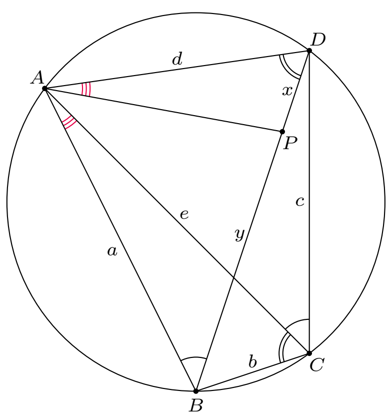
Twierdzenie Ptolemeusza

Bartłomiej BZDĘGA

Rozważmy czworokąt $ABCD$, który jest wpisany w okrąg. Wybierzmy taki punkt P na przekątnej BD, aby zachodziła równość $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle CAB|$. Wtedy również $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle PAB|$. Oprócz tych dwóch równości mamy jeszcze $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DCA|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, gdyż są to pary kątów wpisanych, opartych na tych samych łukach. Wobec tego, na mocy cechy (kk), zachodzą następujące podobieństwa trójkątów:

$$\triangle APD \sim \triangle ABC, \qquad \triangle ABP \sim \triangle ACD.$$

Twierdzenie Ptolemeusza



Przyjmijmy oznaczenia długości odcinków takie jak na rysunku obok. Z pierwszego z podobieństw otrzymujemy proporcję $\frac{x}{d} = \frac{b}{e}$, a z drugiego $\frac{y}{a} = \frac{c}{e}$. Te dwie równości prowadzą do wniosku, że $e(x+y) = bd + ac$. Z tego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie Ptolemeusza. *Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg spełnia warunek*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$

W podobny sposób można udowodnić nieco więcej – dla dowolnych czterech punktów A, B, C, D lewa strona powyższej równości jest zawsze większa lub równa od prawej, a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, wpisanym w okrąg. Jest to *nierówność Ptolemeusza*, o której napiszę w innym odcinku.

Zadania

1. Poczuć radość płynącą z zauważenia tego, co się stanie, gdy zastosujemy twierdzenie Ptolemeusza do prostokąta.
2. Wykazać, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ oraz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, to $\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$. Wyprowadzić stąd wzór na sinus sumy kątów.
3. Punkt D leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że $|CD| = |AD| + |BD|$.
4. Bok dziewięciokąta foremnego ma długość a, jego najkrótsza przekątna d, a najdłuższa f. Wykazać, że $a + d = f$.
5. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $D \neq A$. Udowodnić, że $2|AD| > |AB| + |AC|$.
6. Bok siedmiokąta foremnego ma długość a, jego najkrótsza przekątna d, a najdłuższa e. Wykazać, że $\frac{1}{a} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$.
7. Punkt P leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $\frac{|AP|+|BP|}{|CP|+|DP|}$.
8. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Znając $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, wyznaczyć długości przekątnych tego czworokąta.
9. Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta jest równa sumie długości promienia okręgu opisanego i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt (twierdzenie Carnota).
10. Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 3$. W ciągu $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ występują wyłącznie liczby nieujemne. Dla wszystkich całkowitych nieujemnych p, q, r, s, spełniających warunek $p+q+r+s = n$, zachodzi równość $c_pc_r + c_qc_s = c_{p+q}c_{q+r}$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2, jeśli $c_1 = 1$.

Wskazówki do zadań

1. Otrzymamy dowód twierdzenia Pitagorasa.
2. Zastosować twierdzenie sinusów. Aby wyprowadzić wzór, przyjąć, że $\beta + \gamma = 90°$.
3. Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ADBC$.
4. Wykorzystać poprzednie zadanie – łącząc co trzeci wierzchołek dziewięciokąta foremnego, otrzymamy trójkąt równoboczny.
5. Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ABDC$ i nierówność trójkąta BCD.
6. Niech $ABCDEFG$ będzie siedmiokątem foremnym. Przyjrzeć się czworokątowi $ABCE$.
7. Zastosować twierdzenie Ptolemeusza do czworokątów $ABCP$ i $ABPD$.
8. Iloczyn długości przekątnych otrzymamy z twierdzenia Ptolemeusza. Iloraz ich długości otrzymamy z równości pól $[ABC] + [CDA] = [BCD] + [DAB]$. Pole trójkąta o bokach a, b, c, wpisanego w okrąg o promieniu R, jest równe $\frac{abc}{4R}$.
9. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków BC, CA, AB. Na czworokątach $AMOL$, $BKOM$ i $CLOK$ można opisać okręgi. Zapisać dla nich twierdzenie Ptolemeusza oraz skorzystać z tego, że stosunek pola do obwodu trójkąta jest równy połowie promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
10. Najpierw udowodnić, że istnieje tylko jeden taki ciąg, a następnie zauważyć, że jeśli $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ jest n-kątem foremnym, $A_n = A_0$ i $|A_0A_1| = 1$, to żądane warunki spełnia ciąg $c_k = |A_0A_k|$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$.