

Spokojnie, to tylko wielomian

Mariusz SKAŁBA*

Niech $f(x) = x^3 - 2x$. Wokół tego prostego wielomianu zogniskują się nasze rozmyślenia na przestrzeni tego artykułu. Najpierw wykażemy, że f traktowany jako funkcja $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ jest iniekcją. Załóżmy nie wprost, że istnieją różne $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ takie, że

$$x_1^3 - 2x_1 = x_2^3 - 2x_2.$$

Przekształcamy powyższą równość:

$$x_1^3 - 2x_1 - x_2^3 + 2x_2 = 0 \iff (x_1^3 - x_2^3) - 2(x_1 - x_2) = 0.$$

Lewą stronę ostatniego wzoru rozkładamy na czynniki:

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2 = 0 \text{ (gdyż } x_1 \neq x_2).$$

Wykażemy teraz, że równanie

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x_1, x_2 . Jeśli $x_1 = a/c, x_2 = b/c$ (gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$) jest takim rozwiązaniem, to możemy założyć od początku, że $\text{NWD}(a, b, c) = 1$. Mamy zatem

$$a^2 + ab + b^2 = 2c^2,$$

skąd wynika natychmiast, że liczby a, b nie mogą być jednocześnie nieparzyste.

Otrzymujemy dalej, że obie są parzyste, czyli $a = 2A, b = 2B$, gdzie $A, B \in \mathbb{Z}$.

Równanie przyjmuje postać:

$$4A^2 + 4AB + 4B^2 = 2c^2 \Rightarrow 2A^2 + 2AB + 2B^2 = c^2,$$

zatem również $c = 2C$, gdzie $C \in \mathbb{Z}$. Wychodzi na to, że $\text{NWD}(a, b, c) \geq 2$ – czyli sprzeczność.

Z drugiej strony wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest surjekcją – najprostsze uzasadnienie korzysta z własności Darboux funkcji ciągłych i konstatacji

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Podsumujmy:

- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ jest iniekcją, ale nie jest surjekcją, gdyż np. 2 nie jest postaci $x^3 - 2x$ dla żadnego $x \in \mathbb{Q}$;
- wielomian $f(x)$ traktowany jako funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest surjekcją, ale nie jest iniekcją, gdyż np. $f(\sqrt{2}) = f(0) = 0$.

Wykażemy teraz główny wynik naszego artykułu:

Istnieje $\mathbb{Q} \subset X \subset \mathbb{R}$ taki, że f dane powyższym wzorem jest bijekcją $f: X \rightarrow X$.

Oto dowód. Dla każdej liczby rzeczywistej a rozpatrzmy zbiór $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{R}$.

Jest on niepusty i co najwyżej trójelementowy. Określmy teraz funkcję $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, to z poprzednich rozważań wynika, że ten zbiór jest jednoelementowy; oznaczmy jego jedyny element przez $g(a)$. W przypadku, gdy $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, określamy $g(a) := \min(f^{-1}(\{a\}))$. W ten sposób określiliśmy funkcję $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia warunek

$$f(g(a)) = a \text{ dla każdego } a \in \mathbb{R}.$$

Możemy teraz określić docelowy zbiór X :

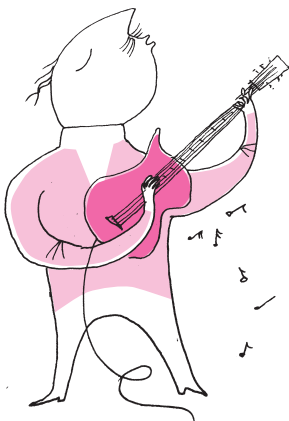
$$X := \bigcup_{k=0}^{\infty} g^k(\mathbb{Q}),$$

gdzie $g^k(\mathbb{Q})$ oznacza obraz zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} przy k -krotnej iteracji funkcji g (przyjmujemy, że $g^0(x) := x$ dla $x \in \mathbb{R}$).

Wykażemy najpierw, że $f(X) \subset X$. Niech więc $x \in X$ i rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $x \in g^k(\mathbb{Q})$ dla pewnego $k > 0$. Wówczas istnieje $w \in \mathbb{Q}$ takie, że $x = g^k(w)$. Mamy

$$f(x) = f(g^k(w)) = f(g(g^{k-1}(w))) = g^{k-1}(w) \in X.$$

W pozostałym przypadku $x \in g^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ mamy też $f(x) \in \mathbb{Q} = g^0(\mathbb{Q}) \subset X$.



Teraz wykażemy, że $f(X) = X$. Niech więc $y \in X$. Zatem $y = g^k(w)$ dla pewnego $k \geq 0$ oraz $w \in \mathbb{Q}$. Połóżmy $x := g(y)$. Wówczas $f(x) = f(g(y)) = y$ oraz $x = g^{k+1}(w) \in X$.

Wreszcie wykażemy, że $f : X \rightarrow X$ jest różnowartościowa. Niech więc $x_1, x_2 \in X$ oraz załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$. Oznaczmy tę wspólną wartość przez a . Możemy napisać

$$x_1 = g^k(w_1), \quad x_2 = g^m(w_2), \quad \text{gdzie } k \geq 0, m \geq 0, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}.$$

Jeżeli obie liczby k, m są dodatnie, to

$$f(x_1) = f(g^k(w_1)) = g^{k-1}(w_1), \quad f(x_2) = f(g^m(w_2)) = g^{m-1}(w_2),$$

czyli $g^{k-1}(w_1) = g^{m-1}(w_2)$. Otrzymujemy stąd

$$x_1 = g^k(w_1) = g(g^{k-1}(w_1)) = g(g^{m-1}(w_2)) = g^m(w_2) = x_2.$$

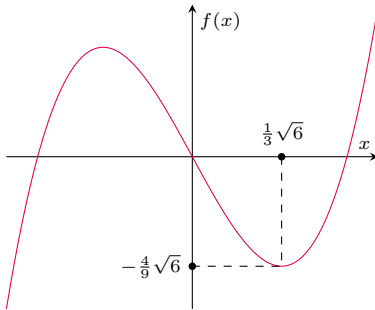
Rozpatrzmy przypadek $k = 0, m > 0$. Teraz $x_1 \in \mathbb{Q}$ oraz

$$f(x_1) = g^{m-1}(w_2).$$

Z określenia funkcji g mamy teraz $x_1 = g(g^{m-1}(w_2))$, czyli $x_1 = x_2$.

W ostatnim przypadku $k = m = 0$ powołujemy się na wykazaną wcześniej różnowartościowość funkcji $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ i otrzymujemy $x_1 = x_2$.

Zajmiemy się na koniec funkcją $g : X \rightarrow X$ pod kątem jej ciągłości w różnych punktach. Jest to funkcja odwrotna do „gładkiej” bijekcji $f : X \rightarrow X$. Faktycznie funkcja $f : X \rightarrow X$ jest ciągła, ale nazwalimy ją „gładką”, gdyż jest obcięciem do X wielomianu trzeciego stopnia! Wykażemy natomiast, że g nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$!



Standardowymi metodami analizy matematycznej można uzasadnić, że $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ jest najmniejszą wartością f na dodatniej półprostej, przyjmowaną dla argumentu $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Łatwo wynika stąd, że dla dowolnego $y \in X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$ istnieją $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ takie, że $x_1 < -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ oraz $x_2 > \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Oczywiście $x_1 < x_2$ oraz $f(x_1) = f(x_2) = y$. Niech teraz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_1 , natomiast $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_2 . Ponieważ f jest wszędzie ciągła, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_1) = y$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_2) = y$. Mamy dalej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_2,$$

czyli, na mocy definicji Heinego, g nie może być ciągła w y .

Wyszło na to, że zwykła bijekcja $f : X \rightarrow X$ ma dość niezwykłą bijekcję odwrotną g – ale moderując zaistniałą sytuację w duchu tytułu, uspokójmy Czytelników: *konstruując funkcję g , nie skorzystaliśmy nawet z pewnika wyboru!*

Matematyczny kącik muzyczny IV: O tym, jak przydatne jest dudnienie

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

W numerze Δ_{20}^8 omówiliśmy sposoby strojenia instrumentów, jakie ludzkość opracowała na przestrzeni wieków. Ta część problemu jest natury koncepcyjnej i daje się całą opisać na kartce papieru. Ostatecznie jednak chcemy, by stojący obok nas instrument (na przykład fortepian) był nastrojony, a sama kartka papieru zapisana obliczeniami, jak potrzebne by one nie były, nie rozwiąże za nas tego problemu. Żyjemy w czasach, w których dostępne są urządzenia elektroniczne oraz przeróżne aplikacje wspomagające nas w strojeniu instrumentów, najczęściej gitary. Pojawia się pytanie: w jaki sposób radzono sobie w czasach, gdy takich „wspomagaczy” nie było?

Oczywiście muzycy mają statystycznie lepszy słuch i są wrażliwsi na różnice pomiędzy dźwiękami. Dlatego dużo łatwiej jest im zbliżyć się do zgodnego brzmienia. Gdy różnica pomiędzy częstotliwościami obu dźwięków jest jednak niewielka, nawet wprawne ucho może mieć trudności z jej wychwyceniem. W tej sytuacji wykorzystuje się tzw. *zjawisko dudnienia*.

* Student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski