując wysokości dźwięków piszczałek w podany powyżej sposób.

Posługując się dudnieniem, wykorzystuje się też inne ważne zjawisko – alikwoty (omówione pokrótce w odcinku w Δ_{20}^7). Jako że dźwięki znajdujące się w interwale kwinty czystej mają wspólny alikwot (trzeci niższego dźwięku pokrywa się z drugim wyższego), strojenie takiego interwału polega na wyeliminowaniu dudnienia spowodowanego różnicą pomiędzy ww. alikwotami. W analogiczny sposób stroi się interwały oktawy czystej i tercji wielkiej, jako naturalnie występujące w szeregu alikwotowym. Dzięki temu zjawisko dudnienia można wykorzystać do strojenia instrumentów smyczkowych, fortepianu oraz alikwotowych głosów w organach.

Przy strojeniu w systemie równomiernie temperowanym taktyka jest trochę inna – celem nie jest całkowite wyeliminowanie dudnienia, ale nadanie mu odpowiedniej częstotliwości. Rozważmy dźwięki $a^1 = 440 \text{ Hz}$ oraz $e^2 = 659,255 \text{ Hz} = (\sqrt[12]{2})^7 \cdot 440 \text{ Hz}$. (O tym, skąd wziął się $\sqrt[12]{2}$, można przeczytać w Δ_{20}^8 .) Trzeci alikwot dźwięku a^1 to $e_{a^1}^3 = 440 \text{ Hz} \cdot 3 = 1320 \text{ Hz}$, natomiast drugi alikwot dźwięku e^2 to $e_{e^2}^2 = 659,255 \text{ Hz} \cdot 2 = 1318,51 \text{ Hz}$. Wobec tego wzmocnienia fali będą pojawiać się co $\frac{1}{1320 - 1318,51} = 0,67$ sekundy. Należy oczywiście zadbać dodatkowo o to, by różnica dźwięków była „w dobrą stronę”.

Korektę naprężenia struny w gitarze, skrzypcach czy fortepianie bardzo łatwo sobie wyobrazić. W instrumentach dętych strojenie (do fortepianu lub orkiestry) polega na zmianie długości piszczałki, czyli wysunięciu lub wsunięciu ruchomej części, w którą się dmie – w przypadku fletu poprzecznego jest to główka, a w przypadku oboju czy fagotu – stroik.

Jak jednak stroi się organy, które przecież też są instrumentem dętym? Techniki są przeróżne. Piszczałka może mieć na samej górze z tyłu wycięty mały pasek, który można odginać na zewnątrz lub do wewnątrz, co przypomina otwieranie i zamykanie konserwy. Podobnie, piszczałka może być przykryta u góry i ten „daszek” można delikatnie odginać. Innym sposobem jest poszerzenie lub zwężanie średnicy piszczałki u jej wylotu – do tego celu stosuje się stożek, który albo nakłada się na piszczałkę jak czapeczkę, zwężając wylot, albo czubkiem do wewnątrz, by wylot poszerzyć. Odwinięcie części piszczałki oraz poszerzenie wylotu skutkują podwyższeniem dźwięku, a operacje odwrotne – jego obniżeniem. W przypadku tzw. głosów językowych, czyli takich, których dźwięk powstaje wskutek drgań cieniutkiej blaszki znajdującej się wewnątrz piszczałki (tzw. języka), strojenie polega na korekcie długości tej blaszki.

Ot i nastrojone. Gdyby jednak coś poszło nie tak, albo coś się rozstroiło w trakcie gry, niektórzy instrumentalisci – jak na przykład skrzypkowie – mogą sobie jeszcze poradzić na bieżąco. W przypadku skrzypków będzie to przyciskanie struny w lekko przesuniętych miejscach.

Od dekad prowadzone są badania nad kondensatem Bosego–Einsteina – fazą materii wytwarzaną w temperaturach rzędu 100 nanokelwinów. Mimo że układ przechodzi już w fazę zastosowań, nagle okazał się bardziej tajemniczy, niż sądzono.

Prawie 100 lat temu Albert Einstein, posiłkując się spostrzeżeniami hinduskiego fizyka Satyendra Bosego, przewidział zjawisko zwane dzisiaj kondensacją Bosego–Einsteina. W ekstremalnych warunkach – temperaturach miliardy razy niższych niż temperatura pokojowa, w gazach o gęstościach setki tysięcy razy mniejszych niż gęstość powietrza wokół nas, nagle większość atomów zatrzymuje się. Jest to nagle przejście, jak zamiana wody w lód. W tej fazie ujawnia się falowa natura materii. Na przykład obserwuje się interferencję atomów – dwie chmury gazu będące kondensatami Bosego–Einsteina po nałożeniu na siebie tworzą prążki interferencyjne, dokładnie tak samo jak światło.

Kondensat Bosego–Einsteina otrzymano w laboratoriach 70 lat po przewidywaniach Alberta Einsteina. Za osiągnięcia towarzyszące tym obserwacjom przyznano około 10 nagród Nobla. Obecnie kondensat jest wytwarzany rutynowo w setkach laboratoriów na świecie. Eksperymenty z kondensatem wykonuje się nawet w przestrzeni kosmicznej, na pokładach rakiet, wykorzystując go w miernikach pola grawitacyjnego. Trwają badania nad wdrożeniem kondensatu w futurystycznych urządzeniach: w komputerach kwantowych, symulatorach kwantowych, magnetometrach i nowych generacjach zegarów atomowych. Oczekuje się, że dzięki wykorzystaniu subtelných efektów kwantowych nowe technologie prześcigną te obecnie stosowane.

Wydaje się więc, że jest to dobrze poznana i w pełni kontrolowana faza materii, opuszczająca powoli poletko badań podstawowych na rzecz inżynierii. Nic bardziej mylnego! Właśnie w dość rutynowym eksperymencie wykonanym pięć lat temu w Stuttgarcie w grupie prof. Tilmana Pfau pojawił się wynik nieoczekiwany. Eksperyment polegał na zmianie oddziaływań (tak, tak – w kondensatach można nawet regulować siłę, z jaką atomy się odpychają bądź przyciągają!), tak aby gaz przez przyciąganie między atomami skurczył się, a następnie eksplodował jak supernowa. Eksperyment był powtórzeniem doświadczeń sprzed 15 lat i miał na celu dokładniejsze zbadanie wzbudzeń, np. drgań, jakie przy okazji są wywołane w kondensacie. Jednak kondensat ani zbyt szybko się skurczył, ani nie eksplodował. Zamiast tego samoistnie rozdzielił się na... No właśnie, nie wiedziano, na co. Były to regularnie rozłożone skupiska atomów, w warunkach, w których gaz nie powinien być stabilny. Przez kilkanaście miesięcy publikowano sprzeczne wyjaśnienia tego zjawiska. Ostatecznie zrozumiano, że jest to inna, nowa faza materii, nazywana obecnie kroplami kwantowymi. Rzeczywiście bardziej przypomina ciecz niż gaz. Stabilność wynika ze słabych korelacji między nimi, spowodowanych zderzeniami między atomami, które dotychczas, jako efekty słabe, były pomijane w modelach teoretycznych. Okazało się, że te pomijane efekty stają się dominujące w opisie dynamiki kondensatu na granicy jego stabilności.

Ostatnie miesiące przyniosły kolejny zwrot akcji. Na granicy między fazą kropli kwantowych a kondensatu Bosego–Einsteina zaobserwowano tzw. *supersolid*. Chmura atomów w tym stanie ma zarówno własności kryształu, jak i kwantowej cieczy. W każdej pojedynczej obserwacji atomy tworzą regularnie rozłożone skupiska, jak węzły sieci krystalicznej. Z drugiej strony ciągle zachodzi interferencja między chmurami w tym stanie. Pośrednio wykazano, że taki gaz może płynąć, nie doświadczając tarcia, jak w fazie nadciekłej. Właściwości te zostały zaobserwowane w trzech różnych laboratoriach w odstępie zaledwie kilku miesięcy!

Bez wątplenia badania nad kondensatem Bosego–Einsteina przechodzą renesans. Rozwój technik doświadczalnych sprzyja zarówno wdrożeniom kondensatu do technologii, jak i wytwarzaniu kolejnych faz w ultrazimnych gazach atomowych. Czekamy na dalsze niespodzianki!



Rozwiązanie zadania M 1668.

Zauważmy, że f przyjmuje wartości parzyste dla nieparzystych argumentów. Natomiast biorąc liczbę parzystą postaci $2^k a$, gdzie $k \geq 1$ i $2 \nmid a$, widzimy, że

$$2^k a \xrightarrow{f} 2^{k-1} \cdot 3a \xrightarrow{f} 2^{k-2} \cdot 3^2 a \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} 3^k a.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla dowolnego n z dowolnej liczb całkowitej dodatniej iterując f , otrzymamy nieparzystą liczbę podzielną przez 3^n . Pierwszy krok indukcji został zrobiony wyżej, gdzie z dowolnej liczby uzyskaliśmy liczbę nieparzystą podzielną przez 3. Przypuśćmy, że iterując f , uzyskaliśmy liczbę postaci $3^n a$, gdzie a jest liczbą nieparzystą. Wtedy

$$3^n a \xrightarrow{f} 2^2 \cdot 3^{n-1} a \xrightarrow{f} 2 \cdot 3^n a \xrightarrow{f} 3^{n+1} a,$$

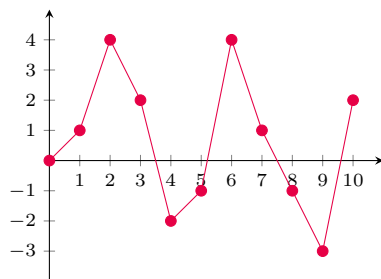
co kończy dowód indukcyjny.

Twierdzenie Sparre–Andersena

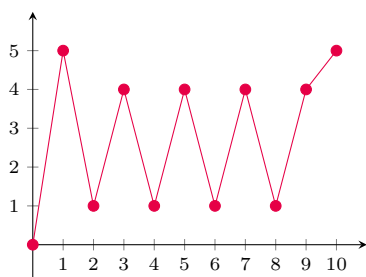
Łukasz RAJKOWSKI

W pewnej szkole w Symulandii każde z 1000 uczęszczających do niej dzieci dostało takie oto zadanie domowe: Trzeba rzucić 10 razy kostką sześcienną. W zależności od wyniku dziecko ma oddać lub pobrać od swoich rodziców kwotę określoną przez następującą tabelkę (ujemne kwoty oznaczają obowiązek oddania pieniędzy rodzicom):

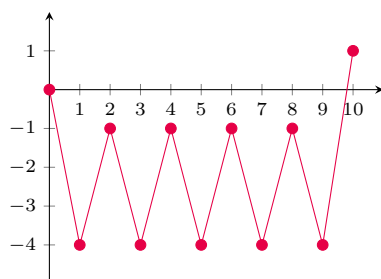
liczba oczek	1	2	3	4	5	6
wypłata	-4	-3	-2	1	3	5



Rys. 1. Przy takim przebiegu rozgrywki mamy $D = 6$ i $L = 2$



Rys. 2. Przy takim przebiegu rozgrywki mamy $D = 10$ i $L = 1$



Rys. 3. Przy takim przebiegu rozgrywki mamy $D = 1$ i $L = 10$

Następnie dzieci miały narysować wykres zależności stanu swojego konta od liczby rzutów (uwzględniając stan konta 0 w „zerowym rzucie”) i na jego podstawie stwierdzić, ile rzutów kończyło się dodatnim stanem konta (co oznaczmy przez D) oraz po którym rzucie stan konta po raz pierwszy osiągnął największą wartość (co oznaczmy przez L). Rysunek 1 przedstawia przykładowy przebieg. Na pierwszy rzut oka wartości D i L nie są specjalnie związane – łatwo skonstruować przykłady, gdzie jedna z nich jest duża, a druga mała (rys. 2 i rys. 3). Gdy jednak dyrektor szkoły opublikował podsumowanie wyników pracy domowej, uwagę wszystkich zwróciła poniższa tabelka, przedstawiająca liczby uczniów, którzy uzyskali poszczególne wartości D (pierwszy wiersz) oraz poszczególne wartości L (drugi wiersz).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	188	101	71	66	70	58	60	67	67	93	159
L	188	103	63	81	61	58	62	75	71	81	157

To, że tyle samo uczniów uzyskało wartości D i L równe 0, nie jest w ogóle zaskakujące – łatwo przekonać się, że byli to po prostu ci sami uczniowie. Dla pozostałych wartości D i L liczby uczniów, którzy je uzyskali, wydają się zaskakująco bliskie, choć przedstawione wcześniej przykłady pokazywały, że jeden uczeń mógł uzyskać istotnie różne wartości D i L . Dyrektor szkoły doniósł o swoim odkryciu premierowi Symulandii, który – poruszony tym nieoczekiwanym związkiem – zarządził ogólnokrajowy eksperyment. Każdy z 10^6 obywateli miał przeprowadzić to samo doświadczenie i przesłać uzyskane wyniki pocztą do Ministerstwa Liczenia. Pracujący tam urzędnicy skrupulatnie policzyli wszystkie wyniki i wyprodukowali tabelkę analogiczną do poprzedniej, z tą różnicą, że przedstawiała ona procentowy udział poszczególnych wyników w całej populacji, zaokrąglony do dziesiątych części procenta.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	19,5%	10,3%	7,8%	6,6%	6,2%	6,0%	6,1%	6,4%	6,9%	8,3%	15,9%
L	19,5%	10,3%	7,8%	6,6%	6,2%	6,0%	6,1%	6,4%	6,9%	8,3%	15,9%

Kto jak kto, ale mieszkańcy Symulandii wiedzieli, że w tej sytuacji nie może być mowy o żadnym przypadku. Najwyraźniej prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych wartości przez zmienne D i L są równe! Zależność ta utrzymywała się w kolejnych eksperymentach, z różnymi wypłatami oraz kośćmi, które nie były dobrze wyważone. Symulandcy uczeni prędko znaleźli uzasadnienie tej własności, które oparte jest na pewnym kombinatorycznym twierdzeniu. Zanim je sformułujemy, wprowadzimy kilka oznaczeń.

Niech $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Ustawieniem \mathbf{x} nazwiemy dowolny ciąg $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, gdzie σ jest pewną permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Subtelna różnica między ustawieniami a permutacjami polega na tym, że ponieważ wyrazy ciągu \mathbf{x} mogą się powtarzać, ustawień tego ciągu może być mniej niż $n!$. W szczególności ciąg stały ma tylko jedno ustawienie. Niech $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_n)$ będzie ciągiem sum częściowych \mathbf{x} ,

Dla ciągu $\mathbf{x} = (1, 3, -2, -4, 1, 5, -3, -2, -2, 5)$ (którego sumy częściowe zostały zilustrowane na rysunku 1) kolejne kroki algorytmu przedstawia poniższa tabelka. W lewej kolumnie wypisana jest postać ciągu bazowego przed wykonaniem danego kroku, w środku suma tego ciągu bazowego, a w prawej kolumnie wartość dodawana na początku ciągu tworzonego po wykonaniu tego kroku.

ciąg bazowy	Σ	+
1, 3, -2, -4, 1, 5, -3, -2, -2, 5	2	1
3, -2, -4, 1, 5, -3, -2, -2, 5	1	3
-2, -4, 1, 5, -3, -2, -2, 5	-2	5
-2, -4, 1, 5, -3, -2, -2	-7	-2
-2, -4, 1, 5, -3, -2	-5	-2
-2, -4, 1, 5, -3	-3	-3
-2, -4, 1, 5	0	5
-2, -4, 1	-5	1
-2, -4	-6	-4
-2	-2	-2

W tej sytuacji $\mathbf{x}' = (-2, -4, 1, 5, -3, -2, -2, 5, 3, 1)$.
Mamy wówczas $\mathbf{s}' = (0, -2, -6, -5, 0, -3, -5, -7, -2, 1, 2)$,
zatem $D_{\mathbf{x}'} = 2 = L_{\mathbf{x}}$.

tzn. $s_0 = 0$ i $s_k = \sum_{i=1}^k x_i$ dla $1 \leq k \leq n$. Niech $D_{\mathbf{x}}$ oznacza liczbę dodatnich wyrazów w ciągu \mathbf{s} oraz niech $L_{\mathbf{x}}$ będzie najmniejszym indeksem w ciągu \mathbf{s} , dla którego przyjmuje on największą wartość. Okazuje się, że dla każdego ciągu \mathbf{x} możemy znaleźć jego ustawienie \mathbf{x}' tak, aby $L_{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{x}'}$.

Twierdzenie. *Istnieje taka bijekcja $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, że dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ciąg $\mathbf{x}' = \Psi(\mathbf{x})$ jest ustawieniem \mathbf{x} oraz $L_{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{x}'}$.*

Dowód. Wybierzmy dowolnie ciąg $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ciąg \mathbf{x}' tworzymy zgodnie z następującą procedurą. Na początku naszym „ciągiem bazowym” jest \mathbf{x} , a „ciągiem tworzonym” jest ciąg pusty. W każdym kroku procedury patrzmy na sumę wszystkich wyrazów obecnego ciągu bazowego – jeśli jest ona dodatnia, zabieramy z niego pierwszy wyraz, w przeciwnym wypadku wyraz ostatni. Zabraną wyraz wstawiamy na początek ciągu tworzonego. Dla przykładu, w przypadku przedstawionym na marginesie, w szóstym kroku ciągiem bazowym jest $(-2, -4, 1, 5, -3)$. Suma jego wyrazów to -3 , zatem zabieramy z niego ostatni wyraz i dokładamy do ciągu tworzonego, którym po wykonaniu tego kroku jest $(-3, -2, -2, 5, 3, 1)$.

Postulowany w twierdzeniu ciąg \mathbf{x}' to ciąg utworzony po n krokach opisanej procedury. Oczywiście \mathbf{x}' jest ustawieniem ciągu \mathbf{x} . Niech \mathbf{s} i \mathbf{s}' będą ciągami sum częściowych ciągów odpowiednio \mathbf{x} i \mathbf{x}' . Za pomocą prostej indukcji możemy uzasadnić, że suma wyrazów k -tego ciągu bazowego to s'_{n-k+1} (pamiętajmy, że wyrazy zabierane z ciągów bazowych przechodzą na początek ciągu tworzonego). W tej sytuacji liczba dodatnich wyrazów ciągu \mathbf{s}' (czyli $D_{\mathbf{x}'}$) to liczba etapów konstrukcji, w których suma ciągu bazowego była dodatnia. Pokażemy teraz, że ta liczba jest równa $L_{\mathbf{x}}$.

Załóżmy, że $L_{\mathbf{x}} = l$, tzn. maksimum ciągu sum częściowych \mathbf{s} pojawia się po raz pierwszy na indeksie l . Zwróćmy uwagę, że zmiany w ciągu bazowym mają „gąsienicowy” charakter, tzn. zawsze zabieramy któryś z dwóch jego krańcowych wyrazów. Uzasadnimy, że wyrazy x_i dla $i \leq l$ są zabierane z ciągu bazowego tylko „z lewej strony”, a wyrazy x_i dla $i > l$ tylko „z prawej strony”. Wynika to z poniższych dwóch obserwacji:

- jeśli ciąg bazowy zaczyna się od x_{l+1} , to jego suma jest niedodatnia, gdyż $\sum_{i=l+1}^{l+m} x_i = s_{l+m} - s_l \leq 0$, więc w takim wypadku będziemy już czerpać tylko „z prawej strony” ciągu bazowego.
- jeśli ciąg bazowy kończy się na x_l , to jego suma jest dodatnia, gdyż $\sum_{i=l-m}^l x_i = s_l - s_{l-m} > 0$, więc wtedy będziemy już czerpać tylko „z lewej strony” ciągu bazowego.

W tej sytuacji dokładnie l razy czerpiemy „z lewej strony” ciągu bazowego, zatem tyle razy ma on dodatnią sumę. Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami oznacza to, że $D_{\mathbf{x}'} = l$. Pozostaje uzasadnić, że przekształcenie Ψ faktycznie jest bijekcją, co wynika z istnienia „procedury odwrotnej”, której nietrudną konstrukcję pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Jaki jest związek przedstawionego twierdzenia z niesamowitym zjawiskiem zaobserwowanym w Symulandii? Możemy w tym wypadku utożsamiać zdarzenia elementarne z ciągami wyników kolejnych gier. Jeśli $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10})$ jest pewnym takim ciągiem, to każde ustawienie tego ciągu ma to samo prawdopodobieństwo wystąpienia. W związku z tym, na mocy naszego twierdzenia, zdarzenia elementarne ze zbioru $\{D = d\} = \{\mathbf{x}: D_{\mathbf{x}} = d\}$ (dla pewnej ustalonej wartości d) są połączone we wzajemnie jednoznaczne pary ze zdarzeniami elementarnymi (o tym samym prawdopodobieństwie) ze zbioru $\{L = d\} = \{\mathbf{x}: L_{\mathbf{x}} = d\}$. Oznacza to, że prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych wartości przez zmienne D i L faktycznie są równe, tak jak sugerowały to badania przeprowadzone w Symulandii.

Czytelnicy trochę bardziej obcy z rachunkiem prawdopodobieństwa bez trudu zauważą, że przedstawione rozumowanie może być zastosowane dla dowolnych zmiennych losowych (nie tylko tych o rozkładzie dyskretnym), a także, że dowodzi ono tak naprawdę równości rozkładów wektorów losowych (D, S) i (L, S) , gdzie S jest sumą wszystkich wypłat. Obserwacja ta nosi nazwę twierdzenia Sparre–Andersena, które w pełnym brzmieniu przytaczamy poniżej.

Twierdzenie (Sparre–Andersen). *Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Niech $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ dla $1 \leq k \leq n$ oraz*

$$D = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{S_i > 0\}}, \quad L = \min\{0 \leq i \leq n: S_i = \max_{0 \leq j \leq n} S_j\}.$$

Wówczas wektory losowe (D, S) i (L, S) mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa.



O przybliżaniu uławkami

Wojciech CZERWIŃSKI

Jak dobrze można przybliżyć uławkami liczbę rzeczywistą, na przykład liczbę π ? Większość Czytelników zapewne wie, że można znaleźć ułamki (lub inaczej mówiąc liczby wymierne) dowolnie bliskie liczbie π . Takie coraz lepiej przybliżające ułamki to na przykład: $\frac{3}{1}$, $\frac{31}{10}$, $\frac{314}{100}$, $\frac{3141}{1000}$, $\frac{31415}{10000}$ itd. Nietrudno zauważyć, że tak samo można łatwo przybliżyć liczbę $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, e i dowolną inną liczbę rzeczywistą. Tę własność liczb wymiernych nazywa się *gęstością*. Istotnie, oznacza ona, że liczby wymierne są tak gęsto rozłożone wśród rzeczywistych, że wszędzie ich pełno – dowolną liczbę rzeczywistą można dowolnie dobrze przybliżyć.

Co jednak się stanie, jeśli zapytamy o przybliżanie uławkami o mianownikach ograniczonych przez pewną liczbę? Przykładowo – jak dobrze można przybliżyć liczbę π przez ułamki o mianowniku co najwyżej 1000? Czy da się to zrobić z dokładnością lepszą niż $\frac{1}{1000}$? Okazuje się, że tak! Znajdzie się wśród nich taki, który przybliży π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Jednak w ogólności nie da się tego zrobić o wiele lepiej, o czym za chwilę. Co więcej, ta gałąź matematyki jest intensywnie badana, zawiera wiele głębokich rezultatów i jeszcze więcej od lat otwartych problemów. Wiąże się też zadziwiająco z wieloma pozornie niezwiązanymi dziedzinami. Ja osobiście trafiłem na nią poprzez moje badania naukowe dotyczące problemu dodawania wektorów, które opisywałem w Δ_{20}^{11} . Ten kierunek naprowadził mnie na rozważania nad liniowymi ciągami rekurencyjnymi, czyli ciągami będącymi w pewnym sensie uogólnieniem sławnego ciągu Fibonacciego. Okazuje się, że niektóre problemy dla liniowych ciągów rekurencyjnych wiążą się mocno z przybliżaniem liczb rzeczywistych liczbami pewnej specyficznej postaci (konkretnie liczbami algebraicznymi, które można uznać za uogólnienie uławków).

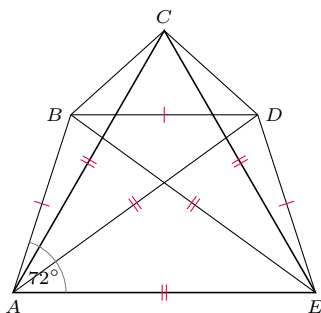
Liczba rzeczywista jest algebraiczna, gdy jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Wróćmy jednak do tematu. Powyżej wspomniałem, że liczbę π można przybliżyć z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ ułamkiem o mianowniku wynoszącym co najwyżej 1000. Jest to przypadek szczególny twierdzenia Dirichleta o aproksymacji, które sformułujemy w następującej wersji:

Twierdzenie 1 (Dirichleta). *Dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej $x \in \mathbb{R}^+$ oraz liczby naturalnej $N \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby naturalne $p, q \in \mathbb{N}$, że $q \leq N$ oraz $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$.*



Rozwiązanie zadania M 1666. Istnieje. Rozpatrzmy trójkąt równoboczny ACE oraz taki trapez $ABDC$, że $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $AD = BE = AE$ (patrz rysunek).



Wtedy też $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $\sphericalangle EAD = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Zatem $\sphericalangle BDA = \sphericalangle EAD = 36^\circ$ oraz $\sphericalangle DAB = 72^\circ - 36^\circ$, więc $AB = BD$. Łatwo zauważyć, że pięciokąt wypukły $ABCDE$ spełnia warunki zadania.

Równie dobrze moglibyśmy sformułować to twierdzenie dla dowolnej liczby rzeczywistej (niekoniecznie dodatniej), ale wtedy musielibyśmy brać pod uwagę $p, q \in \mathbb{Z}$, które mogą być ujemne. Stąd dla uproszczenia kwestii technicznych skupimy się na liczbach dodatnich. Dowód jest wyjątkowo prosty i korzysta z zasady szufladkowej Dirichleta, która była właśnie przez Petera Dirichleta spopularyzowana, i stąd jej polska nazwa (po angielsku nazywa się *pigeonhole principle*, gdzie *pigeonhole* oznacza przegródkę na dokumenty).

Dowód. Oczywiście nierówność $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$ jest równoważna tej samej nierówności pomnożonej stronami przez q , czyli $|qx - p| < \frac{1}{N}$. Skupimy się na dowodzeniu tej ostatniej. A zatem tak naprawdę chcemy pokazać, że istnieje taka wielokrotność qx liczby x , gdzie $q \leq N$, że qx jest odległe od liczby całkowitej nie więcej niż o $\frac{1}{N}$. Rozważmy liczby $0, x, 2x, 3x, \dots, (N-1)x, Nx$ i ich części ułamkowe. Tych części ułamkowych jest $n+1$ i wszystkie należą do przedziału $[0, 1)$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwie z nich wpadną do tego samego spośród N przedziałów $[0, \frac{1}{N}), [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}), \dots, [\frac{N-1}{N}, 1)$. Jeśli części ułamkowe ix oraz jx wpadają do tego samego przedziału dla pewnych $i, j \in \{0, \dots, N\}$, $i < j$, to mamy $-\frac{1}{N} < (j-i)x - p < \frac{1}{N}$, a co za tym idzie $|(j-i)x - p| < \frac{1}{N}$ dla pewnej liczby $p \in \mathbb{N}$. Kładąc $q = j - i$, kończymy dowód. \square

Zauważmy, że powyższy dowód jest niekonstruktywny w tym sensie, że nie bardzo widać, jak znaleźć ułamek przybliżający π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ inaczej niż naiwnie. Można oczywiście przeglądać wszystkie wielokrotności π , tzn. $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, 1000\pi$, i badać ich części ułamkowe bądź też przeglądać wszystkie możliwe ułamki o mianownikach ograniczonych przez 1000, ale te sposoby są mało efektywne. Okazuje się jednak, że ma miejsce bardzo ciekawy fakt: najlepsze takie przybliżenia uzyskujemy, rozwijając przybliżaną liczbę w ułamek łańcuchowy. O tym fenomenie pisaliśmy w Δ_{18}^7 , tutaj niestety nie ma miejsca, żeby choć pokrótce wyjaśnić, skąd się to bierze. Niemniej jednak bardzo zachęcam Czytelników do zgłębienia tego zaskakującego faktu. Jako ciekawostkę możemy pokazać, jak korzystając z ułamków łańcuchowych, znaleźć dobre przybliżenie liczby π . Największą liczbą naturalną przybliżającą π od dołu jest 3, więc nasz ułamek będzie postaci $3 + \frac{1}{x}$, natomiast $\pi = 3 + (\pi - 3)$. Warto zatem zrozumieć, ile wynosi $\frac{1}{\pi-3}$, aby wiedzieć, co ma przybliżać x . Łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{\pi-3} \approx 7,062$, więc warto wziąć $x = 7$. Wówczas ułamek łańcuchowy $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3,14285\dots$ już dość dobrze przybliża π , ale możemy iść dalej. Niech więc $x = 7 + \frac{1}{y}$, wówczas nasze przybliżenie będzie postaci $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{y}}$. Żeby zobaczyć, co ma przybliżać y , obliczmy, że $\frac{1}{\frac{1}{\pi-3}-7} \approx 15,9966$. A zatem świetnym przybliżeniem π powinno być $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} \approx 3,1415094\dots$ Idąc tym tropem, uzyskalibyśmy następne przybliżenie równe $\frac{355}{113} \approx 3,141592920\dots$ To już ostatnie przybliżenie o mianowniku mniejszym niż 1000 i faktycznie, jak widzimy, przybliża ono π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Potem oczywiście dostalibyśmy jeszcze lepsze przybliżenia π , ale tu się zatrzymajmy.

Zauważmy, że twierdzenie Dirichleta łatwo implikuje następujący wniosek:

Wniosek. Dla każdej niewymierniej liczby rzeczywistej dodatniej $x \in \mathbb{R}^+$ istnieje nieskończenie wiele takich ułamków $\frac{p}{q}$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Istotnie, wyobraźmy sobie, że mamy już skończenie wiele takich przybliżeń, i chcemy znaleźć kolejne. Ponieważ liczba x jest niewymierna, to każde przybliżenie ma pewien błąd, istnieje więc też najlepsze dotychczas znalezione przybliżenie. Niech najlepsze z dotychczasowych przybliżeń będzie gorsze niż $\frac{1}{N}$ dla pewnego N . Z twierdzenia Dirichleta otrzymujemy, że istnieje taki ułamek $\frac{p}{q}$ dla $q \leq N$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{N}$, a więc ułamek ten nie jest żadnym z dotychczasowych. Ponadto $1/(qN) < 1/q^2$, zatem faktycznie dostajemy nowe przybliżenie. Kontynuując w ten sposób, możemy ich dostać nieskończenie wiele.

Bardzo naturalne jest pytanie, czy we wniosku nie dałoby się poprawić liczby 2 w wykładniku. Może można uzyskiwać przybliżenia z dokładnością do $\frac{1}{q^3}$, albo przynajmniej do $\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Okazuje się jednak, że nie, że liczba 2 jest optymalna, i stosunkowo łatwo to pokazać. Rozważmy wykładnik $C \in \mathbb{R}$ i przybliżanie liczb $x \in [0, 1]$. Zobaczymy, ile liczb może być przybliżonych ułamkiem $\frac{p}{q}$ z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$. Będą to ułamki w przedziale $[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^C}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^C}]$, a więc w przedziale o długości $2\frac{1}{q^C}$. Takich ułamków o mianowniku q w przedziale $[0, 1]$ jest co najwyżej $q + 1$, a więc długość przedziałów liczb przybliżanych dobrze (z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$) przez te ułamki to co najwyżej $2(q + 1)\frac{1}{q^C} \leq 4q\frac{1}{q^C} = \frac{4}{q^{C-1}}$. Jeśli każda liczba niewymierna z przedziału $[0, 1]$ miałyby być dobrze przybliżona nieskończenie wiele razy, to suma długości przedziałów dobrze przybliżanych przez ułamki o mianowniku q przesumowana po wszystkich możliwych $q \in \mathbb{N}$ musiałaby być nieskończona. Mamy jednak $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{4}{q^{C-1}} < \infty$ dla $C > 2$, co pokazuje, że nie każda liczba rzeczywista da się dobrze przybliżać ułamkami, gdzie przez dobrze rozumiemy przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$ dla $C > 2$.

Można jednak powiedzieć: zgoda, nie każda liczba da się dobrze przybliżyć dla $C > 2$, ale jednak pewne liczby dadzą się dobrze przybliżyć. Przykładowo



Rozwiązanie zadania F 1019.

Postać zależności częstoty drgań struny od jej masy, długości i naciągu najłatwiej znaleźć, posługując się analizą wymiarową. Przyjmujemy, że:

$$f \propto l^\alpha m^\beta F^\gamma,$$

gdzie symbol \propto oznacza proporcjonalność. Wymiar wyrażenia po prawej stronie proporcjonalności musi być równy wymiarowi częstoty, $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$ – symbol $[\cdot]$ oznacza tu „pobranie” wymiaru wielkości w nawiasie kwadratowym. Wypiszmy wymiary wielkości po prawej stronie: $[l] = 1 \text{ m}$, $[m] = 1 \text{ kg}$, $[F] = 1 \text{ N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Każda z jednostek, po obu stronach proporcjonalności, musi występować w tej samej potędze. Warunek ten prowadzi do układu równań:

$$\begin{aligned} -2\gamma &= -1, \\ \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu są: $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy zależność:

$$f \propto \sqrt{\frac{Fl}{m}}.$$

Jak widać, właściwości materiału, z jakiego wykonana jest struna, nie mają znaczenia dla wysokości jej tonu podstawowego. Rodzaj materiału ma natomiast wpływ na barwę dźwięku (proporcje nateżeń wyższych składowych) i komfort gry palcami, np. na gitarze. Ma także wpływ na siłę naciągu dla tego samego tonu – stal wymaga większej siły niż nylon i stąd struny nylonowe montuje się często do starych instrumentów.



Rozwiązanie zadania F 1020.

Jeśli orbita pozostaje przez cały czas bardzo bliska orbicie kołowej, to znaczy, że w każdym punkcie toru promień wodzący jest z dobrym przybliżeniem prostopadły do chwilowej prędkości v satelity, i możemy rozpatrywać równowagę sił jak dla orbity kołowej (siła F jest bardzo mała w porównaniu z siłą grawitacji). Niech satelita ma masę m . Oznaczmy iloczyn stałej grawitacyjnej G i masy Ziemi M jako $\gamma = GM$. Dla orbity kołowej zachodzi związek:

$$\frac{\gamma m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Otrzymujemy zależność:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}.$$

Energia całkowita wynosi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma m}{r} = -\frac{\gamma m}{2r}.$$

Energia całkowita maleje pod wpływem działania siły $F = -A v^\alpha$ z szybkością równą mocy $F \cdot v = -A v^{\alpha+1}$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma m}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -A \left(\frac{\gamma}{r}\right)^{(\alpha+1)/2}.$$

Ostatecznie szukana prędkość zmiany odległości od Ziemi wynosi:

$$\frac{dr}{dt} = -2 \frac{A}{m} \gamma^{(\alpha-1)/2} r^{(3-\alpha)/2}.$$

Dla $\alpha = 3$ prędkość zbliżania się do Ziemi byłaby stała. Należy jednak pamiętać, że wraz ze zmniejszaniem się r rośnie gęstość atmosfery, a więc nawet przy zachowaniu postaci zależności F od v powinniśmy do naszego modelu wprowadzić zależność współczynnika A od r .

liczby wymierne przybliżane są idealnie przez liczby wymierne (liczba przybliża idealnie samą siebie). Wiadomo też, że istnieją liczby niewymierne, które są bardzo dobrze przybliżane liczbami wymiernymi. W 1840 roku francuski matematyk Joseph Liouville'a podał prosty przykład takiej liczby, zwanej teraz stałą Liouvillea. Zdefiniował on

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,11000100000000 \dots$$

W liczbie L , w rozwinięciu dziesiętnym jedynek stoją na pozycjach $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ itd. po przecinku. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$, gdy weźmiemy $m = k!$ i obetniemy rozwinięcie L na m -tej cyfrze po przecinku (która to jest jedynką), to potem następuje $(k+1)! - k! - 1 = k \cdot k! - 1$ zer. A zatem to obcięcie jest bardzo dobrym przybliżeniem L , ułamkiem o mianowniku 10^m przybliżającym L z dokładnością przynajmniej $(\frac{1}{10^m})^k$. Widać więc, że L może być przybliżone z dokładnością do $\frac{1}{q^k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ nieskończenie wiele razy (obcięciem po k -tej jedynce, $(k+1)$ -szej jedynce, $(k+2)$ -giej jedynce itd.). Co ciekawe, w 1844 roku Liouville wykazał, korzystając właśnie z własności dobrego przybliżania, że L jest liczbą przestępną (inaczej niealgebraiczną), czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych (jak np. $\sqrt[3]{7}$ czy $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Była to w ogóle pierwsza liczba, dla której udało się wykazać, że jest przestępna.

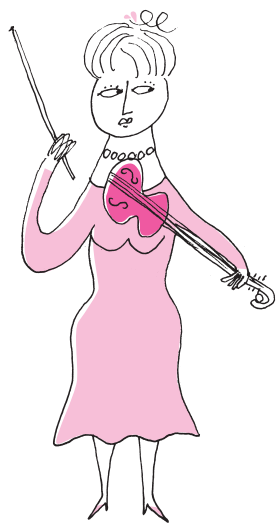
Jak wiele więc jest takich liczb i jaką mają one postać? Tu zaczynają się schody. Okazuje się, że prawdą jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Thue–Siegel–Roth). *Dla każdej niewymiernej liczby algebraicznej x oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieje tylko skończenie wiele par $p, q \in \mathbb{N}$ takich, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$.*

Zauważmy, że twierdzenie to w szczególności implikuje, że liczba L jest przestępna. Jego historia jest bardzo długa. W 1909 roku udowodnił je Axel Thue, przy czym zamiast wykładnika $2 + \varepsilon$ był wykładnik $d/2 + 1 + \varepsilon$. Tutaj d to stopień liczby algebraicznej, czyli minimalny stopień wielomianu o współczynnikach całkowitych takiego, że dana liczba algebraiczna jest jego pierwiastkiem. Przykładowo stopień liczby $\sqrt[5]{13}$ to 5, bo jest pierwiastkiem $x^5 - 13$ (a innego takiego wielomianu o mniejszym stopniu nie ma), a stopień liczby $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ to 2, bo jest ona pierwiastkiem $x^2 - x - 1$. Następnie Carl Ludwig Siegel poprawił wykładnik do $2\sqrt{d} + \varepsilon$, Freeman Dyson do $\sqrt{2d} + \varepsilon$ w 1947 roku, aż w końcu brytyjski matematyk Klaus Roth udowodnił je w roku 1955 w ostatecznej formie dla wykładnika $2 + \varepsilon$. Właśnie za ten wynik Roth otrzymał najwyższe możliwe odznaczenie matematyczne, w 1958 roku uhonorowano go Medalem Fieldsa. Techniki, których używano, to rozważanie wielomianów wielu zmiennych (liczba zmiennych zależy od ε). Niestety w *Delcie* jest zdecydowanie za mało miejsca, żeby je przedstawić.

O przybliżaniu liczb rzeczywistych ułamkami albo, co też ciekawe, liczbami algebraicznymi można powiedzieć jeszcze bardzo wiele. Stoi za tą dziedziną głęboka matematyka, a wiele kwestii wciąż jest niezrozumianych. Przykładowo za twierdzenie Bakera, które mówi o pewnego rodzaju przybliżaniu liczbami algebraicznymi, przyznano w 1970 roku Medal Fieldsa. Dzięki temu twierdzeniu możemy udowodnić tak naturalny fakt, jak to, że równanie $2^x - 3^y = 2021$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań (i liczby 2, 3 oraz 2021 nie są tu w niczym szczególne, oprócz tego, że proste liczenie modulo nie ogranicza rozwiązań). Ja osobiście nie wiem, jak i czy można to wykazać bez twierdzenia Bakera, być może Czytelnicy znajdą alternatywne rozwiązanie. O szacowaniu różnicy $|2^x - 3^y|$ oraz twierdzeniu Bakera ciekawie pisze na swoim blogu Terrence Tao, przez wielu uznany za aktualnie najlepszego matematyka na świecie: terrytao.wordpress.com/2011/08/21/hilberts-seventh-problem-and-powers-of-2-and-3/. Tego typu rozważania to jednak temat na zupełnie inną opowieść.

Bardzo polecam blog Terrence Tao, w szczególności jego porady dotyczące kariery matematycznej na różnych poziomach zaawansowania (zaczynając od szkoły podstawowej): terrytao.wordpress.com/career-advice/



O pewnej manipulacji (w nauce)

Jedną z najsilniejszych ludzkich emocji jest strach. Korzystają z tego faktu autorzy fantazji naukowych. Gorzej, gdy jest to wykorzystywane nie tylko przez pisarzy w fikcyjnych horrorach.

Andrew Wakefield ukończył studia w 1985 roku w Imperial College School of Medicine (Wielka Brytania) jako chirurg. Jego pierwsze badania naukowe na zwierzętach, prowadzone w Uniwersytecie w Toronto, dotyczyły problemu odrzucania przeszczepów jelita (1986–1989). Pozostając w tym samym obszarze, w 1993 roku opublikował pracę, w której wiązał przebyta przez ludzi odrę z chorobą Leśniowskiego–Crohna, nieswoistym zapaleniem jelit o nieznaną etiologię. Następnie powiązał tę chorobę ze szczepieniem przeciw odrze (*The Lancet*, 1995). Mniej więcej w tym czasie skontaktowali się z nim rodzice autystycznego dziecka z podobnymi sugestiami, wiążącymi chorobę ze szczepieniem, a Wakefield rozszerzył zakres podejrzeń o szczepionki przeciw różyczce i śwince. Z takimi podejrzzeniami wystąpiło w 1998 roku kilkunastu autorów współpracujących z Wakefieldem (*The Lancet*, 1998), opisując badania dwanaścioro dzieci. Tych bulwersujących danych nie zlekceważono w środowisku naukowym, znalazły one oddźwięk także w mediach. Po dokładnej weryfikacji nie tylko publikowanych danych, ale także stosowanych procedur, okazało się, że

- liczba badanych przypadków (12) daleko nie upoważnia do wyciągnięcia statystycznie istotnych wniosków;
- nie wszystkie testy, którym poddano pacjentów, były racjonalnie umotywowane, niektóre z tych zbędnych były też inwazyjne, dołożyły dzieciom strachu i bólu;
- wybór pacjentów nie był przypadkowy, wiązał się z innymi współistniejącymi chorobami; spośród 12 dzieci z pierwszej publikacji tylko jedno było autystyczne, trójka nie wykazywała takich objawów, pozostałe przypadki budziły pod tym kątem wątpliwości; u wszystkich odnotowano nieprawidłowości rozwoju;
- u dziewięcioro nie obserwowano stanów zapalnych jelit.

Jednak echa kontrowersyjnej publikacji trwały. Reporter śledczy Brian Deer wykazał także istnienie różnic między tekstem publikacji a danymi w dokumentacji badawczej. W dodatku Wakefield, nie powiadamiając zatrudniających go instytucji, pobrał wynagrodzenie od firm prawniczych zainteresowanych w sądowych oskarżeniach instytucji medycznych o rzekome skutki uboczne szczepień. Uzyskał także z zewnętrznych źródeł wysokie dodatkowe „honorarium”. Wreszcie w latach 2007–2010 powyższe zarzuty przebadano i potwierdzono w brytyjskiej Medical General Council. Oceniono je jako „rażące błędy metodyczne i naruszenie etyki zawodowej”. Dwunastu autorów publikacji wycofało z niej swoje nazwiska. W Wielkiej Brytanii wydano dla głównego autora zakaz wykonywania zawodu lekarza, nie przyznano mu licencji zawodowej w USA. Mimo to Andrew Wakefield wyjechał do USA i podjął pracę w badawczym instytucie w Teksasie. Kilka pism naukowych, w tym *The Lancet*, wycofało jego publikacje, a *British Medical Journal* ogłosił opinię, według której badania Wakefielda nie były przypadkową pomyłką czy naukową wpadką, lecz celowo i świadomie zaplanowaną, naukową manipulacją. W 2014 roku opublikowano analizy 1,2 mln przypadków dzieci szczepionych potrójną szczepionką, gdzie wykazano niezbicie brak korelacji szczepień z pojawieniem się u nich autyzmu.

Mimo iż historia ta rozegrała się ponad 20 lat temu opisuję ją, ponieważ dotyczyła spraw zawsze ważnych i aktualnych (medycyna, dzieci, szczepionki). Decyzje Rady Medycznej nie wymazały z powszechnego obiegu ogólnych stwierdzeń o tym, że „szczepienie szkodzi”. Efekt propagandowy kłamstw pozostał i dziś jeszcze można usłyszeć zarzuty oparte na „medycznych badaniach słynnego lekarza brytyjskiego”, w stosunku

do szczepionek w ogóle i każdej nowej w szczególności. Warto znać ich prawdziwe pochodzenie. Oszustwa w nauce nie utrzymują się długo – zazwyczaj dość szybko znajdują się badacze, którzy zauważą nieścisłości i podejmą ich weryfikację. A wiarygodność traci się na zawsze.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

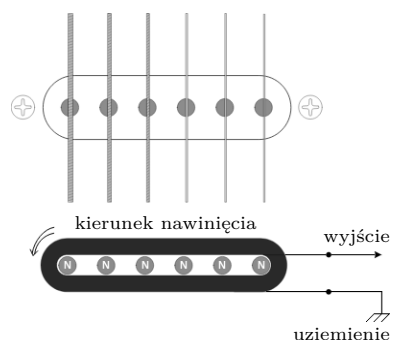
Gitara elektryczna, czyli od dźwięku do prądu i z powrotem

Wojciech BORKOWSKI*

*Uczeń, I klasa, Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego w Warszawie

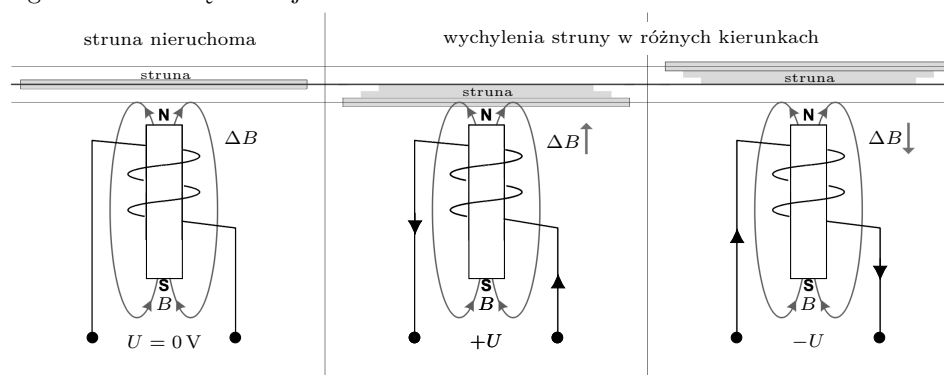
Gitara elektryczna jest bardzo ciekawym instrumentem – nie tylko z powodu ogromnego wachlarza brzmień, jakie pozwala uzyskać, czy faktu, iż odegrała wielką rolę w kształtowaniu takich gatunków muzycznych, jak rock, metal, rock and roll, blues czy jazz. O jej wyjątkowości świadczy również sposób, w jaki to niepowtarzalne brzmienie powstaje, i na tym właśnie chciałbym się skupić.

Jej pierwszy udany prototyp powstał w 1931 roku. Co ciekawe, wynalazek ten był pokłosiem nieszczęśliwego przypadku... Twórca pierwszej gitary elektrycznej, George Beauchamp, przez sześć lat eksperymentował ze wzmocnieniem brzmienia jej klasycznego odpowiednika, bez większych efektów. Dopiero po utracie pracy (w wytwórni gitar „National”) w pełni poświęcił się projektowi. Używając jedynie przedmiotów i narzędzi, jakie miał w domu, skonstruował przetwornik gitarowy. Pozwalał on na zebranie drgań strun w postaci impulsów elektrycznych, co otworzyło drogę do dowolnego wzmocnienia i modyfikowania sygnału elektrycznego, a to znajdowało odbicie w odmiennym, czystszy i agresywniejszym brzmieniu. Gitarę z wmontowanym przetwornikiem zbudował przyjaciel Beauchampa, Paul Barth. Gotowy prototyp, z powodu charakterystycznego kształtu, wynalazcy nazwali „patelnią” (*Frying Pan*).



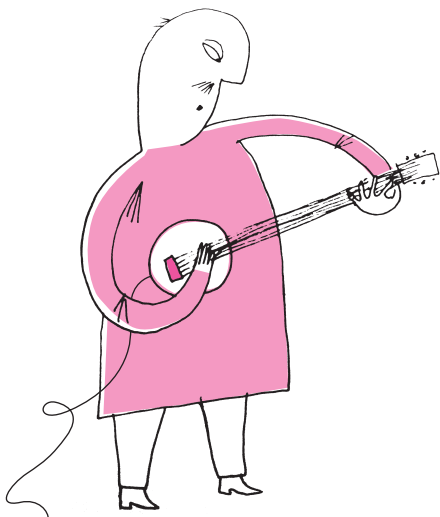
Rys. 1. Schemat przetwornika gitarowego

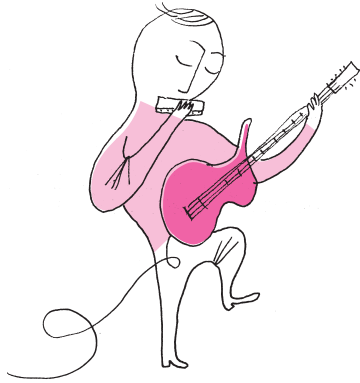
Choć budowa i wygląd gitary elektrycznej na przestrzeni czasu były udoskonalane i modernizowane, zasada jej działania nie uległa zmianie. Drgania strun zbierane są przez przetworniki, by potem w postaci impulsów elektrycznych trafić do wzmacniacza i tam ponownie stać się dźwiękiem. Jednak nadal pozostaje pytanie, jak to się dzieje? By to wyjaśnić, skupmy się najpierw na budowie przetwornika gitarowego (rys. 1). Zbudowany jest z sześciu magnesów i cewki, która je owija. Przetwornik umieszczony jest w taki sposób, aby pod każdą struną znajdował się jeden magnes. Dzięki takiemu umiejscowieniu gdy struna zacznie drgać, zaczyna oddziaływać z magnesem. Powstaje pole magnetyczne, które ulega ciągłym zmianom, zależnym od chwilowego położenia struny podczas drgania. Te zmiany w polu powodują ruch elektronów w cewce, który staje się impulsem elektrycznym gotowym do wysłania do wzmacniacza. Nie wyjaśnia to jednak, jak to się dzieje, że impulsy pochodzące od różnych dźwięków zagranych na gitarze po wzmocnieniu w głośniku brzmią inaczej.



Rys. 2. Schemat powstawania sygnału w przetworniku podczas ruchu struny. Gdy struna jest nieruchoma, nie występuje zmiana pola magnetycznego i napięcie na przetworniku jest równe 0 V. Drgania struny powodują okresowe zmiany strumienia magnetycznego, które są źródłem siły elektromotorycznej. W cewce pojawia się prąd przemienny, a znak napięcia zależy od kierunku ruchu struny

Aby to wyjaśnić, musimy przyjrzeć się bliżej strunom. Zatem zastanówmy się nad tym, w jaki sposób struna wydaje dźwięk. Jej drgania wprawiają w ruch powietrze, a drgające powietrze trafia do naszego ucha, co mózg interpretuje jako dany dźwięk. Żeby stwierdzić, czy dźwięk jest wysoki, czy niski, nasz mózg sprawdza, jak szybko drga membrana, a co za tym idzie, jak szybko





drga powietrze poruszone przez strunę. Zatem im szybciej struna drga, tym wyższy dźwięk. Jednocześnie im szybciej struna drga, tym szybciej zachodzą zmiany w polu i kierunku ruchu elektronów w cewce. W zależności od tego, jak szybko zmienia się kierunek prądu składającego się na dany impuls, jest on potem przetworzony we wzmacniaczu na dźwięk wysoki lub niski. To częściowo wyjaśnia sprawę, jednak nadal nie wiemy, jak to się dzieje, że struna drga szybko albo wolno. Kluczową rolę odgrywają tu naciąg, masa i grubość struny. Im bardziej jest ona naciągnięta, tym trudniej ją wprawić w drganie i tym szybciej szarpnięta wraca do pierwotnego położenia. To przekłada się na większą częstotliwość, a tym samym na wyższy dźwięk. Im struna grubsza, tym mniej jest ona naciągliwa, co pozwala na lepszą jakość vibracji przy mniejszym naciągu, gdyż nie staje się ona luźna i nie traci swoich właściwości. Mimo że różnice mas strun są znacznie trudniejsze do zaobserwowania od tych w naciągu czy grubości, również wpływają na częstotliwość drgań. Im struna cięższa, tym trudniej wprawić ją w drganie, jednak i trudniej zatrzymać. Stąd im cięższa struna, tym niższy dźwięk. Poza tym dzięki gryfowi i progom mamy większą kontrolę nad brzmieniem. Progi to wypukłości na gryfie (szyi) gitary. Wyznaczają one miejsca, w których możemy skrócić długość struny, co podwyższa jej ton. Jak to się dzieje? Im krótsza struna, tym szybciej wraca po wychyleniu do swojego pierwotnego położenia, co oznacza większą częstotliwość, czyli wyższy dźwięk (przy ustalonych wszystkich pozostałych parametrach częstotliwość jest odwrotnie proporcjonalna do długości struny). Progi są ułożone w taki sposób, by różnice pomiędzy poszczególnymi dźwiękami były przyjemne dla ucha ludzkiego. Na przestrzeni wieków odkrywano dźwięki oraz stosunki częstotliwości między nimi. Potem zostały usystematyzowane i nazwane, czego efektem są nuty. Poszczególne ich konfiguracje nazywane interwałami są zestawieniami nut o szczególnej odległości. Zbiory nut określonych poszczególnymi interwałami nazywamy skalami. Skale pomagają muzykom poruszać się po gryfie tak, by uzyskać oczekiwane brzmienie. Są wskazówkami co do tego, które zestawy nut brzmią wesoło, mrocznie, smutno lub bluesowo, rockowo czy funkowo.

Teraz pora skupić się na wzmacniaczu. Jak to się dzieje, że prąd znowu staje się dźwiękiem, i to jeszcze zmodyfikowanym? Otóż urządzenie to składa się z dwóch części: przedwzmacniacza i głośnika. Pierwszy z nich odpowiedzialny jest za modyfikację i przygotowanie impulsów do wysłania do słuchacza. Drugi zaś „odczytuje” impulsy i przekłada je na vibracje membrany głośnika, a stamtąd dźwięk trafia prosto do ucha słuchacza. Przedwzmacniacz to tak naprawdę odbiornik impulsów elektrycznych, który za pomocą wbudowanych lub podpiętych efektów, czyli obwodów, które zmieniają pewne parametry impulsów według określonej zasady, przygotowuje je do przesłania dalej. Najczęściej stosowany efekt to overdrive. Poszerza on przekrój częstotliwości impulsu poza skalę tolerowaną przez głośnik, przez co membrana w punktach szczytowych fali zatracza właściwości i odtwarza charakterystyczne „charczące, chrypiące” rockowe brzmienie gitary. Głośnik z kolei otrzymuje jedynie instrukcje od przedwzmacniacza. Głośnik jest to membrana z magnesem zawieszonym w środku cylindrycznej komory. Na ścianki komory nawinięta jest cewka, która na zasadzie opisanej wcześniej przy przetworniku pozostaje z magnesem w polu magnetycznym. Otrzymując impulsy z przedwzmacniacza, cewka zaburza to pole, co wprawia magnes w ruch i tym samym membranę w drganie. Im wyższy dźwięk został odebrany z gitary, tym proporcjonalnie częściej wibruje magnes i membrana. Membrana jest naciągnięta w pewien sposób i ma pewną grubość, co ogranicza spektrum dostępnych dźwięków. Zostało to, jak opisałem wyżej, wykorzystane przy pozyskaniu agresywnego brzmienia „overdrive”.



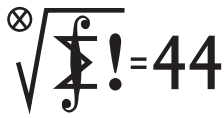
Rozwiązanie zadania M 1667.

Oznaczmy przez x_1, x_2, \dots, x_k , gdzie $k \leq 2000$, miejsca zerowe wielomianu P . Ponieważ równanie $x^2 - 1 = x_i$ ma co najwyżej dwa rozwiązania, to co najwyżej $k - 1700$ miejsc zerowych P leży poza przedziałem $[-1, +\infty)$ - zbiorem wartości $x^2 - 1$. Podobnie, równanie $1 - x^2 = x_i$ ma co najwyżej dwa rozwiązania, więc co najwyżej $k - 1350$ miejsc zerowych P leży poza przedziałem $(-\infty, 1]$ - zbiorem wartości $1 - x^2$.

Wobec tego co najmniej $k - (k - 1350) - (k - 1700) = 3050 - k > 1002$ miejsc zerowych P leży w przedziale $[-1, 1]$, a stąd i z zasady szufladkowej Dirichleta znajdziemy wśród nich takie dwa, których odległość jest mniejsza niż 0,002.

Tak oto gitara elektryczna, dzięki wyjątkowemu sposobowi pozyskania dźwięku i niepowtarzalnemu brzmieniu najbardziej ikoniczny instrument muzyki zachodniej, okazuje się zwyczajnym kawałkiem drewna z drutami i magnesem. . . A może nadal skrywa w sobie pewną magię?

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2021

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 817, 818

Redaguje Marcin E. KUCZMA

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C . Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostokątności $DA \perp AK, DB \perp BK, DB \perp BL, DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M . Dowieść, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D .

818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leq n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n .

Zadanie 818 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2020

Przypominamy treść zadań:

809. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H . Proste AB i DE przecinają się w punkcie S . Prosta przechodząca przez środek M boku AB i równoległa do dwusiecznej kąta ASE przecina proste CA, CB, HA, HB , odpowiednio, w punktach X, Y, P, Q . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach CXY i HPQ są przystające.

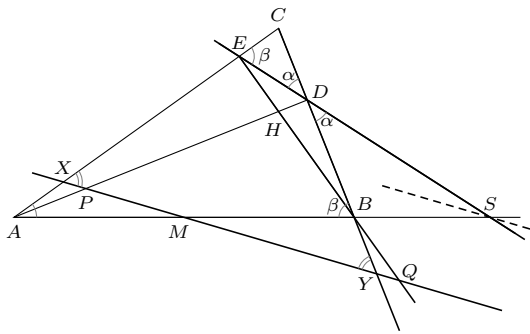
810. Dla permutacji (x_1, \dots, x_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$ rozważamy liczby:

$$s_k = x_1 + \dots + x_k \quad \text{oraz} \quad t_k = k + x_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ udowodnić, że permutacja o własności:

- (i) liczby s_1, \dots, s_n dają różne reszty z dzielenia przez n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje permutacja o własności:
- (ii) liczby t_1, \dots, t_n dają różne reszty z dzielenia przez n .

809. Skoro proste AB i DE przecinają się, kąty $\alpha = \sphericalangle CAB$ i $\beta = \sphericalangle ABC$ nie są równe. Nie tracąc ogólności, przyjmijmy, że $\alpha < \beta$; rozważane punkty są położone jak na rysunku. Z podobieństwa $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ wynika proporcja $AC : DC = BC : EC$; a z niej – podobieństwo $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Zatem $\sphericalangle DEC = \beta, \sphericalangle CDE = \alpha$, i w konsekwencji $\sphericalangle BSD = \beta - \alpha$. Połowa tego kąta to kąt między prostymi AB i XY ; tak więc $\sphericalangle AMX = \sphericalangle BMY = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.



Spojrzenie na kąty zewnętrzne trójkątów AMX i BMY pokazuje, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle CXM &= \sphericalangle CAM + \sphericalangle AMX = \alpha + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \\ \sphericalangle CYM &= \sphericalangle CBM - \sphericalangle BMY = \beta - \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Wobec tego $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BYQ = 180^\circ - \sphericalangle BYM$ i ze wzoru sinusów (w trójkątach AMX i BMY):

$$\frac{AX}{AM} = \frac{\sin \sphericalangle AMX}{\sin \sphericalangle AXM} = \frac{\sin \sphericalangle BMY}{\sin \sphericalangle BYM} = \frac{BY}{BM}.$$

Stąd $AX = BY$. Teraz równość $\sphericalangle AXP = \sphericalangle BYQ$ wraz ze spostrzeżeniem, że kąty przy wierzchołkach A i B w trójkątach APX i BQY są oba równe $90^\circ - \sphericalangle BCA$, prowadzi do wniosku, że te trójkąty są przystające. Tak więc $PX = QY$; a stąd $PQ = XY$.

Promienie okręgów opisanych na trójkątach CXY oraz HPQ wyrażają się wzorami

$$\frac{XY}{2 \sin \sphericalangle XCY} \quad \text{oraz} \quad \frac{PQ}{2 \sin \sphericalangle PHQ}.$$

A ponieważ $\sphericalangle PHQ = \sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle XCY$, promienie te są równe – co było dane do udowodnienia.

810. Załóżmy, że (x_1, \dots, x_n) jest permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$ o własności (i). Dla $j > 1$ sumy s_{j-1} oraz s_j mają dawać różne reszty (mod n), więc $x_j = s_j - s_{j-1}$ nie dzieli się przez n ; zatem w ciągu (x_1, \dots, x_n) liczbą równą n jest x_1 . Przy tym $x_1 = s_1$, więc s_n już przez n się nie dzieli. A ponieważ $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że n jest liczbą parzystą.

Na odwrót, dla parzystego n ciąg (x_1, \dots, x_n) o wyrazach

$$x_i = \begin{cases} n+1-i & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ i-1 & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases}$$

wyznacza ciąg sum (s_1, \dots, s_n) o wyrazach

$$s_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(k+1)n - \frac{1}{2}(k-1) \equiv n - \frac{1}{2}(k-1) \pmod{n} & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ \frac{1}{2}k(n+1) \equiv \frac{1}{2}k \pmod{n} & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

– łatwe przeliczenie; i równie łatwe sprawdzenie, że $s_k - s_l$ nie dzieli się przez n , gdy $k \neq l$; wskazana permutacja (x_1, \dots, x_n) ma własność (i). [Ilustracja dla $n = 8$: $(x_1, \dots, x_8) = (8, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7) \mapsto (s_1, \dots, s_8) = (8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4) \pmod{8}$].

Zatem permutacja o własności (i) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Pozostaje wykazać, że w przypadku własności (ii) ma miejsce charakterystyczna przeciwna.

Gdy permutacja (x_1, \dots, x_n) ma własność (ii), wówczas (mod n): $\sum t_k \equiv \sum k = s_n$ (sumowania po $k = 1, \dots, n$). Ale jednocześnie $\sum t_k = \sum k + \sum x_k \equiv 2 \sum k = 2s_n$. Stąd $s_n \equiv 0 \pmod{n}$; skoro $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że liczba n jest nieparzysta.

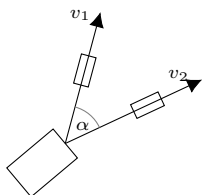
I na odwrót, dla nieparzystego n przykładową permutacją o własności (ii) może być ciąg $(1, \dots, n)$. Uzyskane równoważności dowodzą tezy zadania.

Klub 44 F

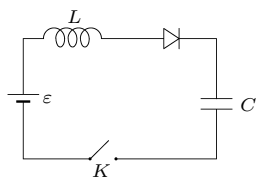


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2021

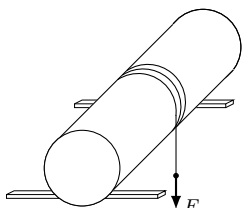
Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl



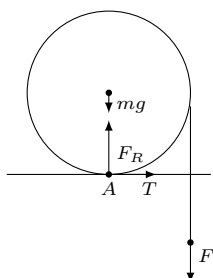
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Oznaczmy maksymalną zdolność skupiającą soczewki ocznej krótkowidza przez D_2 , a jego odległość najlepszego widzenia bez okularów przez d_2 . Rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy

$$(6) \quad 1/f_2 = 1/d - 1/d_2.$$

Po włożeniu okularów dalekowidza odległość najlepszego widzenia krótkowidza a spełnia związek

$$(7) \quad 1/f_1 + 1/d_2 = 1/a.$$

Rozwiązując układ równań (3), (5)–(7), otrzymujemy szukaną odpowiedź $a = d/2 = 12,5$ cm.

707. Na rysunku 4 zaznaczone są siły działające na toczący się walec. Siła tarcia statycznego T działa w prawo, bo gdyby tarcia nie było, walec obracałby się w miejscu przeciwnie do wskazówek zegara. Równanie ruchu postępowego walca ma postać

$$ma = T.$$

Zadania z fizyki nr 714, 715

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

714. Ciężka skrzynia przesuwana jest przy pomocy dwóch traktorów, które poruszają się z prędkościami v_1 i v_2 , między którymi jest kąt α (rys. 1). Jak jest skierowany i jaką ma wartość wektor prędkości skrzyni w chwili, gdy liny są równoległe do wektorów v_1 i v_2 ?

715. Do jakiego napięcia naładuje się kondensator o pojemności C po zamknięciu klucza K w obwodzie przedstawionym na rysunku 2? Jaka będzie maksymalna wartość natężenia prądu podczas ładowania? Siła elektromotoryczna baterii wynosi ε , opór wewnętrzny baterii i opory przewodów łączących są zanedbywalne. Dioda jest idealna – w kierunku przewodzenia ma opór zerowy, a w kierunku zaporowym jej opór jest nieskończenie wielki. Indukcyjność cewki L jest na tyle duża, że proces ładowania jest powolny.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2020

Przypominamy treść zadań:

706. Gdy krótkowidz i dalekowidz używają swoich okularów, widzą tak jak człowiek, który ma dobry wzrok. Pewnego razu przez pomyłkę panowie zamienili swoje okulary. Po włożeniu okularów krótkowidza dalekowidz stwierdził, że widzi ostro tylko bardzo daleko położone przedmioty. Jaka jest najmniejsza odległość, z której krótkowidz w okularach dalekowidza widzi ostro drobny druk?

707. Na dwóch równoległych poziomych deskach leży pełny walec o promieniu R i masie m , na który nawinięty jest sznurek (rys. 3). Na zwisający koniec sznurka działa pionowo siła F . Jaka jest najmniejsza wartość współczynnika tarcia między walcem a deskami, przy której będzie on się toczył bez poślizgu. Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek ciężkości i siła F leżą w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami.

706. Ogniskowa nienapiętej soczewki ocznej dalekowidza jest dłuższa niż odległość y soczewki od siatkówki. Oglądając odległe przedmioty, musi on napiąć mięśnie soczewki, aby jej ogniskowa uległa skróceniu. Maksymalna zdolność skupiająca soczewki ocznej dalekowidza wynosi

$$(1) \quad D_1 = 1/d_1 + 1/y,$$

gdzie d_1 jest jego odległością najlepszego widzenia.

Oznaczmy przez f_2 ogniskową okularów krótkowidza. Ponieważ dalekowidz w tych okularach widzi ostro tylko odległe przedmioty, zachodzi związek

$$(2) \quad 1/f_2 + D_1 = 1/y.$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy stąd

$$(3) \quad -1/f_2 = 1/d_1.$$

Dalekowidz w swoich własnych okularach o ogniskowej f_1 ma odległość dobrego widzenia $d = 25$ cm jak człowiek bez wady wzroku, co wyraża równanie

$$(4) \quad 1/f_1 + D_1 = 1/y + 1/d.$$

Podstawiając za D_1 (1), dostajemy

$$(5) \quad 1/f_1 = 1/d - 1/d_1.$$

Przyspieszenie a środka masy walca możemy znaleźć z równania ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt A :

$$I_A \varepsilon = FR,$$

gdzie $\varepsilon = a/R$ jest przyspieszeniem kątowym walca, a $I_A = 3mR^2/2$ jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt A . Stąd

$$a = 2F/3m.$$

Tarcie statyczne nie może przekroczyć wartości maksymalnej

$$T = 2F/3 \leq \mu(F + mg).$$

Najmniejsza wartość współczynnika tarcia, przy której możliwy jest ruch bez poślizgu, wynosi

$$\mu = \frac{2F}{3(F + mg)}.$$

Prosto z nieba: Woda na Księżycu

Na samym początku, gdy Neil Armstrong postawił stopę na powierzchni Księżyca, wydawało się, że Srebrny Glob jest suchy i nie ma na nim wody. W późniejszych czasach zaczęto podejrzewać, że woda na Księżycu może występować w postaci czap lodowych na „ciemnej stronie” naszego naturalnego satelity. Pod koniec roku 2009 okazało się, że to prawda – lód na Księżycu jest, i to w ogromnych ilościach (około 6000 milionów ton). Potwierdziły to obserwacje sond kosmicznych: Cassini, Deep Impact, Chandrayaan oraz LCROSS. Silnie zamrożona woda księżycowa znajduje się w trwale zacienionych kraterach, takich jak Południowy Basen Polarny Aitken. Jednak do tej pory nikt nawet nie podejrzewał, że woda może istnieć na nasłonecznionej części Księżyca.

Pod koniec roku 2020 musieliśmy ponownie zweryfikować naszą wiedzę. Stratosferyczne Obserwatorium Astronomii Podczerwonej SOFIA (*Stratospheric Observatory for Infrared Astronomy*) potwierdziło bowiem obecność wody na oświetlonej Słońcem powierzchni Księżyca. SOFIA wykryła cząsteczki H₂O w kraterze Clavius, jednym z największych kraterów widocznych z Ziemi, znajdującym się na południowej półkuli naszego naturalnego satelity.

Dzięki danym spektroskopowym otrzymanym z SOFII ustalono, że wewnątrz tego olbrzymiego krateru znajduje się pomiędzy 100 do 412 części wody na milion. Co to oznacza? Doktor Casey Honnibal, główny autor analizy, przyrównał te wyniki do obecności małej puszkki wody na każdy metr sześcienny księżycowej ziemi. Wyniki badań zostały opublikowane w czasopiśmie *Nature Astronomy* w październiku 2020 roku. Nie wiadomo na razie, czy woda istnieje na całej powierzchni Księżyca, czy jedynie w kraterze Clavius, a także ile wody kryje się pod powierzchnią. Jednak z pewnością dzięki odkryciu dokonанemu przez obserwatorium SOFIA poszukiwania staną się teraz bardziej intensywne.

W tym samym numerze czasopisma *Nature Astronomy* zespół naukowców pod kierownictwem doktora Paula Hayne’a opublikował pracę wykorzystującą modele teoretyczne i dane NASA pochodzące z amerykańskiej sondy kosmicznej Lunar Reconnaissance Orbiter. Autorzy wskazali, że woda na Księżycu może być uwięziona w małych zacienionych obszarach, tzw. „zimnych pułapkach”, gdzie temperatury pozostają ujemne. Pułapki te, mimo że niewielkie (większość z nich może mieć średnicę około 1 cm), w sumie mogą zajmować całkowitą powierzchnię około 400 000 km² (czyli dwukrotnie większą niż do tej pory zakładano). Autorzy publikacji podkreślają, że woda uwięziona w tych zimnych pułapkach mogłaby być wykorzystywana podczas przyszłych misji księżycowych.

Oba te odkrycia, ogłoszone przez NASA 26 października 2020 roku, to zatem bardzo dobre wiadomości dla załogowego programu Artemis, którego celem jest wizyta na Księżycu przed końcem 2024 roku. Wiemy już, że woda na Księżycu istnieje. Pozostaje jednak pytanie, czy będziemy mogli ją wykorzystać. Uzyskanie dodatkowych informacji na ten temat będzie jednym z celów misji Artemis.

Katarzyna MAŁEK

SOFIA to obserwatorium-samolot. A dokładniej to Boeing 747SP zmodyfikowany w celu przenoszenia teleskopu o średnicy 2,54 m. Obserwuje Wszechświat z wysokości 12 km nad powierzchnią ziemi. SOFIA jest wspólnym projektem NASA i niemieckiego Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt (DLR).

Honnibal, C.I., Lucey, P.G., Li, S. et al. *Molecular water detected on the sunlit Moon by SOFIA*. *Nat. Astron.* (2020). doi.org/10.1038/s41550-020-01222-x.

Hayne, P.O., Aharonson, O. & Schörghofer, N. *Micro cold traps on the Moon*. *Nat. Astron.* (2020). doi.org/10.1038/s41550-020-1198-9.

Niebo w marcu

Marzec jest kolejnym miesiącem charakteryzującym się dużym nachyleniem ekliptyki o zmierzchu i małym o świcie, co ma decydujący wpływ na widoczność przebywających blisko Słońca, i jednocześnie blisko ekliptyki, obiektów. Nasza Gwiazda Dzienna w marcu zwiększa wysokość górowania o ponad 11°, by na początku trzeciej dekady miesiąca przejść na półkulę północną nieba (w tym roku stanie się to 20 marca o godzinie 10:37 naszego czasu), rozpoczynając astronomiczną wiosnę na naszej półkuli Ziemi. Kilka dni wcześniej nastąpi zrównanie dnia z nocą. Tradycyjnie w ostatnią niedzielę marca (tym razem 28.03) w wielu krajach półkuli północnej wprowadzony zostanie czas

letni, i należy pamiętać wtedy o przesunięciu zegarków o godzinę do przodu. Przez miesiąc możliwość obserwacji gwiazd i planet zmniejszy się o kolejne dwie godziny, do 11 godzin.

Księżyc rozświetli swoją luną początek i koniec miesiąca, natomiast w jego środku wystąpią najciemniejsze, bezksiężycowe noce. Srebrny Glob zacznie miesiąc w gwiazdozbiornie Panny dwa dni po pełni, w fazie przekraczającej 90%. Rano 6 marca Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę na pograniczu gwiazdozbiorów Wężownika i Skorpiona, tydzień później zaś – przez nową w Wodniku. Tym razem Księżyc przejdzie ponad 5° od Słońca, i do zaćmienia nie dojdzie. Po nowiu, już

wiosną, 21 marca, naturalny satelita Ziemi pokaże tarczę oświetloną w 50%, która dotrze wtedy na pogranicze gwiazdozbiorów Byka, Oriona i Bliźniąt. Natomiast jeszcze przed końcem miesiąca, 28 marca, Księżyc przejdzie przez pełnię, także w gwiazdozbiore Panny, zaledwie kilka stopni na zachód od miejsca, przez które wędrował 1 marca.

Pod względem widoczności planet Układu Słonecznego trzeci miesiąc roku jest jeszcze gorszy niż drugi. Pocieszającą wiadomością jest, że to najgorszy miesiąc z całego roku, więc kolejne będą już łaskawsze dla obserwatorów planet. W marcu dwie planety spotkają się ze Słońcem: najpierw 11 marca uczyni to **Neptun**, a dwa tygodnie później – **Venus**. Po koniunkcji Neptun przeniesie się na niebo poranne, gdzie nachylenie ekliptyki jest niekorzystne, skracając się także noc. To spowoduje, że planeta pozostanie niewidoczna do końca czerwca. Venus natomiast przeniesie się na niebo wieczorne i wyłoni się z zorzy wieczornej w maju, lecz wskutek pogarszającego się nachylenia ekliptyki późną wiosną i latem nie wzniesie się ona o zmierzchu wyżej niż 5° ponad widnokrąg.

Na początku miesiąca, 6 marca, **Merkury** osiągnie maksymalną elongację zachodnią, oddalając się wtedy od Słońca aż 27° . Dobę wcześniej spotka się z **Jowiszem**, mijając go w odległości około $17'$, czyli połowy średnicy kątowej Słońca czy Księżyca. Blżej równika i na półkuli południowej jest to na pewno powód do wstawania wczesnym rankiem. U nas zaś obie planety wschodzą zaledwie 45 minut przed Słońcem i giną w zorzy porannej. Tak samo jak odległa o 9° od Jowisza planeta **Saturn**. Tę ostatnią planetę można próbować dostrzec pod koniec miesiąca o świcie, lecz zajmie ona wtedy pozycję na wysokości około 5° , świecąc blaskiem $+0,8^m$. A zatem Saturna da się zaobserwować tylko na przejrzystym niebie z głęboko odsłoniętym widnokresem.

Jedynie dobrze widoczne w marcu planety to znajdujący się w Baranie **Uran** oraz wędrujący przez sąsiedniego Byka **Mars**. Pierwszą z planet można obserwować w pierwszej połowie miesiąca, gdy na początku nocy astronomicznej (około godziny 19:15) zajmuje ona pozycję na wysokości ponad 20° . Wraz z upływem czasu planeta zbliża się do widnokregu, co wraz ze skracającą się nocą sprawi, że pod koniec marca na początku nocy astronomicznej (już około godziny 21 czasu letniego) Uran zmniejszy wysokość do 6° i jego dostrzeżenie skutecznie utrudni nasza atmosfera. Szczególnie że blask Urana wynosi w marcu $+5,9^m$. W dniach 16 i 17 marca Urana czeka spotkanie z Księżycem. Pierwszego z wymienionych dni Srebrny Glob w fazie 10% znajdzie się 6° pod Uranem, a dobę później 7° na wschód od niego, w fazie zwiększonej do 17%.

Planeta **Mars** w marcu pokona na niebie dystans ponad 17° , wędrując przez gwiazdozbiór Byka i jednocześnie oddalając się od Urana na prawie 40° pod koniec miesiąca. Mars zacznie marzec niecałe 3° na południe od Plejad. Tydzień później, 10 marca, Czerwona Planeta pokaże się prawie $15'$ od gwiazdy 4. wielkości 37 Tau, zaś 8 dni później minie

w odległości $20'$ świecąca prawie z taką samą jasnością obserwowaną gwiazdę ν Tau. Kolejnego dnia, 19 marca, 2° na południe od Czerwonej Planety przejdzie Księżyc w fazie 33%, a 24 marca Mars minie kolejną gwiazdę 4. wielkości, tym razem τ Tau, zbliżając się doń na odległość $50'$. Ostatni dzień miesiąca zastanie Marsa w odległości $7,5^\circ$ do gwiazdy El Nath, stanowiącej północny róg Byka i jednocześnie drugą co do jasności gwiazdę konstelacji. W marcu jasność Czerwonej Planety spadnie z $+0,9^m$ do $+1,3^m$, a średnica jej tarczy zmniejszy się z $6''$ do $5''$.

Na początku marca przez opozycję względem Słońca przejdzie najjaśniejsza z planetoid, planetoida (4) **Westa**, osiągając wtedy jasność $+5,8^m$, czyli porównywalnie do planety Uran. Niestety bezpośrednio porównywanie jasności obu ciał Układu Słonecznego jest trudne, gdyż Westa wędruje przez wschodnie obszary gwiazdozbioru Lwa, jakieś 125° od Urana. W marcu planetoida pokona na niebie dystans około 7° , zaczynając miesiąc z grubsza $1,5^\circ$ na wschód od gwiazdy 3. wielkości Chort, czyli θ Leo, by 8 marca przeciąć linię łączącą tę gwiazdę z położoną 5° na północ i jaśniejszą o prawie magnitudo Zosmą (δ Leo). Tej nocy Westa przejdzie $75'$ od pierwszej z wymienionych gwiazd. Potem planetoida powędruje dalej na północny zachód, kończąc miesiąc niewiele ponad 2° na południowy zachód od świecącej z jasnością obserwowaną $+4,4^m$ gwiazdy 60 Leo. Oczywiście w związku z opozycją Westę najlepiej obserwować około północy, gdy wznosi się na wysokość mniej więcej 55° . Dobrze też na jej poszukiwania przeznaczyć środek marca, gdy Księżyc nie będzie przeszkadzał w obserwacjach.

Według Amerykańskiego Towarzystwa Obserwatorów Gwiazd Zmiennych (AAVSO) w drugiej dekadzie kwietnia maksimum swojego blasku osiągnie znajdująca się w Hydrze długookresowa gwiazda zmienna **R Hya**. Owa gwiazda należy do klasy miryd, czyli gwiazd, które z okresem kilkuset dni znacząco zmieniają swoje fizyczne rozmiary i temperaturę powierzchni, a za tym następują ogromne różnice w ilości wyświecanego przez takie gwiazdy światła. W tym przypadku gwiazda zmienia blask od $+3,5^m$ do $+10,9^m$ z okresem 380 dni, a więc podczas maksimum swojej jasności gwiazda jest łatwo widoczna gołym okiem. Warto zacząć obserwacje już w marcu, gdy będzie ją można dostrzec bez pomocy przyrządów optycznych. Gwiazdę R Hya odszukać jest o tyle łatwo, że leży ona zaledwie $2,5^\circ$ na wschód od jaśniejszej od $+3^m$ gwiazdy γ Hya i jednocześnie 12° na południe od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, o jasności obserwowanej $+1^m$. W okresach maksimum jasności R Hya jej sąsiadka γ bardzo dobrze nadaje się na gwiazdę porównania. Niestety dla nas R Hya położona jest dość daleko na południe, mniej więcej tak samo daleko, jak Słońce pierwszego dnia zimy. A zatem nie wznosi się ona wyżej na polskim niebie niż na jakieś 15° . W marcu R Hya przecina południk lokalny około godziny 3. Jednak właśnie wiosna to najlepszy okres do obserwacji tego obszaru nieba.

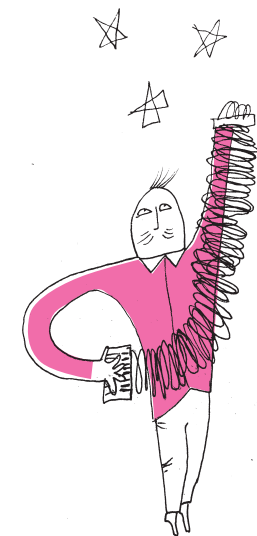
Ariel MAJCHER

Przez gwiazdy do cierpień

Czym różnią się osiągnięcia, za które dziś przyznaje się Nagrodę Nobla z fizyki, od tych, które były podstawą uzyskania tych laurów pół wieku czy wiek temu?

Już pobieżny przegląd uzasadnień opublikowanych przez Komitet Noblowski wskazuje na to, że nagrody z dawnych czasów dotyczyły w znacznie większym stopniu odkryć, które w jakiś sposób zmieniały życie ludzi (dość wspomnieć pierwszą edycję w 1901 roku, kiedy to uhonorowany został Wilhelm Röntgen) lub otwierały zupełnie nowe horyzonty poznawcze (wspomnijmy choćby 1965 rok i ówczesnych laureatów Shin'ichirō Tomonagę, Juliana Schwingera i Richarda Feynmana). Nie zapominam tutaj, bynajmniej, o osiągnięciach nagrodzonych w 2014 roku Isamu Akasakiego, Hiroshiego Amano i Shūjiego Nakamury, które zmieniły sposób, w jaki każdy z Czytelników *Delty* oświetla swój dom, ale ten „praktyczny” aspekt nagród stanowi teraz raczej wyjątek niż regułę.

Zwracam na to uwagę w związku z tym, że decyzją Sejmu RP rokowi 2021 patronuje Stanisław Lem, najpoczytniejszy polski twórca literatury *science fiction*, a może i najpoczytniejszy w ogóle. Światy przedstawione w powieściach Lema są niezwykle charakterystyczne. W momencie tworzenia mogły one wyrażać oczekiwania związane z postępem technicznym spowodowanym rozwojem nauki. Wszystkie te terminale międzyplanetarne, podróże kosmiczne, roboty wyprzedzające ludzkie zachcianki, nowe materiały o fascynujących właściwościach fizycznych i estetycznych, ułatwienia komunikacyjne – wydają się dziś ponurą, antyutopijną wizją. Okazało się bowiem, że jesteśmy świadkami załamania się podstawowej ekstrapolacji futurystyki sprzed pół wieku, zakładającej, że Ziemia jest nieskończonym rezerwuarem zasobów, a ludzki mózg nieskończonym rezerwuarem idei, które stworzą bazę materialną i intelektualną do realizacji wielkich marzeń ludzkości. I pał licha, czy te marzenia są w oświecony sposób racjonalne, czy też, jak u Lema, stanowią ucieczkę od rzeczywistości lub emanację zwierzęcych popędów człowieka.



Na naszej ogrzewającej się planecie, przeoranej i wyjałowionej na różne sposoby przez *Homo sapiens*, już ich raczej nie zrealizujemy. Moglibyśmy ogłosić metaforyczne zwycięstwo Franka Herberta nad Lемом, tyle że żadnego melanzu pozwalającego na ucieczkę ze współczesnej Arrakis wciąż nie widać.

Ale nie to jest najgorsze.

Twórczość Lema przesiąknięta jest profetyczną wizją powszechnej dostępności informacji. W *Powrocie z gwiazd* wystarczy połączyć się z inforem, by uprzejma i wydajna sztuczna inteligencja zaspokoila nasze pożądanja poznawcze. Optony wyświetlają chętnym dowolne fakty skopiowane z dalekich repozytoriów wiedzy. Informacja jest neutralna, obiektywna i bezpieczna. W takiej scenerii można teoretyzować, czy i jak pierwotne emocje stanowią o istocie człowieczeństwa.

Jestem przekonany, że każdemu użytkownikowi Internetu, a jest to przecież podstawowe medium, przez które po *Deltę* sięgają jej Czytelnicy, taka wizja jest boleśnie obca. Tak, informacja jest dostępna dla każdego, a setki milionów ludzi na całym świecie będą raczej niedojadać, niż pozbawią się dostępu do ciągłego strumienia danych. Danych tych nie używamy jednak, na ogół, w celu powszechnego oświecenia, ale raczej dla rozrywki, konsumpcji i uczestnictwa w zbiorowym łgarstwie.

Ten ostatni aspekt lapidarnie ujął ongiś Marek Kordos na kolegium redakcyjnym *Delty*, który wspominał, że uczestnicy sprzeciwu wobec *ancien régime* w naszym kraju zastanawiali się długo, „czyj będzie megafon w wolnej Polsce”, tymczasem teraz każdy ma swój własny i za jego pomocą może głosić dowolne treści. Praktyka pokazuje, że kluczowym aspektem działania „megafonów”, zwłaszcza internetowych, jest wzbudzenie możliwie silnych negatywnych emocji, co zapewnia nadawany komunikat duży zasięgi i rzesze wiernych odbiorców. I coraz dalej Internetowi do Lemowskiego infora.

Nie ma więc wytrychów do teorii grawitacji umożliwiających podróże do dalekich światów, nie ma nowych źródeł energii ani superwytrzymałych, srebrzystych metali, nie ma samoprowadzających się gliderów ani ulderów. Postęp techniczny spowolnił, postęp technologii informacyjnych zdaje się karmić nasze najniższe instynkty. Pytanie, co to znaczy być człowiekiem ponowoczesnym, powracające wciąż w twórczości Lema, traci znamiona przyjaznego zaciekawienia i staje się rozpaczliwym pytaniem moralisty.

Czytajmy zatem dziś Lema, by pomiędzy jego nieziszczonymi wizjami odnaleźć drogi ucieczki z pułapki nieskończonego rozwoju.

Krzysztof TURZYŃSKI



Twierdzenie Ptolemeusza

Bartłomiej BZDEGA

Rozważmy czworokąt $ABCD$, który jest wpisany w okrąg. Wybierzmy taki punkt P na przekątnej BD , aby zachodziła równość $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle CAB|$. Wtedy również $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle PAB|$. Oprócz tych dwóch równości mamy jeszcze $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DCA|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, gdyż są to pary kątów wpisanych, opartych na tych samych łukach. Wobec tego, na mocy cechy (kk), zachodzą następujące podobieństwa trójkątów:

$$\triangle APD \sim \triangle ABC, \quad \triangle ABP \sim \triangle ACD.$$

Przyjmijmy oznaczenia długości odcinków takie jak na rysunku obok.

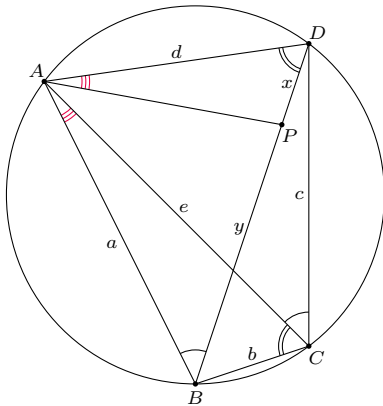
Z pierwszego z podobieństw otrzymujemy proporcję $\frac{x}{d} = \frac{b}{e}$, a z drugiego $\frac{y}{a} = \frac{c}{e}$. Te dwie równości prowadzą do wniosku, że $e(x + y) = bd + ac$. Z tego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie Ptolemeusza. *Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg spełnia warunek*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$

W podobny sposób można udowodnić nieco więcej – dla dowolnych czterech punktów A, B, C, D lewa strona powyższej równości jest zawsze większa lub równa od prawej, a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, wpisanym w okrąg. Jest to *nierówność Ptolemeusza*, o której napiszę w innym odcinku.

Twierdzenie Ptolemeusza



Wskazówki do zadań

- Otrzymamy dowód twierdzenia Ptolemeusza.
- Zastosować twierdzenie sinusów. Aby wyprowadzić wzór, przyjąć, że $\beta + \gamma = 90^\circ$.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ADBC$.
- Wykorzystać poprzednie zadanie – łącząc co trzeci wierzchołek dziesięciokąta foremnego, otrzymamy trójkąt równoboczny.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ABDC$ i nierówność trójkąta BCD .
- Niech $ABCD EFG$ będzie siedmiokątem foremnym. Przyjąć się czworokątowi $ABCE$.
- Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokątów $ABCP$ i $ABPD$.
- liczyn długości przekątnych otrzymanym z twierdzenia Ptolemeusza. Poraz ich długości otrzymamy z równości $|AB| \cdot |BC| + |CA| \cdot |AD| = |BD| \cdot |AC|$. Pole trójkąta o bokach a, b, c wpisane w okrąg o promieniu R , jest równe $\frac{abc}{4R}$.
- Niech O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków BC, CA, AB . Na czworokątach $AMOL, BKOM$ i $CLOK$ można opisać okręgi. Zapisać dla nich twierdzenie Ptolemeusza oraz skorzystać z tego, że stosunek pola do obwodu trójkąta jest równy połowie promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- Najpierw udowodnić, że istnieje tylko jeden taki ciąg, a następnie zauważyć, że jeśli $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ jest n -kątem foremnym, $A_n = A_0$ i $|A_0 A_1| = 1$, to $\sum_{k=0}^{n-1} |A_0 A_k| = n$.

dla $k = 0, 1, \dots, n$.

Zadania

- Poczuć radość płynącą z zauważenia tego, co się stanie, gdy zastosujemy twierdzenie Ptolemeusza do prostokąta.
- Wykazać, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ oraz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$, to $\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma)$. Wyprowadzić stąd wzór na sinus sumy kątów.
- Punkt D leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC . Wykazać, że $|CD| = |AD| + |BD|$.
- Bok dziesięciokąta foremnego ma długość a , jego najkrótsza przekątna d , a najdłuższa f . Wykazać, że $a + d = f$.
- Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $D \neq A$. Udowodnić, że $2|AD| > |AB| + |AC|$.
- Bok siedmiokąta foremnego ma długość a , jego najkrótsza przekątna d , a najdłuższa e . Wykazać, że $\frac{1}{a} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$.
- Punkt P leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$.
- Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Znając $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$, wyznaczyć długości przekątnych tego czworokąta.
- Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta jest równa sumie długości promienia okręgu opisanego i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt (twierdzenie Carnota).
- Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$. W ciągu (c_0, c_1, \dots, c_n) występują wyłącznie liczby nieujemne. Dla wszystkich całkowitych nieujemnych p, q, r, s , spełniających warunek $p + q + r + s = n$, zachodzi równość $c_p c_r + c_q c_s = c_{p+q} c_{q+r}$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2 , jeśli $c_1 = 1$.

NA WYDZIALE FIZYKI

nie tylko zdobędziesz wiedzę,
poćwiczysz abstrakcyjne myślenie,
ale też rozwiniesz kompetencje
społeczne uczestnicząc w zespołowych
projektach studenckich.

„Gra edukacyjna sterowana
potencjałami z mięśni”

„Kosmologiczne ściany domenowe”

„Fizyka science-fiction”

„Projekt Roller Coastera”

„Amatorski Radioteleskop”

„Wystawa Światło jest super”

„Generator Tesli”

to przykłady projektów zrealizowanych
przez naszych studentów.

**ZAPRASZAMY
NA STUDIA!**

FIZYKA, I i II st.

Dwie ścieżki kształcenia na I st.:
standardowa;

indywidualna – dostępna dla studentów,
którzy uzyskali co najmniej 85 punktów
rekrutacyjnych – na tej elitarnej
ścieżce zaawansowane studia połączone
są z przyjemnością nauki w wyjątkowo
ambitnym gronie.

NAUCZANIE FIZYKI, I st.

ASTRONOMIA, I i II st.

ZASTOSOWANIA FIZYKI W BIOLOGII

I MEDYCYNIE, I i II st.

cztery specjalności do wyboru:

Biofizyka molekularna,

Fizyka medyczna,

Neuroinformatyka,

Projektowanie molekularne
i bioinformatyka (I st.)

INŻYNIERIA

NANOSTRUKTUR, I i II st.

EUROPEJSKIE STUDIA OPTYKI OKULAROWEJ I OPTOMETRII, I st.

OPTOMETRIA, II st.

PHYSICS (STUDIES IN ENGLISH), II st.

