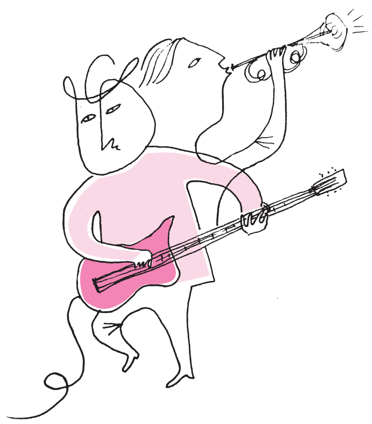


O przybliżaniu ułamkami

Wojciech CZERWIŃSKI

Jak dobrze można przybliżyć ułamkami liczbę rzeczywistą, na przykład liczbę π? Większość Czytelników zapewne wie, że można znaleźć ułamki (lub inaczej mówiąc liczby wymierne) dowolnie bliskie liczbie π. Takie coraz lepiej przybliżające ułamki to na przykład: $\frac{3}{1}$, $\frac{31}{10}$, $\frac{314}{100}$, $\frac{3141}{1000}$, $\frac{31415}{10\,000}$ itd. Nietrudno zauważyć, że tak samo można łatwo przybliżyć liczbę $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, e i dowolną inną liczbę rzeczywistą. Tę własność liczb wymiernych nazywa się *gęstością*. Istotnie, oznacza ona, że liczby wymierne są tak gęsto rozłożone wśród rzeczywistych, że wszędzie ich pełno – dowolną liczbę rzeczywistą można dowolnie dobrze przybliżyć.

Co jednak się stanie, jeśli zapytamy o przybliżanie ułamkami o mianownikach ograniczonych przez pewną liczbę? Przykładowo – jak dobrze można przybliżyć liczbę π przez ułamki o mianowniku co najwyżej 1000? Czy da się to zrobić z dokładnością lepszą niż $\frac{1}{1000}$? Okazuje się, że tak! Znajdzie się wśród nich taki, który przybliża π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Jednak w ogólności nie da się tego zrobić o wiele lepiej, o czym za chwilę. Co więcej, ta gałąź matematyki jest intensywnie badana, zawiera wiele głębokich rezultatów i jeszcze więcej od lat otwartych problemów. Wiąże się też zadziwiająco z wieloma pozornie niezwiązanymi dziedzinami. Ja osobiście trafiłem na nią poprzez moje badania naukowe dotyczące problemu dodawania wektorów, które opisywałem w Δ^{11}_{20}. Ten kierunek naprowadził mnie na rozważania nad liniowymi ciągami rekurencyjnymi, czyli ciągami będącymi w pewnym sensie uogólnieniem sławnego ciągu Fibonacciego. Okazuje się, że niektóre problemy dla liniowych ciągów rekurencyjnych wiążą się mocno z przybliżaniem liczb rzeczywistych liczbami pewnej specyficznej postaci (konkretnie liczbami algebraicznymi, które można uznać za uogólnienie ułamków).

Liczba rzeczywista jest algebraiczna, gdy jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych.

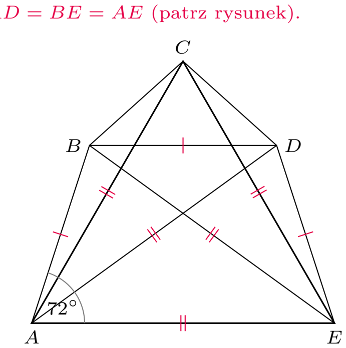
Wróćmy jednak do tematu. Powyżej wspomniałem, że liczbę π można przybliżyć z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ ułamkiem o mianowniku wynoszącym co najwyżej 1000. Jest to przypadek szczególny twierdzenia Dirichleta o aproksymacji, które sformułujemy w następującej wersji:

Twierdzenie 1 (Dirichleta)**.** *Dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej* $x \in \mathbb{R}^+$ *oraz liczby naturalnej* $N \in \mathbb{N}$ *istnieją takie liczby naturalne* $p, q \in \mathbb{N}$, *że* $q \leqslant N$ *oraz* $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$.

Równie dobrze moglibyśmy sformułować to twierdzenie dla dowolnej liczby rzeczywistej (niekoniecznie dodatniej), ale wtedy musielibyśmy brać pod uwagę $p, q \in \mathbb{Z}$, które mogą być ujemne. Stąd dla uproszczenia kwestii technicznych skupimy się na liczbach dodatnich. Dowód jest wyjątkowo prosty i korzysta z zasady szufladkowej Dirichleta, która była właśnie przez Petera Dirichleta spopularyzowana, i stąd jej polska nazwa (po angielsku nazywa się *pigeonhole principle*, gdzie *pigeonhole* oznacza przegródkę na dokumenty).

Dowód. Oczywiście nierówność $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$ jest równoważna tej samej nierówności pomnożonej stronami przez q, czyli $|qx - p| < \frac{1}{N}$. Skupimy się na dowodzeniu tej ostatniej. A zatem tak naprawdę chcemy pokazać, że istnieje taka wielokrotność qx liczby x, gdzie $q \leqslant N$, że qx jest odległe od liczby całkowitej nie więcej niż o $\frac{1}{N}$. Rozważmy liczby $0, x, 2x, 3x, \ldots, (N-1)x, Nx$ i ich części ułamkowe. Tych części ułamkowych jest $n+1$ i wszystkie należą do przedziału $[0, 1)$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwie z nich wpadną do tego samego spośród N przedziałów $[0, \frac{1}{N})$, $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N})$, $\ldots$, $[\frac{N-1}{N}, 1)$. Jeśli części ułamkowe ix oraz jx wpadają do tego samego przedziału dla pewnych $i, j \in \{0, \ldots, N\}$, $i < j$, to mamy $-\frac{1}{N} < (j-i)x - p < \frac{1}{N}$, a co za tym idzie $|(j-i)x - p| < \frac{1}{N}$ dla pewnej liczby $p \in \mathbb{N}$. Kładąc $q = j - i$, kończymy dowód. □

Rozwiązanie zadania M 1666.
Istnieje. Rozpatrzmy trójkąt równoboczny ACE oraz taki trapez $ABDC$, że $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $AD = BE = AE$ (patrz rysunek).



Wtedy też $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $\sphericalangle EAD = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Zatem $\sphericalangle BDA = \sphericalangle EAD = 36^\circ$ oraz $\sphericalangle DAB = 72^\circ - 36^\circ$, więc $AB = BD$. Łatwo zauważyć, że pięciokąt wypukły $ABCDE$ spełnia warunki zadania.

Zauważmy, że powyższy dowód jest niekonstruktywny w tym sensie, że nie bardzo widać, jak znaleźć ułamek przybliżający π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ inaczej niż naiwnie. Można oczywiście przeglądać wszystkie wielokrotności π, tzn. $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 1000\pi$, i badać ich części ułamkowe bądź też przeglądać wszystkie możliwe ułamki o mianownikach ograniczonych przez 1000, ale te sposoby są mało efektywne. Okazuje się jednak, że ma miejsce bardzo ciekawy fakt: najlepsze takie przybliżenia uzyskujemy, rozwijając przybliżaną liczbę w ułamek łańcuchowy. O tym fenomenie pisaliśmy w Δ^7_{18}, tutaj niestety nie ma miejsca, żeby choć pokrótce wyjaśnić, skąd się to bierze. Niemniej jednak bardzo zachęcam Czytelników do zgłębienia tego zaskakującego faktu. Jako ciekawostkę możemy pokazać, jak korzystając z ułamków łańcuchowych, znaleźć dobre przybliżenie liczby π. Największą liczbą naturalną przybliżającą π od dołu jest 3, więc nasz ułamek będzie postaci $3 + \frac{1}{x}$, natomiast $\pi = 3 + (\pi - 3)$. Warto zatem zrozumieć, ile wynosi $\frac{1}{\pi-3}$, aby wiedzieć, co ma przybliżać x. Łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{\pi-3} \approx 7{,}062$, więc warto wziąć $x = 7$. Wówczas ułamek łańcuchowy $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14285\ldots$ już dość dobrze przybliża π, ale możemy iść dalej. Niech więc $x = 7 + \frac{1}{y}$, wówczas nasze przybliżenie będzie postaci $3 + \frac{1}{7+\frac{1}{y}}$. Żeby zobaczyć, co ma przybliżać y, obliczmy, że $\frac{1}{\frac{1}{\pi-3}-7} \approx 15{,}9966$. A zatem świetnym przybliżeniem π powinno być $3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} \approx 3{,}1415094\ldots$ Idąc tym tropem, uzyskalibyśmy następne przybliżenie równe $\frac{355}{133} \approx 3{,}141592920\ldots$ To już ostatnie przybliżenie o mianowniku mniejszym niż 1000 i faktycznie, jak widzimy, przybliża ono π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Potem oczywiście dostalibyśmy jeszcze lepsze przybliżenia π, ale tu się zatrzymajmy.

Zauważmy, że twierdzenie Dirichleta łatwo implikuje następujący wniosek:

Wniosek. *Dla każdej niewymiernej liczby rzeczywistej dodatniej $x \in \mathbb{R}^+$ istnieje nieskończenie wiele takich ułamków $\frac{p}{q}$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.*

Istotnie, wyobraźmy sobie, że mamy już skończenie wiele takich przybliżeń, i chcemy znaleźć kolejne. Ponieważ liczba x jest niewymierna, to każde przybliżenie ma pewien błąd, istnieje więc też najlepsze dotychczas znalezione przybliżenie. Niech najlepsze z dotychczasowych przybliżeń będzie gorsze niż $\frac{1}{N}$ dla pewnego N. Z twierdzenia Dirichleta otrzymujemy, że istnieje taki ułamek $\frac{p}{q}$ dla $q \leqslant N$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{N}$, a więc więc ułamek ten nie jest żadnym z dotychczasowych. Ponadto $1/(qN) < 1/q^2$, zatem faktycznie dostajemy nowe przybliżenie. Kontynuując w ten sposób, możemy ich dostać nieskończenie wiele.

Bardzo naturalne jest pytanie, czy we wniosku nie dałoby się poprawić liczby 2 w wykładniku. Może można uzyskiwać przybliżenia z dokładnością do $\frac{1}{q^3}$, albo przynajmniej do $\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Okazuje się jednak, że nie, że liczba 2 jest optymalna, i stosunkowo łatwo to pokazać. Rozważmy wykładnik $C \in \mathbb{R}$ i przybliżanie liczb $x \in [0, 1]$. Zobaczmy, ile liczb może być przybliżonych ułamkiem $\frac{p}{q}$ z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$. Będą to ułamki w przedziale $\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^C}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^C}\right]$, a więc w przedziale o długości $2\frac{1}{q^C}$. Takich ułamków o mianowniku q w przedziale $[0, 1]$ jest co najwyżej $q + 1$, a więc długość przedziałów liczb przybliżanych dobrze (z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$) przez te ułamki to co najwyżej $2(q + 1)\frac{1}{q^C} \leqslant 4q\frac{1}{q^C} = \frac{4}{q^{C-1}}$. Jeśli każda liczba niewymierna z przedziału $[0, 1]$ miałaby być dobrze przybliżona nieskończenie wiele razy, to suma długości przedziałów dobrze przybliżanych przez ułamki o mianowniku q przesumowana po wszystkich możliwych $q \in \mathbb{N}$ musiałaby być nieskończona. Mamy jednak $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{4}{q^{C-1}} < \infty$ dla $C > 2$, co pokazuje, że nie każda liczba rzeczywista da się dobrze przybliżać ułamkami, gdzie przez *dobrze* rozumiemy przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$ dla $C > 2$.

Można jednak powiedzieć: zgoda, nie każda liczba da się dobrze przybliżyć dla $C > 2$, ale jednak pewne liczby dadzą się dobrze przybliżyć. Przykładowo

Rozwiązanie zadania F 1019.
Postać zależności częstości drgań struny od jej masy, długości i naciągu najłatwiej znaleźć, posługując się analizą wymiarową. Przyjmujemy, że:

$$f \propto l^\alpha m^\beta F^\gamma,$$

gdzie symbol $\propto$ oznacza proporcjonalność. Wymiar wyrażenia po prawej stronie proporcjonalności musi być równy wymiarowi częstości, $[f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$ – symbol $[\,.\,]$ oznacza tu „pobranie” wymiaru wielkości w nawiasie kwadratowym. Wypiszmy wymiary wielkości po prawej stronie: $[l] = 1$ m, $[m] = 1$ kg, $[F] = 1\ \mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Każda z jednostek, po obu stronach proporcjonalności, musi występować w tej samej potędze. Warunek ten prowadzi do układu równań:

$$-2\gamma = -1,$$
$$\beta + \gamma = 0,$$
$$\alpha + \gamma = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu są: $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy zależność:

$$f \propto \sqrt{\frac{Fl}{m}}.$$

Jak widać, właściwości materiału, z jakiego wykonana jest struna, nie mają znaczenia dla wysokości jej tonu podstawowego. Rodzaj materiału ma natomiast wpływ na barwę dźwięku (proporcje natężeń wyższych składowych) i komfort gry palcami, np. na gitarze. Ma także wpływ na siłę naciągu dla tego samego tonu – stal wymaga większej siły niż nylon i stąd struny nylonowe montuje się często do starych instrumentów.

liczby wymierne przybliżane są idealnie przez liczby wymierne (liczba przybliża idealnie samą siebie). Wiadomo też, że istnieją liczby niewymierne, które są bardzo dobrze przybliżane liczbami wymiernymi. W 1840 roku francuski matematyk Joseph Liouville'a podał prosty przykład takiej liczby, zwanej teraz stałą Liouvilla. Zdefiniował on

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}11000100000000\ldots$$

W liczbie L, w rozwinięciu dziesiętnym jedynki stoją na pozycjach $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ itd. po przecinku. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$, gdy weźmiemy $m = k!$ i obetniemy rozwinięcie L na m-tej cyfrze po przecinku (która to jest jedynką), to potem następuje $(k+1)! - k! - 1 = k \cdot k! - 1$ zer. A zatem to obcięcie jest bardzo dobrym przybliżeniem L, ułamkiem o mianowniku 10^m przybliżającym L z dokładnością przynajmniej $\left(\frac{1}{10^m}\right)^k$. Widać więc, że L może być przybliżone z dokładnością do $\frac{1}{q^k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ nieskończenie wiele razy (obcięciem po k-tej jedynce, $(k{+}1)$-szej jedynce, $(k{+}2)$-giej jedynce itd.). Co ciekawe, w 1844 roku Liouville wykazał, korzystając właśnie z własności dobrego przybliżania, że L jest liczbą przestępną (inaczej niealgebraiczną), czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych (jak np. $\sqrt[3]{7}$ czy $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Była to w ogóle pierwsza liczba, dla której udało się wykazać, że jest przestępna.

Jak wiele więc jest takich liczb i jaką mają one postać? Tu zaczynają się schody. Okazuje się, że prawdą jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Thue–Siegel–Roth)**.** *Dla każdej niewymiernej liczby algebraicznej x oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieje tylko skończenie wiele par $p, q \in \mathbb{N}$ takich, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$.*

Zauważmy, że twierdzenie to w szczególności implikuje, że liczba L jest przestępna. Jego historia jest bardzo długa. W 1909 roku udowodnił je Axel Thue, przy czym zamiast wykładnika $2 + \varepsilon$ był wykładnik $d/2 + 1 + \varepsilon$. Tutaj d to stopień liczby algebraicznej, czyli minimalny stopień wielomianu o współczynnikach całkowitych takiego, że dana liczba algebraiczna jest jego pierwiastkiem. Przykładowo stopień liczby $\sqrt[5]{13}$ to 5, bo jest pierwiastkiem $x^5 - 13$ (a innego takiego wielomianu o mniejszym stopniu nie ma), a stopień liczby $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ to 2, bo jest ona pierwiastkiem $x^2 - x - 1$. Następnie Carl Ludwig Siegel poprawił wykładnik do $2\sqrt{d} + \varepsilon$, Freeman Dyson do $\sqrt{2d} + \varepsilon$ w 1947 roku, aż w końcu brytyjski matematyk Klaus Roth udowodnił je w roku 1955 w ostatecznej formie dla wykładnika $2 + \varepsilon$. Właśnie za ten wynik Roth otrzymał najwyższe możliwe odznaczenie matematyczne, w 1958 roku uhonorowano go Medalem Fieldsa. Techniki, których używano, to rozważanie wielomianów wielu zmiennych (liczba zmiennych zależy od ε). Niestety w *Delcie* jest zdecydowanie za mało miejsca, żeby je przedstawić.

O przybliżaniu liczb rzeczywistych ułamkami albo, co też ciekawe, liczbami algebraicznymi można powiedzieć jeszcze bardzo wiele. Stoi za tą dziedziną głęboka matematyka, a wiele kwestii wciąż jest niezrozumianych. Przykładowo za twierdzenie Bakera, które mówi o pewnego rodzaju przybliżaniu liczbami algebraicznymi, przyznano w 1970 roku Medal Fieldsa. Dzięki temu twierdzeniu możemy udowodnić tak naturalny fakt, jak to, że równanie $2^x - 3^y = 2021$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań (i liczby 2, 3 oraz 2021 nie są tu w niczym szczególne, oprócz tego, że proste liczenie modulo nie ogranicza rozwiązań). Ja osobiście nie wiem, jak i czy można to wykazać bez twierdzenia Bakera, być może Czytelnicy znajdą alternatywne rozwiązanie. O szacowaniu różnicy $|2^x - 3^y|$ oraz twierdzeniu Bakera ciekawie pisze na swoim blogu Terrence Tao, przez wielu uznany za aktualnie najlepszego matematyka na świecie: `terrytao.wordpress.com/2011/08/21/hilberts-seventh-problem-and-powers-of-2-and-3/`. Tego typu rozważania to jednak temat na zupełnie inną opowieść.

Rozwiązanie zadania F 1020.
Jeśli orbita pozostaje przez cały czas bardzo bliska orbicie kołowej, to znaczy, że w każdym punkcie toru promień wodzący jest z dobrym przybliżeniem prostopadły do chwilowej prędkości v satelity, i możemy rozpatrywać równowagę sił jak dla orbity kołowej (siła F jest bardzo mała w porównaniu z siłą grawitacji). Niech satelita ma masę m. Oznaczmy iloczyn stałej grawitacyjnej G i masy Ziemi M jako $\gamma = GM$. Dla orbity kołowej zachodzi związek:

$$\frac{\gamma m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Otrzymujemy zależność:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}.$$

Energia całkowita wynosi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma m}{r} = -\frac{\gamma m}{2r}.$$

Energia całkowita maleje pod wpływem działania siły $F = -A\ v^\alpha$ z szybkością równą mocy $F \cdot v = -A\ v^{\alpha+1}$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma m}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -A\ \left(\frac{\gamma}{r}\right)^{(\alpha+1)/2}.$$

Ostatecznie szukana prędkość zmiany odległości od Ziemi wynosi:

$$\frac{dr}{dt} = -2\frac{A}{m}\gamma^{(\alpha-1)/2}r^{(3-\alpha)/2}.$$

Dla $\alpha = 3$ prędkość zbliżania się do Ziemi byłaby stała. Należy jednak pamiętać, że wraz ze zmniejszaniem się r rośnie gęstość atmosfery, a więc nawet przy zachowaniu postaci zależności F od v powinniśmy do naszego modelu wprowadzić zależność współczynnika A od r.

Bardzo polecam blog Terrenca Tao, w szczególności jego porady dotyczące kariery matematycznej na różnych poziomach zaawansowania (zaczynając od szkoły podstawowej): `terrytao.wordpress.com/career-advice/`