Klub 44 M

$\otimes\sqrt{\oint !}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2021

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 817, 818

Redaguje Marcin E. KUCZMA

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C. Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostopadłości $DA \perp AK$, $DB \perp BK$, $DB \perp BL$, $DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M. Dowieść, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D.

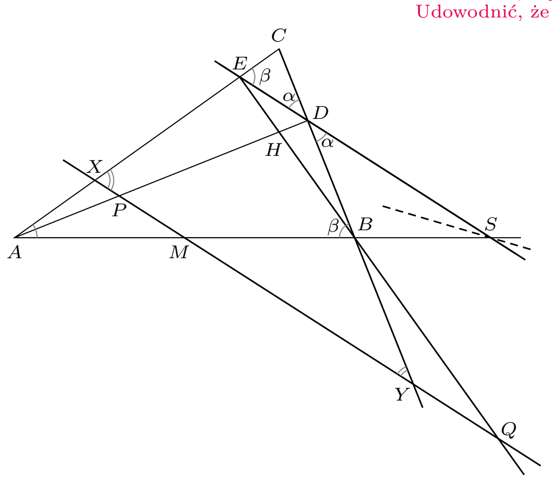
818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leqslant n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n.

Zadanie 818 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2020

Przypominamy treść zadań:

809. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H. Proste AB i DE przecinają się w punkcie S. Prosta przechodząca przez środek M boku AB i równoległa do dwusiecznej kąta ASE przecina proste CA, CB, HA, HB, odpowiednio, w punktach X, Y, P, Q. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach CXY i HPQ są przystające.



810. Dla permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ rozważamy liczby:

$$s_k = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{oraz} \quad t_k = k + x_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ udowodnić, że permutacja o własności:

(i) liczby $s_1, \ldots, s_n$ dają różne reszty z dzielenia przez n

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje permutacja o własności:

(ii) liczby $t_1, \ldots, t_n$ dają różne reszty z dzielenia przez n.

809. Skoro proste AB i DE przecinają się, kąty $\alpha = \sphericalangle CAB$ i $\beta = \sphericalangle ABC$ nie są równe. Nie tracąc ogólności, przyjmijmy, że $\alpha < \beta$; rozważane punkty są położone jak na rysunku. Z podobieństwa $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ wynika proporcja $AC : DC = BC : EC$; a z niej – podobieństwo $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Zatem $\sphericalangle DEC = \beta$, $\sphericalangle CDE = \alpha$, i w konsekwencji $\sphericalangle BSD = \beta - \alpha$. Połowa tego kąta to kąt między prostymi AB i XY; tak więc $\sphericalangle AMX = \sphericalangle BMY = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Spojrzenie na kąty zewnętrzne trójkątów AMX i BMY pokazuje, że

$$\sphericalangle CXM = \sphericalangle CAM + \sphericalangle AMX = \alpha + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$\sphericalangle CYM = \sphericalangle CBM - \sphericalangle BMY = \beta - \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Wobec tego $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BYQ = 180^\circ - \sphericalangle BYM$ i ze wzoru sinusów (w trójkątach AMX i BMY):

$$\frac{AX}{AM} = \frac{\sin \sphericalangle AMX}{\sin \sphericalangle AXM} = \frac{\sin \sphericalangle BMY}{\sin \sphericalangle BYM} = \frac{BY}{BM}.$$

Stąd $AX = BY$. Teraz równość $\sphericalangle AXP = \sphericalangle BYQ$ wraz ze spostrzeżeniem, że kąty przy wierzchołkach A i B w trójkątach APX i BQY są oba równe $90^\circ - \sphericalangle BCA$, prowadzi do wniosku, że te trójkąty są przystające. Tak więc $PX = QY$; a stąd $PQ = XY$.

Promienie okręgów opisanych na trójkątach CXY oraz HPQ wyrażają się wzorami

$$\frac{XY}{2\sin \sphericalangle XCY} \quad \text{oraz} \quad \frac{PQ}{2\sin \sphericalangle PHQ}.$$

A ponieważ $\sphericalangle PHQ = \sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle XCY$, promienie te są równe – co było dane do udowodnienia.

810. Załóżmy, że $(x_1, \ldots, x_n)$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o własności (i). Dla $j > 1$ sumy s_{j-1} oraz s_j mają dawać różne reszty (mod n), więc $x_j = s_j - s_{j-1}$ nie dzieli się przez n; zatem w ciągu $(x_1, \ldots, x_n)$ liczbą równą n jest x_1. Przy tym $x_1 = s_1$, więc s_n już przez n się nie dzieli. A ponieważ $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że n jest liczbą parzystą.

Na odwrót, dla parzystego n ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach

$$x_i = \begin{cases} n + 1 - i & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ i - 1 & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases}$$

wyznacza ciąg sum $(s_1, \ldots, s_n)$ o wyrazach

$$s_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(k+1)n - \frac{1}{2}(k-1) \equiv n - \frac{1}{2}(k-1) \pmod{n} \\ \qquad\qquad \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ \frac{1}{2}k(n+1) \equiv \frac{1}{2}k \pmod{n} \quad \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

– łatwe przeliczenie; i równie łatwe sprawdzenie, że $s_k - s_l$ nie dzieli się przez n, gdy $k \neq l$; wskazana permutacja $(x_1, \ldots, x_n)$ ma własność (i). [Ilustracja dla $n = 8$: $(x_1, \ldots, x_8) = (8, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7) \mapsto$ $\mapsto (s_1, \ldots, s_8) = (8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4) \pmod{8}$].

Zatem permutacja o własności (i) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Pozostaje wykazać, że w przypadku własności (ii) ma miejsce charakteryzacja przeciwna.

Gdy permutacja $(x_1, \ldots, x_n)$ ma własność (ii), wówczas (mod n): $\sum t_k \equiv \sum k = s_n$ (sumowania po $k = 1, \ldots, n$). Ale jednocześnie $\sum t_k = \sum k + \sum x_k \equiv 2\sum k = 2s_n$. Stąd $s_n \equiv 0 \pmod{n}$; skoro $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że liczba n jest nieparzysta.

I na odwrót, dla nieparzystego n przykładową permutacją o własności (ii) może być ciąg $(1, \ldots, n)$. Uzyskane równoważności dowodzą tezy zadania.