

# deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $E=hc/\lambda$   $\pi=3,141592\dots$

NR 2 (561) 2021

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIECZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Ile barw  
ma tęcza?

str. 15



Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (561)

Beta, Bit i pochodne po bieżczadzkich szlakach

*Przemysław Biecek*

str. 1

Mój wybór jest mój

*Adam Bednorz*

str. 4

Ułamki Fibonacciego

*Karol Gryszka*

str. 6



Zadania

str. 9

Lepszy papier w garści i źle zatemperowany ołówek

*Mariusz Skalba*

str. 10

Obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd: wymuszona implozja

*Miguel Figueira*

str. 12

O tym, jak Martynałow uratował królestwo

*Zofia Miśkiewicz, Michał Miśkiewicz*

str. 13

Ile barw ma tęcza?

*Marcin Braun*

str. 15

⚡ Nie tylko szachy i gra go...

*Magdalena Fikus*

str. 16

Klub 44

str. 17

Prosto z nieba: Jeziora pod powierzchnią Marsa

str. 22

Niebo w lutym

str. 22

Aktualności

Siostra

str. 24



Geometria analityczna

*Bartłomiej Bzdęga*

str. 25

W następnym numerze:



Istnieje podejrzenie, że portret przedstawia Roberta Hooke'a, twórcę teorii grawitacji Newtona.

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:** Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Beta, Bit i pochodne po bieszczadzskich szlakach

\* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

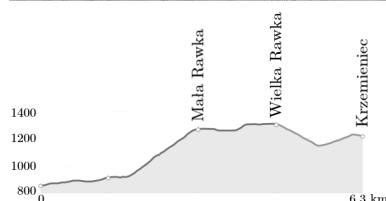
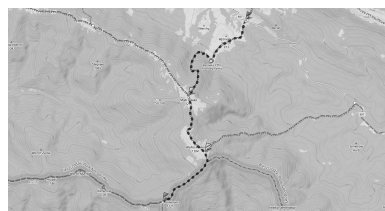


## Rozwiązanie zadania F 1017.

Całkowita praca  $W$  włożona w ustawianie bloków wapienia w piramidę jest równa całkowitej pracy potrzebnej do podniesienia jej całkowitej masy  $M$  na wysokość równą wysokości jej środka masy nad podstawą:  $W = MgH/4$ . Całkowita masa  $M = \rho a^2 H/3$  – skorzystaliśmy ze wzoru na objętość ostrosłupa o podstawie kwadratowej i wysokości  $H$ :  $V = a^2 H/3$ . Czas  $t$  ułożenia bloków wapienia wyniesie  $t = W/P$ . Otrzymujemy:

$$t = \frac{\rho a^2 H^2 g}{12P}$$

Ostatecznie  $t \approx 5,144 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 59,5$  dnia, czyli około dwóch miesięcy. Przyjmuje się, że czas budowy piramidy wynosił około 20 lat.



Szlak z Przełęczy Wyżniańskiej na Krzemieniec wraz z profilem wysokości. Rysunki pochodzą z portalu [mapa-turystyczna.pl](http://mapa-turystyczna.pl)

## Przemysław BIECEK\*

– Wstawać śpiochy! – Ściany niewielkiej chatki zadrżały od wrzasku Taty – Idziemy w góry!

Beta, Bit i Tata dzień wcześniej przyjechali do Schroniska pod Małą Rawką na wakacje. Ostatkiem sił po całodniowej podróży dzieci wtargały bagaże do małego pokoiku. Pokoik miał piękny widok na bieszczadzkie połoniny, ale tego dzieci nie zauważyły. Bez sił padły na łóżka i zasnęły. A teraz ktoś ośmiela się je budzić.

– Tato, przecież są wakacje! – Beta z zamkniętymi oczami podjęła próby negocjacji.

– Tato, przecież jest noc! – Bit zakopany pod kołdrą starał się zrozumieć, dlaczego ktoś przerywa jego błogi sen.

– Jaka noc? Już 6 rano! – Zawołał entuzjastycznie Tata. – Chodźcie, zaplanujemy trasę na dzisiaj!

Beta i Bit zadrżeli. Już sama pobudka o tak skandalicznie wczesnej godzinie była karygodnym przestępstwem. Ale wygląda na to, że szykuje się coś dużo gorszego. „Planowanie”, czyli, w żargonie Taty, szczegółowe roztrząsanie możliwych za i przeciw stojących przed pozornie banalnymi wyborami. Może trzeba było udawać, że z powodu pandemii odwołano wakacje i szkoła wciąż trwa?

– Chodźcie na dół, śniadanie już czeka! – Tata dorzucił, zbiegając po schodach na dół.

Kilka minut później Beta i Bit pałaszowali jajecznicę, jednocześnie z niepokojem patrząc na swojego tatę. Stał w akademickiej pozie przy ścianie, na której zawieszona była wielka mapa okolicy, i mruczał pod nosem, analizując możliwe trasy. Zanosilo się na wykład.

– Może zacznijmy od najkrótszej? – zasugerowała Beta. Zabrała ze sobą okazałą kolekcję książek i chciała spędzić popołudnie na hamaku, czytając jedną z nich.

– Albo od najbardziej płaskiej? – dodał Bit. Ten z kolei zabrał ze sobą sporą kolekcję elektronicznego sprzętu i nie chciał go wnosić po stromych szlakach.

– To świetny pomysł! A czy wiecie, jak sprawdzić, który szlak jest najbardziej płaski? – Oczy Taty zapłonęły w niepokojący sposób.

– Stąd do restauracji? Wygląda na dosyć płaski. – Bit już wiedział, co się zbliża.

– Być może. Ale czy wiecie, jak to sprawdzić? Policzymy pochodną po Bieszczadach!

### Jak obliczyć pochodną?

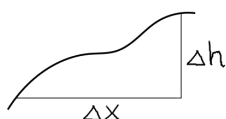
Pochodna to pojęcie używane w analizie matematycznej do opisu, jak szybko zmienia się dana funkcja. Pochodne mają wiele zastosowań praktycznie w każdym aspekcie naszego życia. Podstawy rachunku różniczkowego znane były już starożytnym. Ale za ojca tego obszaru matematyki uznaje się Isaaca Newtona lub Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Panowie kłócili się między sobą o to, kto był pierwszy, i ten spór trwa nawet po ich śmierci. Ale jest to temat na inne opowiadanie.

Aby wyjaśnić, czym jest pochodna, przyjrzyjmy się przykładowej trasie z Przełęczy Wyżniańskiej na Krzemieniec przez Małą i Wielką Rawkę.

Na mapie turystycznej ten szlak jest dosyć kręty. Ponieważ w parkach narodowych nie można schodzić ze szlaków, więc na tę trasę możemy patrzeć nie przez pryzmat współrzędnych geograficznych, ale przez profil wysokości, tak jak na rysunku obok.

R to język programowania zaprojektowany do analizy danych. Środowisko programistyczne R można bezpłatnie pobrać ze strony [www.r-project.org](http://www.r-project.org). Nie za krótkie wprowadzenie dla dociekliwych można znaleźć na stronie [biecek.pl/R](http://biecek.pl/R). Aby wykonać poniższe przykłady, należy zainstalować pakiet BetaBit, można to zrobić poleceniem `install.packages("BetaBit",dep=TRUE)`

```
library("BetaBit")
krzemieniec =
  read_gpx("krzemieniec.gpx",
    name = "Krzemieniec")
plot(krzemieniec)
```



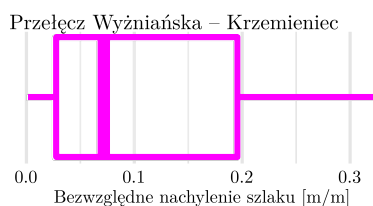
$$d = \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

Pochodna to przyrost wysokości na nieskończenie małym odcinku.

Argument `type = "difference"` powoduje, że zamiast profilu wysokości rysowana jest pochodna po szlaku.

```
plot(krzemieniec,
  type = "difference")
```

```
plot(krzemieniec,
  type = "boxplot")
```

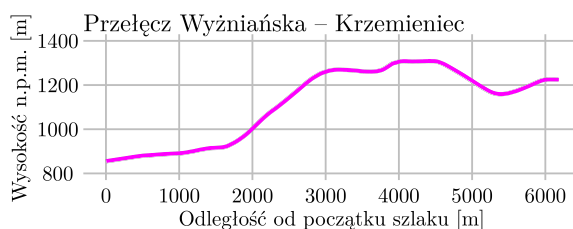


Portal [mapa-turystyczna.pl](http://mapa-turystyczna.pl) pozwala na pobranie informacji o szlaku w formacie gpx. Wystarczy kliknąć przycisk **Pobierz GPX** w bocznym panelu, by pobrać szczegółowe informacje o trasie.

Tak pobraną trasę możemy wczytać do programu R. Poniższe przykłady są całkowicie reprodukowalne. Gdybyście więc chcieli sprawdzić je na swoich komputerach na szlakach Bieszczad lub innych gór, możecie wykorzystać instrukcje zaprezentowane na marginesie.

Wszystkie funkcje niezbędne, by odtworzyć te przykłady, znajdują się w pakiecie BetaBit. Instrukcja `library()` wczytuje ten pakiet. Następnie wykorzystujemy funkcję `read_gpx()` do wczytania danych i funkcję `plot()` do narysowania szlaku.

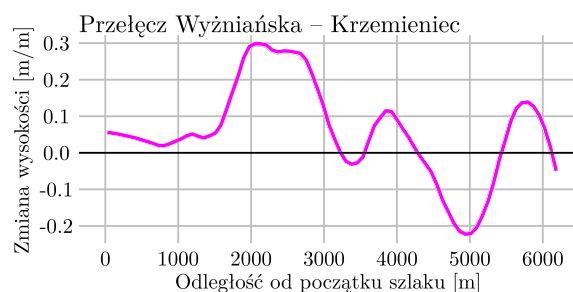
W wyniku przykładu z marginesu otrzymamy wykres z profilem wysokości. Podkreślmy, że oś pionowa jest wydłużona w stosunku do poziomej, przez co wykresy są bardziej strome niż rzeczywiste nachylenie szlaku.



Najwyższy punkt na tym wykresie to Wielka Rawka, a wcześniejszy szczyt to Mała Rawka. Pomiędzy tymi szczytami jest całkiem przyjemne przejście granią. Ale już z profilu wysokości widzimy, że przed Małą Rawką czeka nas całkiem strome podejście.

Pochodna opisuje, jak szybko wznosi się lub opada szlak. Jeżeli na 100 metrów szlaku (liczone w poziomie) wznosi się on o 1 metr, to średnie tempo wzrostu wynosi  $\frac{\text{zmiana wysokości}}{\text{zmiana odległości}}$ , czyli  $\frac{1}{100}$ . Oczywiście na odcinku 100 metrów szlak może trochę się wznosić i trochę opadać, więc aby mieć dokładniejszy opis, trzeba by sprawdzić, o ile szlak wznosi się na odcinku 10 metrów. Albo jeszcze lepiej na odcinku 1 metra. A jeszcze dokładniej byłoby, gdybyśmy mierzili te zmiany na odcinku 10 cm. Oczywiście ten odcinek możemy zmniejszać i zmniejszać. Pochodna definiowana jest matematycznie jako tempo zmiany na bardzo małym, nieskończenie małym odcinku.

Ale odległości w górach są duże, więc my zadowolimy się odcinkami o długości 25 metrów. Zobaczmy, jak wygląda pochodna po szlaku z Przełęczy Wyżniańskiej na Krzemieniec.



Bitka interesowała stromość szlaku. Ponieważ szlak trzeba przejść w dwie strony, więc spadek nachylenia w jedną stronę będzie wzrostem nachylenia w drodze powrotnej. Zobaczmy więc, jak się zmienia wartość bezwzględna pochodnych po szlaku.

Wykres na marginesie to tak zwany wykres pudełkowy. Ilustruje pięć liczb. Końcówki wąsów pokazują, jakie było najmniejsze nachylenie na szlaku (oczywiście 0) i jakie było największe nachylenie (prawie 40 cm na metr). Brzegi



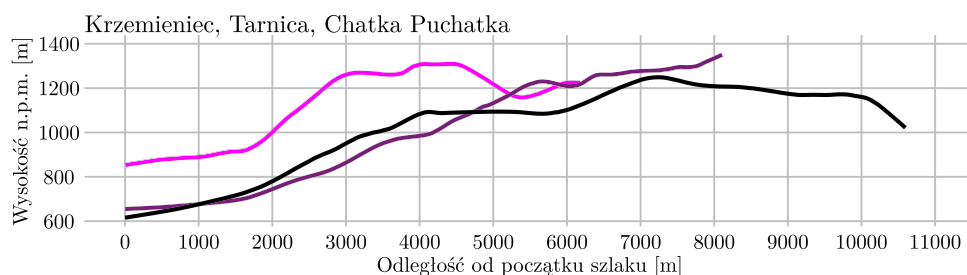
i środek pudełka pokazują, odpowiednio, jakie nachylenie ma 25%, 50% i 75% szlaku. W przypadku tego szlaku połowa kroków ma nachylenie poniżej 7 cm na metr.

Mam nadzieję, że jesteście już przekonani, że pochodna to użyteczne narzędzie do analizy szlaków w górach. Pomóżmy teraz Bitowi w wyborze najbardziej płaskiego szlaku z trzech, które rozważa Tata. Ponownie z serwisu [mapa-turystyczna.pl](http://mapa-turystyczna.pl) pobieramy informacje o szlakach:

- z Przełęczy Wyżniańskiej na Krzemieniec, zapisany w pliku `krzemieniec.gpx`,
- z Ustrzyk Górnych na Tarnicę, zapisany w pliku `tarnica.gpx`,
- z Wetliny do Chatki Puchatka przez Szare Berdo, zapisany w pliku `chatka.gpx`.

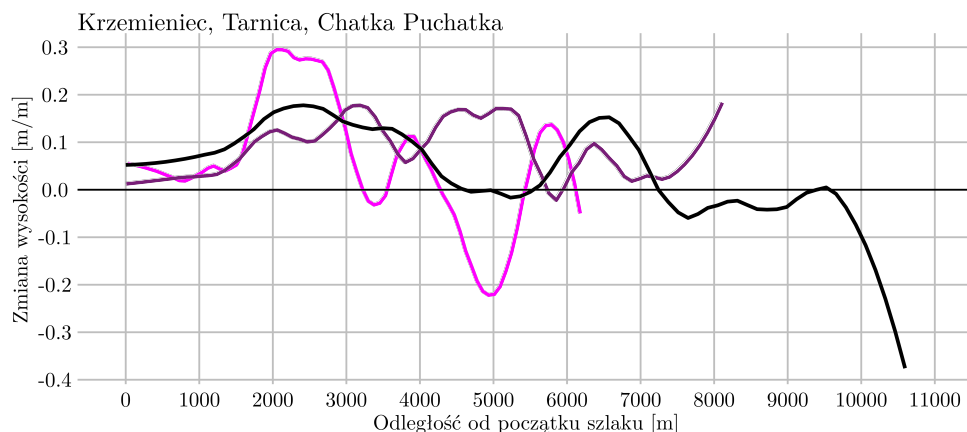
Zobaczmy, jak wyglądają profile wysokości tych szlaków. Szlak na Krzemieniec zaznaczymy jaśniejszym kolorem, a do Chatki Puchatka kolorem czarnym.

```
krzemieniec =
  read_gpx("krzemieniec.gpx",
    name = "Krzemieniec")
tarnica =
  read_gpx("tarnica.gpx",
    name = "Tarnica")
chatka =
  read_gpx("chatka.gpx",
    name = "Chatka Puchatka")
plot(krzemieniec,
  tarnica, chatka)
```

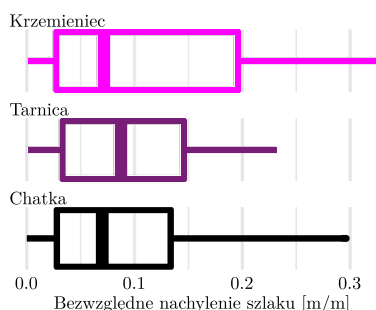


Z pewnością szlak na Krzemieniec jest najkrótszy. Ale czy najłatwiejszy? Zobaczmy, jak wyglądają pochodne dla tych trzech szlaków.

```
plot(krzemieniec,
  tarnica, chatka,
  type = "difference")
```



```
plot(krzemieniec,
  tarnica, chatka,
  type = "boxplot")
```



Dużo się dzieje na tych szlakach, mają one nieregularne przebiegi. Znacznie łatwiej będzie porównać nachylenia, jeżeli podsumujemy pochodne przy użyciu wykresów pudełkowych przedstawionych na marginesie.

Jak myślicie, którego szlaku nie powinien wybrać Bit?

### Rozwiązania zadań z artykułu *O tym, jak Martynałow uratował królestwo* (str. 14)

1. Tym razem do rozwiązania mamy

$$\begin{cases} x + y = C, \\ x + 2y = 200 - 65, \\ x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases}$$

co daje  $x = -45$ ,  $y = 90$  i w rezultacie cenę kontraktu  $C = 45$  tal.

2. Miara martyngałowa nie zależy od ceny wykupu, więc pozostaje niezmienną! Odpowiadająca jej cena to  $\frac{1}{3} \cdot (200 - 65) = 45$  tal. – ta zbieżność nie jest przypadkowa.

3. Tym razem niewiadomą jest cena wykupu  $K$ . Z układu równań

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ x + 2y = 200 - K, \\ x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

wyznaczamy  $x = -30$ ,  $y = 60$ , a następnie cenę wykupu  $K = 110$ .

# Mój wybór jest mój

\*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Adam BEDNORZ\*

W ludzkiej świadomości zakorzenione jest poczucie wolnej woli czy swobodnego wyboru. Przeciwnością wolnego wyboru jest determinizm – przyjęcie, że wszystko ma jednoznaczną przyczynę i tylko ludzimy się, że mamy możliwość wyboru. Problem, czy świat jest całkowicie deterministyczny, czy mamy jednak wolną wolę, rozważali między innymi Arystoteles, Augustyn z Hippony, Tomasz z Akwinu oraz Gottfried Leibniz. Wolność wyboru to nie tylko kwestia religii – wolność czynienia dobra lub zła, ale także prawa karnego – przestępstwa umyślnego, lub też interfejsów rozmaitych urządzeń – muszą być one w gotowości wykonania dowolnego polecenia spośród możliwych.

Tymczasem szkolna fizyka o wolnej woli nie wspomina. Poznaje się tylko deterministyczną część fizyki, głównie klasyczną, gdzie stan zmienia się jednoznacznie przy określonych warunkach początkowych. Są też zjawiska losowe, ale wybór losowy nie musi być wyborem swobodnym, może np. wynikać z wartości ukrytego parametru, który nie jest swobodny. Co prawda możemy przyjąć swobodę wyboru warunków początkowych, a nawet swobodę interwencji w trakcie jakiegoś fizycznego procesu, ale w opisie klasycznym to tylko zmienia ciąg dalszy, jak przestawienie zwrotnicy na torach.

Problemu wolnej woli nie da się jednak zignorować w mechanice kwantowej. Swobodne interwencje w odległych miejscach komplikują realistyczną interpretację pomiarów kwantowych jako ujawnianie ukrytych parametrów lokalnych. Zauważyli to Albert Einstein wraz Borysem Podolskim i Nathanem Rosenem w 1935 roku [1], ale nie potrafili przełożyć swoich spostrzeżeń na doświadczenie.

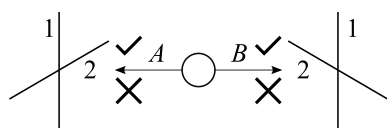
W 1964 roku irlandzki fizyk John Stewart Bell zaproponował eksperyment, który miałby sprawdzić wpływ swobodnego wyboru na pomiary w sytuacji dwóch oddalonych obserwatorów  $A$  i  $B$  [2]. Obserwator mierzy obiekt, który jest w stanie  $\psi$ , odpowiadającym pewnemu kierunkowi (kątow) na płaszczyźnie. Pomiar polega na sprawdzeniu zgodności z innym stanem  $\phi$ , a wynik pomiaru jest losowy, przy czym zgodność występuje z prawdopodobieństwem  $\cos^2(\psi - \phi)$ . I tu właśnie pojawia się możliwość wolnego wyboru. To my, a raczej sterowana przez nas aparatura pomiarowa, ustalamy  $\phi$ , dla którego mamy dwie możliwe odpowiedzi, zgodność lub jej brak. Brak zgodności jest równoważny zgodności ze stanem prostopadłym, tj.  $\phi \pm 90^\circ$ .

Każdy obserwator mierzy swój obiekt, czyli możliwe stany to para kątów  $\alpha\beta$ , gdzie najpierw piszemy stan  $A$ , a potem  $B$ . Ciekawszy jednak będzie stan splątany  $0^\circ 90^\circ - 90^\circ 0^\circ$ , który jest superpozycją stanów  $0^\circ 90^\circ$  oraz  $90^\circ 0^\circ$ , dzięki czemu ma następującą ważną własność. Gdybyśmy tylko mogli sprawdzać, czy obiekt jest w stanie  $0^\circ$ , czy  $90^\circ$ , nie byłoby zaskoczenia – odczytalibyśmy zgodność z  $0^\circ$  w  $A$  i  $90^\circ$  w  $B$  lub na odwrót, z takim samym prawdopodobieństwem równym  $1/2$ . To tak jak z losowaniem butów w ramach jednej pary. Jeśli pierwszy okaże się prawy, to drugi musi być lewy, i odwrotnie. Bell lubił przykład swojego znajomego, Reinholda Bertlmana, który zawsze nosi (do dzisiaj!) dwie różne skarpetki.

Niestety problemy pojawiają się przy dowolnych pomiarach. Obserwator  $A$  może zmierzyć zgodność swojego obiektu z dowolnie wybranym stanem  $\alpha$ , a obserwator  $B$  – z dowolnym stanem  $\beta$ . Dla stanu splątanego prawdopodobieństwo jednoczesnej zgodności dla obu obserwatorów wynosi  $\sin^2(\alpha - \beta)/2$ . Obserwatorzy mogą sobie wybierać  $\alpha$  i  $\beta$ . Dla uproszczenia przyjmijmy dalej, że każdy ma tylko dwie możliwości:  $\alpha_1 = 0^\circ$  lub  $\alpha_2 = 60^\circ$  oraz  $\alpha_1 = 0^\circ$  lub  $\alpha_2 = -60^\circ$  (patrz rysunek). Bell postawił pytanie: **Czy oddalone obiekty mogą ujawniać ukryte parametry – wyniki swobodnie wybranych pomiarów, z prawdopodobieństwem przewidzianym kwantowo, bez komunikacji między sobą, czyli lokalnie?**



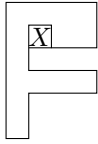
O superpozycji i pomiarach kwantowych pisali Ewa Borsuk i Paweł Błasiak w poprzednim numerze *Delty*. O splątaniu kwantowym można przeczytać między innymi w tekście Jana Chwedeńczuka,  $\Delta_{17}^{10}$ .



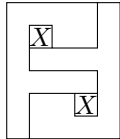
Eksperyment Bella. Obserwatorzy wybierają stan 1 lub 2, z którym sprawdzają zgodność przesłanego im obiektu



**Rozwiązanie zadania M 1663.**  
Dla każdej figury  $\mathcal{F}$  zaznaczymy pole  $X$ ,  
tak jak przedstawiono na rysunku.



Oczywiście w przypadku dowolnego rozmieszczenia rozłącznych figur  $\mathcal{F}$  na płaszczyźnie pola  $X$  nie mogą być pokryte żadną inną figurą  $\mathcal{F}$ . Ponadto różne figury mają różne pola  $X$ . Dlatego możemy założyć, że pole  $X$  należy do naszej figury  $\mathcal{F}$ .



Rozpatrzmy teraz prostokąt  $5 \times 6$  i jego podział przedstawiony na rysunku. Kwadrat  $300 \times 300$  można oczywiście pociąć na 3000 prostokątów o wymiarach  $5 \times 6$ , czyli na 6000 figur  $\mathcal{F}$ . Jest to tym samym maksymalna możliwa liczba, ponieważ pokryliśmy wszystkie pola figurami  $\mathcal{F}$ .

Szczególna teoria względności przewiduje istnienie maksymalnej prędkości rozchodzenia się sygnałów, równej prędkości światła w próżni. Jeżeli mamy dwa zdarzenia, które w jakimś układzie odniesienia zachodzą jednocześnie w pewnej odległości od siebie, to mówimy, że są one *rozdzielone przestrzennie*. Dla pary takich zdarzeń nie jest możliwe przesłanie sygnału z jednego z tych zdarzeń do drugiego z prędkością nie większą od prędkości światła. Łamanie nierówności Bella oznacza, że istnieją korelacje pomiędzy wynikami pomiarów wykonywanych tak, żeby były rozdzielone przestrzennie. To właśnie zjawisko zostało przez Einsteina nazwane „upiornym oddziaływaniem na odległość”. Okazuje się jednak, że ponieważ wynik lokalnego pomiaru jest całkowicie losowy, to nie da się stanów splątanych użyć do przesyłania informacji z nadświetlną prędkością. Korelacje ujawniają się dopiero, gdy porównamy wyniki obu przestrzennie rozdzielonych pomiarów.

#### Literatura

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [2] J.S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
- [3] J. F. Clauser, M. A. Horne, Phys. Rev. D **10**, 526 (1974).
- [4] M. Giustina *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015); L.K. Shalm *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250402 (2015)
- [5] The Big Bell Test Collaboration, Nature **557**, 212(2018)
- [6] H. Wiseman, Nature **510**, 467 (2014).
- [7] J. Conway, S. Kochen, Foundations of Physics. **36**, 1441 (2006)

Przypuśćmy, że odpowiedź na pytanie Bella jest twierdząca, czyli obiekty są w stanie ujawniać ukryte wyniki pomiarów dla każdego możliwego wyboru w miejscu obserwacji. Wtedy wynik dla obserwatora  $A$  może zależeć tylko od jego wyboru, ale już nie wyboru  $B$ , i na odwrót. To znaczy, że istnieje łączne prawdopodobieństwo  $p(A_1, A_2; B_1, B_2)$  dla zdarzenia zgodności ( $A_i, B_i = i$ ) lub nie ( $A_i, B_i = \bar{i}$ ) ze stanami kolejno  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  (16 możliwości). Nie możemy jednak jednocześnie zmierzyć zgodności z  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  (bo przed pomiarem wybieramy  $\alpha_1$  albo  $\alpha_2$ , a następnie sprawdzamy zgodność z tym wybranym stanem). Powtarzając wielokrotnie ten sam eksperyment, możemy natomiast wyznaczyć prawdopodobieństwo dla określonych wyborów różnych obserwatorów, np.  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ , czyli  $p(1; 1) \equiv p(1, *; 1, *)$ , gdzie  $*$  oznacza, że nie wiemy, jaki jest wynik, i prawdopodobieństwo jest sumą wszystkich 4 możliwości dla  $\alpha_2$  i  $\beta_2$ . Podobnie możemy zmierzyć  $p(\bar{1}; 1), p(2; 1)$  itd. Nie możemy z tego odtworzyć pełnego prawdopodobieństwa  $p(A_1, A_2; B_1, B_2)$ , ale wiemy, że musi być nieujemne. Dlatego musi być spełniona nierówność sformułowana przez Johna Clausera i Michaela Horne'a [3]

$$(*) \quad p(1; 1) + p(\bar{1}; 2) + p(2; \bar{1}) \geq p(2; 2).$$

Wynika ona z rozbicia

$$p(2; 2) = p(1, 2; 1, 2) + p(\bar{1}, 2; 1, 2) + p(*, 2; \bar{1}, 2),$$

bo składniki po prawej stronie są nie większe, kolejno, niż  $p(1; 1), p(\bar{1}; 2)$  i  $p(2; \bar{1})$ . Tymczasem wstawiając do naszej nierówności (\*) prawdopodobieństwa przewidywane kwantowo, zgodnie ze wzorem  $\sin^2(\alpha - \beta)/2$ , czyli

$$p(1; 1) = 0, \quad p(\bar{1}; 2) = p(2; \bar{1}) = 1/8, \quad p(2; 2) = 3/8,$$

dostaniemy  $1/4 \geq 3/8$ , a więc sprzeczność w naszym modelu parametrów ukrytych. Mechanika kwantowa przewiduje więc, że odpowiedź na pytanie postawione przez Bella jest negatywna. Kwantowe wyniki dałoby się nadal wyjaśnić ukrytymi parametrami, ale nielokalnymi, czyli dopuszczającymi zależność wartości parametru od wyboru dokonanego przez drugiego obserwatora, np.  $A_{1,1}$  i  $A_{1,2}$ .

Niestety okazuje się, że eksperyment zaproponowany przez Bella nie jest łatwy do przeprowadzenia w laboratorium. Dopiero w 2015 roku udało się pokazać doświadczalnie, że nierówność (\*) jest łamana dla stanów splątanych [4]. Popularne wśród fizyków określenie „łamanie nierówności Bella” oznacza, że mierzone w doświadczeniu prawdopodobieństwa nie spełniają nierówności typu (\*) (pozostają natomiast zgodne z przewidywaniami mechaniki kwantowej). Oznacza to, że parametry ukryte (jeżeli to one odpowiadają za wyniki pomiarów) muszą upiornie oddziaływać na odległość, szybciej od światła, albo wybór nie był swobodny – we wspomnianych doświadczeniach dokonywała go maszyna. Aby rozwiązać wątpliwości, do przeprowadzenia eksperymentu potrzebni są żywi ludzie, którzy będą szybko dokonywać wyborów. Tak zrobiono w 2016 roku, zbierając wybory poprzez naciskanie 0 lub 1 na klawiaturze przez tysiące ochotników [5]. Nierówność w dalszym ciągu była łamana, ale wątpliwość, czy wybory były dostatecznie szybko przekazywane do obserwatorów, pozostała. Aby ostatecznie wyeliminować tę ostatnią wątpliwość, należałoby jeszcze przeprowadzić test pomiędzy dostatecznie oddalonymi laboratoriami (np. na Ziemi i Księżycu), aby zapewnić sekundę na ludzki wybór i odczytanie wyniku [6].

Obserwacja Bella jest obecnie pokazywana na wszelkie sposoby, także dla większej liczby obserwatorów i pomiarów. John Conway, który sam stworzył deterministyczną Grę Życia – pozbawioną swobodnego wyboru, a jednak bardzo wrażliwą na warunki początkowe – zafascynował się sprawą wolnego wyboru i kwantowych pomiarów. Sam się zwierzył, że nie jest religijny i wolny wybór traktuje jako uniwersalny dogmat. Wraz z Simonem Kochenem sformułował twierdzenie o wolnej woli, opierając się na nieco bardziej skomplikowanym układzie niż zaproponowany przez Bella. Teza twierdzenia [7] stanowi, że swobodny wybór jest sprzeczny z innymi ważnymi założeniami, przede wszystkim przewidywaniami kwantowymi i ograniczoną prędkością ukrytych parametrów. Czeka nas więc trudny wybór (nomen omen), który dogmat poświęcić.

# Ułamki Fibonacciego

Karol GRYSZKA\*

\*Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,  
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Dobrym kalkulatorem jest na przykład  
wolframalpha.com.

Weźmy dobry kalkulator do ręki i wykonajmy dzielenie  $10000 : 9899$ . Wynikiem jest ułamek okresowy o okresie 468, ale my ograniczymy się do kilkudziesięciu początkowych cyfr:

$$\frac{10000}{9899} = 1,0102030508132134559046368320032\dots$$

Jeśli nie zauważyliśmy w powyższej liczbie niczego niezwykłego, to wyróżnijmy teraz w rozwinięciu dziesiętnym kilka początkowych bloków dwucyfrowych:

$$1, \text{ 01 02 03 05 08 13 21 34 55 } 90463683200322\dots$$

Wyróżnione bloki to kolejne liczby Fibonacciego! Zwiększmy liczbę zer oraz dziewiątek i wykonajmy dzielenie  $1000000 : 998999$ . Wynik?

$$1, \text{ 001 002 003 005 008 013 021 034 055 089 144 233 377 610 } 98859958\dots$$

Wyróżnione bloki to ponownie kolejne liczby Fibonacciego! Podobny schemat zaobserwujemy, gdy wykonamy dzielenie

$$\frac{10^{2n}}{10^{2n} - 10^n - 1},$$

a w rozwinięciu wyniku wyróżnimy bloki  $n$ -cyfrowe. Własność niezwykła! W powyższych dwóch przykładach reguła ta obowiązuje jednak tylko do pewnego miejsca. Niestety, będzie tak dla każdego ułamka, z jakim będziemy mieć do czynienia w tym artykule. Jeśli tylko liczba (tu Fibonacciego) jest krótsza niż długość bloku, to prawie zawsze zostanie odtworzona dokładnie. Wyjątek mogą stanowić „ostatnie” bloki, to znaczy te najbardziej z prawej strony. W powyższym przykładzie blok cyfr 610 jest liczbą Fibonacciego, po nim chcielibyśmy zobaczyć 987, a potem 1597 – tak się jednak nie dzieje. Jest to konsekwencją tego, że 1597 (które jest dłuższe niż blok) „nachodzi” na 987 – liczba 1597 przenosi 1 do bloku z 987, dając w efekcie 988. Kolejne bloki są jeszcze bardziej chaotyczne.

Czy w podobny sposób można otrzymać inne sekwencje liczb? Spójrzmy na kolejny intrygujący przykład:

$$\frac{100}{9801} = 0, \text{ 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14\dots 96 97 99 00\dots}$$

W dalszej części spróbujemy uzasadnić, skąd biorą się powyższe schematy. Zaczniemy od definicji **funkcji tworzącej** ciągu. Jeśli  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem liczb (rzeczywistych), to sumę szeregu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nazywamy funkcją tworzącą tego ciągu\*. Funkcje takie zwykle rozważa się nie dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  (gdyż nie zawsze powyższa suma jest skończona), a jedynie dla pewnego zakresu liczb. Omówimy to na przykładzie.

W trakcie edukacji szkolnej prezentowany (i często uzasadniany) jest wzór na sumę ciągu geometrycznego

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

„Przechodząc” na zmienną  $x$ , można to zapisać następująco:

$$H(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

czyli  $H(x)$  jest funkcją tworzącą ciąg stałego  $a_n = 1$ , gdyż wszystkie współczynniki w nieskończonej sumie są równe 1. Wiemy ponadto, że powyższa suma jest zbieżna tylko wtedy, gdy  $|x| < 1$  (pamiętamy warunek na istnienie sumy ciągu geometrycznego). Podobne ograniczenia występują dla wielu innych ciągów.

Teraz niech dany będzie dowolny ciąg geometryczny

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \dots$$

W intrygującym przykładzie obok przedstawione są wszystkie kolejne dodatnie liczby naturalne w blokach dwucyfrowych do 97 włącznie. Blok odpowiadający liczbie 100 jest za długi i przenosi 1 do bloku 99, który ma teraz wartość 100, i ten z kolei przenosi 1 na blok 98, dając w efekcie 99. Stąd po bloku 97 pojawia się blok 99, a następnie 00.

\*Tak naprawdę funkcja tworząca jest definiowana jako szereg formalny. Dla niektórych  $x$  szereg ten jest zbieżny, co pozwala w tej sytuacji przypisać sumie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  wartość liczbową. Jednak w ogólności funkcja tworząca nie jest funkcją, bo dla niektórych argumentów  $x$  szereg może nie być zbieżny.

Wyznaczenie zakresu argumentów  $x$ , dla których suma szeregu istnieje, to znajdowanie tak zwanego promienia zbieżności szeregu potęgowego. Jest to zagadnienie techniczne i nie będziemy mu poświęcać miejsca w tym artykule.



Naszym zadaniem jest wskazanie funkcji tworzącej tego ciągu.

**Twierdzenie 1.** Funkcją tworzącą *ciągu geometrycznego* jest

$$G(x) = \frac{a}{1 - qx}.$$

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że

$$\frac{a}{1 - qx} = a(1 + qx + q^2x^2 + q^3x^3 + \dots) = a + (aq)x + (aq^2)x^2 + (aq^3)x^3 + \dots$$

□

Dokonajmy teraz **podstawienia**  $x \mapsto 1/x$  do powyższej funkcji tworzącej. Otrzymujemy wtedy

$$G(1/x) = a + \frac{aq}{x} + \frac{aq^2}{x^2} + \frac{aq^3}{x^3} + \dots$$

i przyjmując na przykład  $a = 1$ ,  $q = 3$  oraz  $x = 1000$ , otrzymujemy

$$G(1/1000) = 1 + \frac{3}{1000} + \frac{9}{1000^2} + \frac{27}{1000^3} + \frac{81}{1000^4} + \frac{243}{1000^5} + \dots = 1, 003\ 009\ 027\ 081\ 243 \dots,$$

Zauważmy, że każdy z ułamków  $\frac{3}{1000}$  albo  $\frac{9}{1000^2}$  odpowiada za blok 3 cyfr i bloki te są rozłączne.

a więc bloki trzycyfrowe są kolejnymi potęgami liczby 3. Z drugiej strony

$$G(1/1000) = \frac{1}{1 - \frac{3}{1000}} = \frac{1000}{1000 - 3} = \frac{10^3}{10^3 - 3}.$$

Na podstawie powyższego przykładu możemy opisać ogólną postać ułamka, który „tworzy” kolejne potęgi liczby  $N$  w blokach  $n$ -cyfrowych. Taki ułamek ma postać

$$(\spadesuit) \quad \frac{10^n}{10^n - N}.$$

Ustalamy tutaj konwencję  $F_0 = F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  dla  $n \geq 2$ .

Znajdziemy teraz funkcję tworzącą  $F(x)$  ciągu Fibonacciego  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Twierdzenie 2.** Funkcją tworzącą *ciągu Fibonacciego* jest

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

*Dowód.* Zauważmy, że

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} = \\ &= 1 + x + x \left( -1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} \right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} = \\ &= 1 + x + x(-1 + F(x)) + x^2 F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x), \end{aligned}$$

stąd otrzymujemy  $F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$ .

□

Ponownie stosujemy podstawienie  $x \mapsto 1/x$ , w ten sposób mamy

$$F(1/x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 - x - 1}.$$

Dla  $x = 100$  otrzymujemy  $F(1/100) = \frac{10000}{9899}$ , czyli

$$F(1/100) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{2}{100^2} + \frac{3}{100^3} + \frac{5}{100^4} + \dots = 1,01020305\dots$$

Uzasadniliśmy efekt widoczny w początkowej części artykułu oraz wyprowadziliśmy wzór, za pomocą którego można tworzyć dłuższe bloki zawierające liczby Fibonacciego.

Twierdzenie 2 można uogólnić na dowolny ciąg zadany **rekurencją drugiego rzędu**, co zaraz wykażemy. Rozważmy ciąg postaci

$$G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2}, \quad n \geq 2$$



Założenie o dodatniości  $G_n$  jest czysto techniczne i potrzebne tylko do rozwinięć ułamków. Dla samego twierdzenia poniżej nie ma ono żadnego znaczenia.

i dodatkowo założymy, że  $G_0, G_1$  są dane,  $p$  i  $q$  są pewnymi stałymi oraz wszystkie  $G_n$  są liczbami dodatnimi.

**Twierdzenie 3.** Funkcją tworzącą ciąg  $G_n$ , opisanego powyżej, jest

$$G(x) = \frac{G_0 + x(G_1 - pG_0)}{1 - px - qx^2}.$$

Dowód twierdzenia 3 przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.

Twierdzenie 3 pozwala na znalezienie ciekawych ułamków „kodujących” różne ciągi. Wystarczy bowiem, że dany ciąg można zakodować równaniem rekurencyjnym drugiego rzędu. Jest tak na przykład dla ciągu arytmetycznego. Niech  $a_n = a_0 + nr$  będzie wzorem ogólnym tego ciągu. Wtedy

$$a_{n+1} = a_0 + nr + n, \quad a_{n+2} = a_0 + nr + 2n,$$

a stąd wynika, że  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ . Oznacza to, że funkcją tworzącą ciąg arytmetycznego jest

$$A(x) = \frac{a_0 + x(a_1 - 2a_0)}{1 - 2x + x^2}.$$

Przyjmując teraz  $a_0 = 0$  oraz  $r = 1$  i ponownie podstawiając  $x \mapsto 1/x$ , otrzymujemy odpowiednio

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad A(1/x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Wynika z tego, że dla  $x = 100$  powinniśmy otrzymać ułamek zawierający w swoim rozwinięciu kolejne liczby naturalne. Istotnie tak jest:

$$A(1/100) = \frac{100}{99^2} = 0, (01\ 02\ 03\ 04\ 05 \dots 96\ 97\ 99\ 00),$$

a więc w rozwinięciu widzimy aż 97 kolejnych liczb naturalnych.

Rozważmy jeszcze jeden przykład. Jeśli teraz  $a_0 = 3$  oraz  $r = 5$ , to odpowiadającą temu funkcją tworzącą jest

$$A(x) = \frac{2x + 3}{(1-x)^2}.$$

Stąd biorąc ponownie  $x = 100$  i postępując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy

$$A(1/x) = \frac{30200}{9801} = 3, 08\ 13\ 18\ 23\ 28\ 33\ 38\ 43\ 48\ 53\ 58 \dots$$

W ogólnym przypadku, jeśli  $x = 10^n$ , to

$$A(1/x) = \frac{2 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^{2n}}{(10^n - 1)^2}.$$

Okiełznaliśmy ciągi geometryczne, arytmetyczne oraz ciąg Fibonacciego. Spróbujmy wyznaczyć teraz taką funkcję dla kwadratów liczb dodatnich, to jest znaleźć

$$K(x) = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

**Twierdzenie 4.** Funkcją tworzącą ciąg kwadratów liczb naturalnych jest

$$K(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}.$$

*Dowód.* Skorzystamy tu z wyprowadzonej wcześniej funkcji tworzącej liczby naturalne oraz funkcji tworzącej ciąg stały 1

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + x \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n + 1)x^n = \\ &= x + x \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = \\ &= x + xK(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + x \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right) = \\ &= x + xK(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{1-x}. \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymujemy  $K(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ . □

Podstawiamy ponownie  $x \mapsto 1/x$ , czyli otrzymujemy  $K(1/x) = \frac{x+x^2}{(x-1)^3}$ . Przewidujemy zatem, że dla  $x = 1000$  otrzymamy bloki trzycyfrowe zawierające kolejne kwadraty. Istotnie

$$K(1/1000) = \frac{1000^2 + 1000}{(1000 - 1)^3} = \frac{10001000}{997002999} = 0, \begin{array}{l} 001\ 004\ 009\ 016\ 025\ 036\ 049\ 064\ 081\ 100\ 121 \\ 144\ 169\ 196\ 225\ 256\ 289\ 324\ 361\ 400\ 441\ 484 \\ 529\ 576\ 625\ 676\ 729\ 784\ 841\ 900 \dots \end{array}$$

Ułamek  $K(1/1000)$  jest okresowy o okresie 2 994 003.

zgodnie z przewidywaniami.

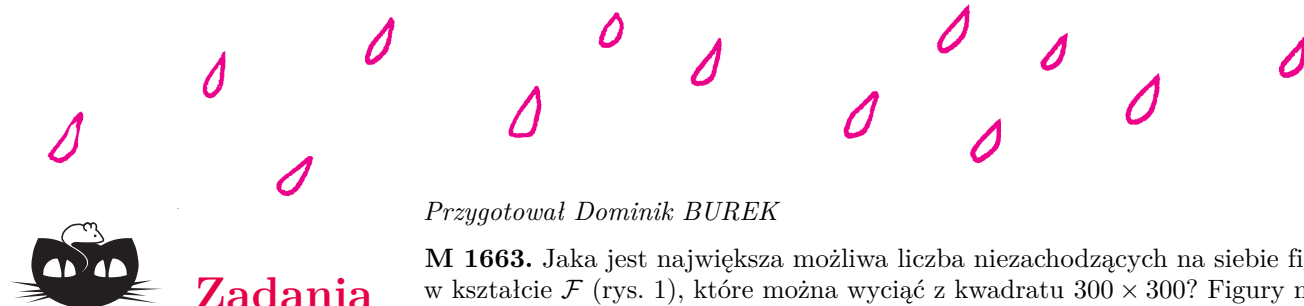
Na koniec zachęcamy Czytelnika do samodzielnych ćwiczeń.

**Zadanie 1.** Uzasadnić słuszność wzoru (♠).

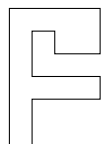
**Zadanie 2.** Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby Lucasa w blokach pięciocyfrowych.

**Zadanie 3.** Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby trójkątne w blokach czterocyfrowych.

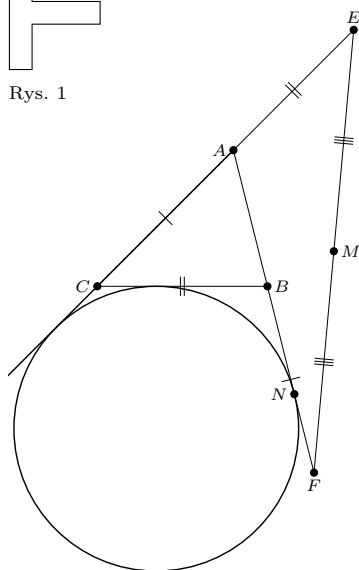
Liczby Lucasa:  $L_0 = 2, L_1 = 1,$   
 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$



## Zadania



Rys. 1



Rys. 2

Przygotował Dominik BUREK

**M 1663.** Jaka jest największa możliwa liczba niezachodzących na siebie figur w kształcie  $\mathcal{F}$  (rys. 1), które można wyciąć z kwadratu  $300 \times 300$ ? Figury można obracać i odwracać na drugą stronę.

Rozwiązanie na str. 5

**M 1664.** Na przedłużeniach boków  $CA$  i  $AB$  trójkąta  $ABC$  obrano punkty  $E$  i  $F$  odpowiednio tak, że  $AE = BC$  i  $BF = AC$ . Okrąg dopisany do trójkąta  $ABC$ , styczny do boku  $BC$ , jest styczny do  $BF$  w punkcie  $N$ . Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $EF$ . Udowodnij, że prosta  $MN$  jest równoległa do dwusiecznej kąta przy wierzchołku  $A$ .

Rozwiązanie na str. 10

**M 1665.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  i  $d$  spełniających równość

$$\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + 1} + \frac{1}{d^3 + 1} = 2$$

zachodzi nierówność

$$\frac{1-a}{a^2 - a + 1} + \frac{1-b}{b^2 - b + 1} + \frac{1-c}{c^2 - c + 1} + \frac{1-d}{d^2 - d + 1} \geq 0.$$

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1017.** Piramida Cheopsa po wybudowaniu była ostrosłupem o podstawie kwadratowej o boku  $a = 230$  m i wysokości  $H = 147$  m. Zbudowano ją z bloków wapienia. Oszacuj, ile czasu trwałoby dzisiaj jej wznoszenie, gdyby przy jej budowie bez przerwy pracowały dźwigi o łącznej mocy  $P = 500$  kW. Gęstość wapienia  $\rho \approx 2,7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, a przyspieszenie ziemskie  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>.

Wskazówka: środek masy ostrosłupa znajduje się w 1/4 jego wysokości.

Rozwiązanie na str. 1

**F 1018.** Samolot o masie  $M = 10^4$  kg ląduje z początkową prędkością  $v_0 = 200$  km/godz. Z powierzchnią lotniska stykają się dwa koła, każde o średnicy  $d = 2$  m i momencie bezwładności  $I = 100$  kg · m<sup>2</sup>. Koła mogą obracać się bez oporu, a w momencie lądowania nie obracają się. W chwili zetknięcia się z płytą lotniska koła zaczynają się ślizgać. O ile zmniejszy się prędkość samolotu do czasu, gdy koła zaczną toczyć się bez poślizgu? Pomijamy opór powietrza.

Rozwiązanie na str. 15

# Lepszy papier w garści i źle zatemperowany ołówek

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

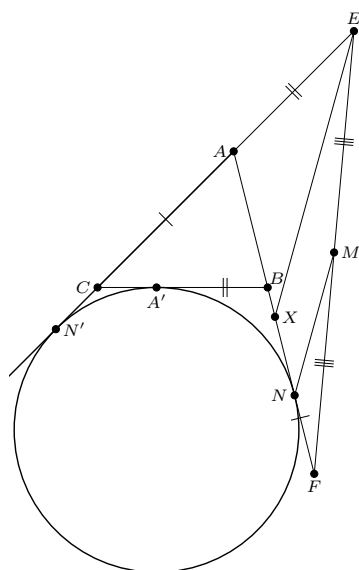
Mariusz SKAŁBA\*

My, matematycy, ubolewamy czasem nad tym, jak trudno jest dotrzeć z matematycznym przesłaniem do szerszej publiczności. Zdarza się, że w desperacji porównujemy matematykę a to do muzyki, a to do poezji, jakby to dawało szansę na wyjście z niszy. To jednak błędna strategia, gdyż większość poezji kończy w szufladach, pewna jej część jest wydawana (o zgrozo!) własnym sumptem, a tylko znikoma reszτώka jest słusznym przedmiotem naszych urojeń i pretensji. Nie znam również przekonujących zastosowań matematyki w praktyce muzycznej, chociaż w *Deltach* 7–8 (2020) opowiedziano pięknie i przystępnie o ważnym odkryciu starożytnych Greków: *strój instrumentu muzycznego nie może być jednocześnie naturalny i uniwersalny*<sup>†</sup>. Natomiast ważna dla historii muzyki konstatacja, że Ludwig van Beethoven skomponował **dziewięć** wspaniałych symfonii, nie jest zbyt istotnym zastosowaniem matematyki. Oczywiście chętnie odwołam te autoszyderstwa, gdy spodoba mi się choć trochę szumnie zapowiadana kompozycja AI oparta na szkicach dziesiątej symfonii Beethovena. Ma być ona ważnym elementem obchodów 250-lecia urodzin tego wielkiego kompozytora, który został ochrzczony 17 grudnia 1770 roku (zatem z chwilą ukazania się tego tekstu będę zapewne wiedział, czy mam powód do odwoływania czegokolwiek).

<sup>†</sup>Ta naturalna i uniwersalna metaprawda odnosi się niestety też do mody krawieckiej.



**Rozwiązanie zadania M 1664.** Rozważmy punkt  $X$  będący punktem przecięcia prostej przechodzącej przez  $E$  i równoległej do  $MN$  z prostą  $AB$ . Wówczas wystarczy udowodnić, że trójkąt  $XAE$  jest równoramienny.



Oznaczmy przez  $\Omega$  okrąg dopisany z zadania, a przez  $N'$  i  $A'$  punkty styczności  $\Omega$  z prostymi, odpowiednio,  $AC$  i  $AB$ . Wówczas, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych, dostajemy

$$\begin{aligned} (*) \quad 2AN &= AN + AN' = \\ &= AB + BN + AC + CN' = \\ &= AB + AC + BA' + CA' = \\ &= AB + BC + CA. \end{aligned}$$

Ponieważ prosta  $MN$  jest linią środkową w trójkącie  $EFX$ , to  $XF = 2NF$ . Ponadto z równości  $AE = BC$ ,  $BF = AC$  oraz (\*) mamy

$$\begin{aligned} AX &= AF - XF = \\ &= AB + BF - 2NF = \\ &= AB + AC - 2NF = \\ &= AB + AC - 2(AB + BF - AN) = \\ &= AB + AC - 2(AB + AC - AN) = \\ &= BC = AE, \end{aligned}$$

skąd wynika, że trójkąt  $XAE$  jest równoramienny.

Ale teraz o wyższości zwykłego papieru nad ulotnym złotem. Jak powszechnie wiadomo, liczba  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  zwana *złotą proporcją* ma następującą własność. Jeśli krótsza część odcinka ma długość  $k = 1$ , a dłuższa ma długość  $d = \phi$ , to cały odcinek ma długość  $c = k + d = 1 + \phi = \phi^2$ , czyli

$$\frac{c}{d} = \frac{d}{k} = \phi.$$

W otchłaniach Internetu i wszędzie poza nim (jeśli są jeszcze takie miejsca) znajdziesz, Czytelniku, mnóstwo wywodów o walorach estetycznych tej proporcji i jej rozlicznych zastosowaniach w różnych dziedzinach. YouTube obfituje w filmiki z  $\phi$  w roli głównej, których gorąco nie polecam. Nie jest oczywiście tak, że z liczby  $\phi$  nie daje się nic wycisnąć – ostatecznie jest przecież z dość miękkiego kruszcu. Oto jego próbką.

Ponieważ  $\phi^2 = \phi + 1$ , więc

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} \text{ itd.}$$

Z elementarnej teorii ułamków łańcuchowych wynika zatem, że  $\phi$  ma możliwie najprostsze rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Z takim ułamkiem łańcuchowym związany jest zawsze ciąg jego reduktów  $\phi_n$ , czyli ułamków urwanych

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad \phi_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \dots$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że

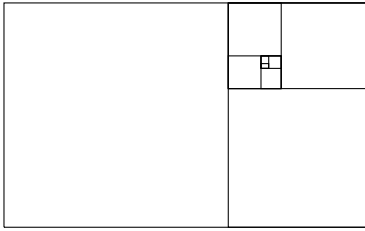
$$\phi_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}},$$

gdzie  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem Fibonacciego, określonym słynną rekurencją

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ponadto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$ , i to jest najważniejsza własność ciągu reduktów.

Weźmy teraz  $k = F_9 = 34$ ,  $d = F_{10} = 55$ ,  $c = k + d = F_{11} = 89$  i rozważmy prostokąt o wymiarach 55 na 89. Jest on praktycznie złoty, gdyż  $89/55 = 1,6(18) \approx \phi$ . No cóż, estetyka tego prostokąta mnie nie poraża, ale muszę przyznać, że ma on dość ciekawą własność: po odcięciu kwadratu pozostały prostokąt o wymiarach 34 na 55 jest też praktycznie złoty, a więc



Rys. 1

prawie podobny do wyjściowego. Oczywiście jeśli ktoś jest bezkompromisowy w swoich wymaganiach estetycznych, to nie będzie tolerował powyższych *praktycznie* i *prawie*, ale być może uzna, że przedstawiony na rysunku 1 doskonale złoty prostokąt (o niewspółmiernych bokach) jest jednoczesną sublimacją wycinanek łowickich i origami – bardzo przepraszam, ale to mnie też nie wzrusza!

Zupełnie inaczej jest, gdy mam przed sobą pustą kartkę papieru formatu A4, długopis w prawej ręce i być może inne jeszcze przedmioty, przydatne w tego typu kłopotliwej sytuacji. Po dłuższej chwili namysłu odkładam długopis na bok, a pustą w dalszym ciągu kartkę składam na pół wzdłuż linii równoległej do krótszego boku. Łudzę się, że pomysłów wystarczy przynajmniej na wypełnienie tej mniejszej kartki – ostatecznie przecież jest ona **podobna** do wyjściowej. Oto uzasadnienie.

Szerokość  $S_4$  i wysokość  $W_4$  arkusza A4 wynoszą  $S_4 = 210$  mm,  $W_4 = 297$  mm. Wymiary arkusza A5, który odpowiada złożonej na pół kartce formatu A4, to  $S_5 = 148$  mm,  $W_5 = 210$  mm. Obliczamy

$$\frac{W_4}{S_4} \approx 1,414286 \quad \text{oraz} \quad \frac{W_5}{S_5} \approx 1,418919.$$

Zatem arkusze A4 oraz A5 są praktycznie podobne. W wersji bezkompromisowej stosunek boków  $S_x, W_x$  w arkuszu  $A_x$  wynosi

$$\frac{W_x}{S_x} = \sqrt{2},$$

natomiast

$$S_{x+1} = \frac{W_x}{2}, \quad W_{x+1} = S_x \quad (\text{patrz rys. 2}).$$

Mamy oczywiście

$$\frac{W_{x+1}}{S_{x+1}} = \frac{S_x}{W_x/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Elegancji tej konstrukcji dodaje fakt, że format A0 ma założoną powierzchnię  $1 \text{ m}^2$ . Obliczmy jego wymiary teoretyczne. Mamy równania

$$\frac{W_0}{S_0} = \sqrt{2}, \quad W_0 \cdot S_0 = 10^6 \text{ mm}^2,$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$W_0 = \sqrt[4]{2} \cdot 10^3 \approx 1189,2 \text{ mm}, \quad S_0 = \frac{10^3}{\sqrt[4]{2}} \approx 840,9 \text{ mm}.$$

Prawdziwe wymiary A0,  $W_0 = 1189$  mm,  $S_0 = 841$  mm są wynikiem zastosowania praktycznej reguły, że wymiary boków w milimetrach muszą być całkowite.

Ciąg formatów papieru  $A_x$  reguluje międzynarodowa ustawa normalizacyjna ISO 216, ale jego twórcą jest Georg Christoph Lichtenberg, niemiecki fizyk i aforysta żyjący w XVIII wieku. Goethe zabiegał u niego, na próżno, o uznanie swojej *Zur Farbenlehre*, a wspomniany na początku Beethoven nie konsultował z matematykami wiedeńskimi optymalnego rozmiaru dla swoich partytur. Wymiar ich sztuki nie jest matematyczny, a raczej zupełnie nieobliczalny: Beethoven zapewne nie skorzystałby z rad i zachęt do przycinania kwadratów lub składania nut na pół, chociaż anegdotyczne stały się jego kłótnie z wydawcami i sponsorami o każdego guldena.

No cóż: nam pozostaje papier i dobrze nastrojony umysł. . .

Przy okazji wspomnijmy tutaj, że według Hansa von Bülowa zbiór preludiów i fug J.S. Bacha *Das Wohltemperierte Klavier* jest Starym Testamentem muzyki europejskiej, a 32 sonaty fortepianowe Beethovena Nowym Testamentem.



**Rozwiązanie zadania M 1665.** Zauważmy, że

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{a^3+1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(2a+1)(a-1)^2}{3(a+1)(a^2-a+1)} \geq 0,$$

wobec tego

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \geq \frac{4}{3} \left( \frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} + \frac{1}{d^3+1} - 4 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \cdot (2-2) = 0.$$

# Obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd: wymuszona implozja

Miguel FIGUEIRA\*

Tworzenie się gwiazd w galaktykach jest najczęściej przedstawiane jako zapadanie się masywnych chmur pyłu pod wpływem grawitacji. To uproszczone tłumaczenie jest jak najbardziej uzasadnione, jednak nie uwzględnia wszystkich procesów, jakie mogą mieć wpływ na powstawanie nowych obiektów gwiazdowych.

Czynnikami pobudzającym ośrodek międzygwiazdowy do tworzenia nowych gwiazd mogą być... młode gwiazdy. Emitują one silne promieniowanie UV, tworząc wokół siebie obszary zjonizowanego pyłu (H II). W artykule *Collect and Collapse: obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd* ( $\Delta_{20}^{12}$ ) opisałem proces powstawania gwiazd związany z rozszerzaniem się takich zjonizowanych obszarów. Tym razem chciałbym skupić się na procesie tworzenia się gwiazd w chmurze pyłu podlegającej jonizacji.

Jeżeli chmura pyłu znajduje się blisko młodej (nowo powstałej) gwiazdy, jej podstawowe właściwości zostają zasadniczo zmodyfikowane. Wykorzystując symulacje numeryczne, możemy przewidzieć, w jaki sposób promieniowanie UV wpłynie na daną chmurę pyłu w zależności od jej masy (gravitacji), gęstości, siły promieniowania UV, a nawet wpływu pola magnetycznego gwiazdy. Zależności te sprawiają, że obliczenia są niezwykle skomplikowane. Dlatego w tym artykule wezmę pod uwagę tylko wzajemne relacje pomiędzy dwiema wielkościami: ciśnieniem jonizacji  $P_{\text{jon}}$ , które zależy od typu i odległości od gwiazdy, oraz ciśnieniem panującym w chmurze pyłu ( $P_{\text{chmura}}$ ).

Ciśnienie jonizacji to ciśnienie, jakie wywiera strumień energetycznych cząstek, pochodzących np. od młodej gwiazdy, na neutralny gaz. Duże ciśnienie powoduje silniejszą jonizację neutralnego gazu.

Przeanalizujemy trzy przypadki:

- $P_{\text{jon}} \ll P_{\text{chmura}}$ : bardzo wysoka gęstość pyłu powoduje silną rekombinację, która odgrywa rolę tarczy ochronnej przeciwko silnemu promieniowaniu UV. Struktura chmury nie zostaje zmieniona.
- $P_{\text{jon}} \gg P_{\text{chmura}}$ : gęstość chmury pyłowej jest bardzo mała; z tego powodu promieniowanie ultrafioletowe młodej gwiazdy bez przeszkód przechodzi przez chmurę pyłu, jonizując ją. Zjawisko to nazywamy jonizacją błyskawiczną (*flash ionisation*).
- $P_{\text{jon}} \gtrsim P_{\text{chmura}}$ : chmura pyłu jest wystarczająco gęsta, aby stawić częściowy opór promieniowaniu UV emitowanemu przez gwiazdę – tylko zewnętrzna warstwa pyłu zostaje zjonizowana. Powstaje tzw. zjonizowana warstwa graniczna (fala uderzeniowa). Temperatura powierzchni chmury pyłowej wzrasta do  $10^4$  K, co umożliwia rozchodzenie się izotermicznej fali uderzeniowej w chmurze.

Rekombinacja jest procesem, w którym dodatnie jony plazmy wychwytyją wolne (energetyczne) elektrony, tworząc neutralny gaz.

Oczywiście trzeci przypadek jest najbardziej interesujący, gdyż znacząco modyfikuje właściwości pyłu. W momencie uderzenia czoła fali promieniowania UV

\*Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

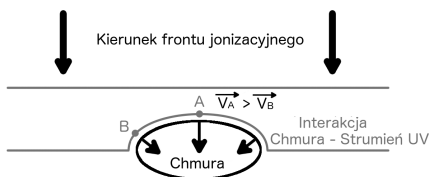
warstwa zewnętrzna chmury pyłowej zostaje wepchnięta do środka. Dzieje się tak przez różnicę prędkości fali uderzeniowej w różnych miejscach chmury pyłu. Na rysunku 1 zaznaczono dwa punkty A i B oraz kierunek frontu uderzeniowego. Punkt A odpowiada środkowi powierzchni chmury (tutaj następuje pierwsze zetknięcie z frontem uderzeniowym), natomiast punkt B jest najbardziej skrajnym punktem chmury gazu (tutaj kontakt chmury z falą uderzeniową następuje najpóźniej). Prędkość frontu uderzeniowego na powierzchni pyłu zależy od kąta pomiędzy punktami A i B i zmniejsza się wraz z odległością od punktu centralnego A. Oznacza to, że środek powierzchni chmury zapada się szybciej niż jej punkty krańcowe. W ten sposób tworzy się obszar o wysokiej gęstości, który staje się coraz gęstszy wraz z przesuwaniem się frontu uderzeniowego. Po pewnym czasie (zazwyczaj po około 1 000 000 lat) gęstość chmury osiąga wartość krytyczną  $n$  w zakresie  $10^8 - 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ , i w chmurze powstaje nowe pokolenie gwiazd.

Znając wielkość strumienia w fali UV oraz zakładając, że chmura pyłowa znajduje się w stanie równowagi hydrostatycznej, można wyznaczyć masę krytyczną ( $M_k$ ), powyżej której chmura się zapadnie:

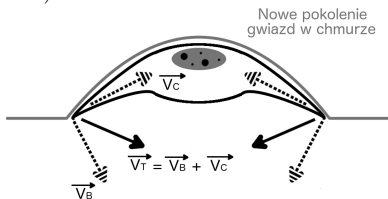
$$(1) \quad M_k = 1,29 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha_B c_s^{14}}{16\pi^2 m_H^2 c_i^4 G^5 \cdot F}} \propto \sqrt[3]{\frac{c_s^{14}}{F}},$$

gdzie  $\alpha_B$  to współczynnik rekombinacji wodoru dla wszystkich poziomów za wyjątkiem stanu podstawowego,  $c_s$  to prędkość dźwięku w chmurze, proporcjonalna do temperatury panującej w ośrodku ( $c_s \propto \sqrt{T}$ ),  $m_H$  to masa atomu wodoru,  $G$  to stała grawitacji, a  $F$  to strumień emisji fotonów w zakresie UV (o energiach większych niż 13,6 eV). Najistotniejszymi parametrami równania 1 są prędkość rozchodzenia się dźwięku w chmurze ( $c_s$ ) i strumień energii pochodzący z gwiazdy ( $F$ ). Jeżeli wartość parametru  $c_s$  jest wysoka, oznacza to, że ciśnienie panujące w chmurze jest wysokie. W związku z tym liczba rekombinacji, a co za tym idzie  $M_k$ , wzrasta, utrudniając zapadnięcie się chmury. Jeżeli strumień  $F$  jest wysoki, to mamy do czynienia z odwrotną sytuacją – chmura bardzo łatwo zapadnie się pod wpływem frontu uderzeniowego (wartość  $M_k$  będzie mała).

Wzbudzenie procesu tworzenia się gwiazd za pomocą frontu uderzeniowego UV nazywane jest wymuszoną implozją (*radiation-driven implosion*, RDI). Jest to zjawisko potwierdzone przez obserwacje w zakresie światła widzialnego i podczerwonego. Fala uderzeniowa przemieszczająca się od powierzchni chmury pyłowej ku jej środkowi pozostawia po sobie ślad w postaci nowych gwiazd. Przy czym najstarsze gwiazdy obserwuje się przy powierzchni chmury, a najmłodsze w jej środku – wzdłuż propagacji fali. Mechanizm RDI wzbudza również procesy tworzenia się masywnych gwiazd (o masie powyżej  $8 M_\odot$ , dokładny opis znaleźć można w artykule



Rys. 1. Schemat obrazujący powstanie fali uderzeniowej w chmurze pyłu. Strzałkami zaznaczone są prędkości poruszania się obszarów chmury prostopadłych do frontu (punkt A) oraz punktów krańcowych chmury (punkt B)



Rys. 2. Zmiana kształtu chmury pyłowej pod wpływem uderzenia fali promieniowania UV. Krańce chmury zaczynają się ugiąć z powodu powstania zagęszczonego obszaru w centrum chmury, gdzie zaczynają tworzyć się nowe gwiazdy

Gwiazdne przedszkola w  $\Delta_{20}^4$ ). Takie masywne gwiazdy emitują silne strumienie promieniowania UV i na nowo modyfikują otaczający je ośrodek międzygwiazdowy, powodując powstawanie kolejnych pokoleń gwiazd.

Strumień promieniowania UV nie tylko rozpoczyna

procesy gwiazdotwórcze w chmurze pyłu, ale też modyfikuje jej morfologię. W początkowych etapach uderzenia fali skrajne obszary chmury popychane są prostopadle do powierzchni chmury. Powstaje w ten sposób gęsty obszar pyłu, który zmienia kierunek prędkości rozchodzenia się fali uderzeniowej na końcach chmury. Kształt chmury zaczyna się zmieniać. Jej krańce zaginają się do zewnątrz, tworząc struktury przypominające skrzydła. Tak zmodyfikowane chmury pyłu nazywamy świetlistymi aureolami (*Bright Rimmed Cloud*, BRC) i klasyfikujemy je na podstawie kąta inklinacji skrzydeł. Na rysunku 2 przedstawiony jest typ A o lekkim zakrzywieniu krańców „skrzydeł”. Typ C to struktura, w której skrzydła się łączą. Natomiast fazy pośrednie klasyfikowane są jako typ B. Interesujące w tym procesie jest to, że struktura chmury nie musi ewoluować od typu A do typu C. Zmiana kształtu może zatrzymać się na typie A lub B. Ale to nie wszystko. Po uderzeniu fali mogą powstać jeszcze bardziej skomplikowane struktury – wszystko zależy od początkowego kształtu chmury pyłowej. Najbardziej efektywne przybierają kształt litery M (typ M, BRC).

*Tłumaczenie: Katarzyna Małek, Anna Durkałec*

## O tym, jak Martynałow uratował królestwo

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

*Zofia MIŚKIEWICZ\*, Michał MIŚKIEWICZ\**

Dawno, dawno temu w odległym królestwie grasował straszliwy smok, którego zdołał pokonać dopiero dzielny Zygryd. W nagrodę otrzymał on połowę królestwa oraz rękę królowej Brunhildy. Nie będziemy tu jednak mówić o heroicznej walce naszego bohatera, ale o jej ekonomicznych następstwach. Otóż zgodnie z kontraktem swoją nagrodę Zygryd mógł otrzymać dopiero po roku – ten mały szczegół okazał się nieco kłopotliwy.

Zygryd darzył Brunhildę szczerym uczuciem, od razu oboje zaczęli planować ślub, a połowę królestwa postanowili spieniężyć. Druga połowa królestwa była już notowana na giełdzie, wiadomo było zatem, że jest w tym momencie warta 100 talentów (w skrócie: tal.). Zygryd potrzebował pieniędzy, jednak nie miał jeszcze prawa do swoich udziałów. Miał za to żylkę hazardzisty, postanowił więc już teraz sprzedać prawo do kupna swojej połowy królestwa rok później, za to w obniżonej cenie – 80 tal. Uznał za sprawiedliwe zażądać za taki przywilej 20 tal. (płatnych od zaraz). W szczegółach kontrakt jest więc następujący: umówiony Kupiec płaci dzisiaj Zygrydowi 20 tal., a za rok od teraz

- (A) jeśli cena giełdowa jest powyżej 80 tal., kupuje połowę królestwa od Zygryda za 80 tal.;
- (B) jeśli cena spadła poniżej 80 tal., Kupiec odstępuje od transakcji, gdyż bardziej opłacałby mu się zakup na giełdzie.

Jak to bywa w takich przypadkach, szybko znaleźli się przeróżni doradcy. Królestwo toczyło wówczas wojnę z sąsiednim państwem. Mag optymista przekonywał, że wojna ta z pewnością będzie wygrana, przez co wartość królestwa się podwoi. Za rok cena połowy wyniesie więc 200 tal., a Kupiec za przywilej kupna po niższej cenie powinien zapłacić 120 tal. Tymczasem mag Pesymista był przeciwnego zdania – wojna skończy się przegraną, a wartość królestwa zmniejszy się dwukrotnie. W takim scenariuszu cena połowy królestwa wyniesie 50 tal., co czyni przywilej kupna bezwartościowym – Kupiec powinien więc zapłacić okrągłe 0 tal.

Wszyscy byli zgodni, że któryś z magów ma rację – cena giełdowa za rok wyniesie 50 lub 200 tal. – nie wiadomo było tylko, który. Z pośrednią propozycją przyszedł mag Realista: skoro są dwie możliwości, to zgodnie

Kontrakt opisany obok nazywa się fachowo *europijską opcją kupna*.

ze szkolnym doświadczeniem należy uznać, że każda z nich ma to samo prawdopodobieństwo  $1/2$ . Sprawiedliwa cena kontraktu wynosi więc

$$\frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 60 \text{ tal.}$$

W tym momencie zainterweniowała Brunhilda, ostoją zdrowego rozsądku. Królowa wytknęła Zygrydowi, że wartości  $1/2$  i  $1/2$  są zupełnie arbitralne, zamiast tego można by wybrać prawdopodobieństwa wygranej  $3/4$  i przegranej  $1/4$ , albo coś jeszcze innego. Trudno przecież przewidywać, jak potoczą się losy wojny. Sprowadziła więc na pomoc znanego mędrca ze wschodu, maga Martyngałowa.

Po wysłuchaniu problemu mag Martyngałow orzekł, że należy przyjąć prawdopodobieństwa wygranej  $1/3$  i przegranej  $2/3$ , a w konsekwencji kontrakt sprzedać za cenę

$$\frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 40 \text{ tal.}$$

Jego autorytet znacząco spadł, kiedy się okazało, że niewiele wie o trwającej wojnie – jak więc mógłby przewidywać jej wynik? Odpowiedź Martyngałowa zszokowała wszystkich – stwierdził, że podane prawdopodobieństwa nie mają związku z jego przekonaniem, a po prostu są dobrane tak, by oczekiwana wartość połowy królestwa po roku była równa obecnej. Istotnie, przy takim doborze spodziewana cena za rok wynosi

$$\frac{1}{3} \cdot 200 + \frac{2}{3} \cdot 50 = 100 \text{ tal.,}$$

czyli tyle co teraz. W takiej sytuacji – i tylko w takiej! – okazuje się, że nie opłaca się ani kupować udziałów królestwa, ani sprzedawać, gdyż udziały po roku będą (średnio) warte tyle samo.

Zygryd nie był jeszcze przekonany, że 40 tal. jest sprawiedliwą ceną. Na pomoc przyszła nieoceniona Brunhilda. Zauważyła, że przy tak dobranej cenie Zygryd mógłby sprzedać przywilej kupna połowy królestwa, nawet gdyby wcale nie miał do niej praw. Jak to możliwe? Otóż mając do dyspozycji 40 tal. od Kupca i dodatkowo pożyczając 40 tal. z banku, mógłby teraz zainwestować 80 tal. w kupno udziałów w królestwie, po roku zaś

- (A) w przypadku wygranej – wartość jego udziałów wynosiłaby 160 tal., co po spłacie długu w banku dawałoby dokładnie 120 tal. na pokrycie zysku Kupca\*;  
 (B) w przypadku przegranej – wartość jego udziałów wynosiłaby 40 tal., co wystarczyłoby mu dokładnie na spłatę długu w banku.

Stosując powyższą strategię, każdy mógłby sprzedać prawo do kupna połowy królestwa; okazuje się, że niezależnie od wyniku wojny wyszedłby na zero! To przekonało naszych bohaterów ostatecznie, że 40 tal. jest sprawiedliwą ceną. Znaleźli kupca, po czym żyli długo i szczęśliwie.

Czytelnikowi należy się może wyjaśnienie, jak taką strategię inwestycyjną (czyli portfel replikujący) znaleźć. Otóż zakładając, że Zygryd (choćby i nie mając praw do królestwa) otrzymał 40 tal. od kupca, a na rezerwę gotówkową i udziały giełdowe przeznaczył odpowiednio  $x$  i  $y$  talentów, to liczby te muszą spełniać

$$\begin{cases} x + y = 40 & \text{(taką kwotą dysponuje Zygryd),} \\ x + 2y = 120 & \text{(to jest zobowiązanie w przypadku wygranej),} \\ x + \frac{1}{2}y = 0 & \text{(a to w przypadku przegranej).} \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem rzeczywiście jest  $x = -40$  i  $y = 80$ . Wartość ujemna oznacza, że zamiast rezerwy gotówkowej mamy kredyt, ale w królestwie rynków kapitałowych to nie jest problem – przynajmniej do czasu następnego kryzysu.

A jakie znaczenie ma tu miara martyngałowa? Na to pytanie odpowiedzą poniższe zadania.

### Zadania

1. Załóżmy, że Zygryd ustalił jednak cenę wykupu po roku na 65 tal. (zamiast 80 tal.). Przyjmując cenę

kontraktu  $C$  za niewiadomą, sformułować odpowiedni układ równań na  $x$ ,  $y$ ,  $C$  i wyznaczyć ich wartości.

2. W powyższym scenariuszu wyznaczyć miarę martyngałową (prawdopodobieństwa wygranej i przegranej), a następnie cenę kontraktu odpowiadającą tym prawdopodobieństwom. Czy pokrywa się ona z kwotą z poprzedniego zadania?

3. Przypuśćmy, że na organizację wesela Zygryd potrzebuje już teraz 30 tal. zaliczki. Jaką cenę wykupu po roku powinien ustalić, by sprawiedliwa cena kontraktu wyniosła dokładnie 30 tal.?

Miarę prawdopodobieństwa, przy której wartość oczekiwana w przyszłości zgadza się z obecną wartością, nazywamy *miarą martyngałową*.

\* Gdyby ściśle trzymać się zasad kontraktu, Kupiec powinien zapłacić 80 tal., z czego 40 należy przeznaczyć na spłatę kredytu, a pozostałe 40 na dokupienie udziałów, aby Kupiec otrzymał obiecaną połowę królestwa. Strategia giełdowa dająca identyczne rezultaty co zawarcie kontraktu nosi w literaturze nazwę *portfela replikującego*.





## Rozwiązanie zadania F 1018.

Podczas ślizgania się kół na każde z nich działa stała siła tarcia  $F$ . Moment tej siły zwiększa prędkość kątową  $\omega$  obrotu koła od zera do wartości  $v_k/R$ , gdzie  $R = d/2$  i oznacza promień koła, a  $v_k$  końcową prędkość samolotu. Na samolot działa suma sił pochodzących od obu kół i spowalniających jego ruch. Zmiany prędkości kątowej  $\omega$  kół i prędkości samolotu  $v$  z upływem czasu  $t$  opisuje układ równań:

$$I \frac{d\omega}{dt} = RF,$$

$$M \frac{dv}{dt} = -2F.$$

Rozwiązaniem tego układu są:

$$\omega = \frac{RFt}{I},$$

$$v = v_0 - \frac{2FR^2t}{M}.$$

Z warunku  $\omega_k = v_k/R$  możemy wyznaczyć czas  $t_k$ , po którym koła będą toczyły się bez poślizgu:

$$t_k = \frac{v_0}{F \left( \frac{R^2}{I} + \frac{2}{M} \right)}.$$

Zmiana pędu równa jest tu iloczynowi stałej siły  $-2F$  przez czas jej działania  $t_k$ , co prowadzi do związku

$M(v_k - v_0) = -Ft_k$  i ostatecznie:

$$v_k - v_0 = \frac{2v_0}{2 + \frac{mR^2}{I}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $v_k - v_0 \approx -3,9$  km/godz.

\*Przekonująco przedstawia ją Guy Deutscher w książce „Through the Language Glass, Why the World Looks Different in Other Languages”.

\*\*O tym, że kolory można różnie klasyfikować w zależności od języka, świadczy też swojski przykład fioletowego warzywa, zwanego po polsku „czerwoną kapustą”. Po śląsku jest to „modro kapusta”, czyli dosłownie „niebieska kapusta”.

Autor dziękuje ks. dr. hab. Stanisławowi Adamiakowi z Wydziału Teologicznego UMK za konsultacje.

Tęcza ma nieskończenie wiele barw, które płynnie przechodzą jedna w drugą. Skąd więc często powtarzane stwierdzenie, że kolorów w tęczy jest siedem? Sprawa okazuje się bardziej skomplikowana, niż się na ogół wydaje.

## Starożytność i średniowiecze

Zacznijmy od poglądu błędnego, ale często powtarzanego, że o siedmiu barwach tęczy mowa jest w Biblii. W rzeczywistości, choć tęcza wspomniana jest tam sześć razy, ani razu nie pojawia się wzmianka o liczbie jej kolorów. Poszukajmy więc innych dawnych źródeł. W „Meteorologii” Arystotelesa tęcza ma trzy kolory: czerwony, zielony i fioletowy. Te trzy kolory cytuje potem święty Bazyli Wielki, który na przykładzie tęczy wyjaśnia tajemnicę Trójcy Świętej, czyli wielość w jedności. Z kolei we wczesnośredniowiecznym traktacie „De natura rerum”, autorstwa innego świętego, Izydora z Sewilli (patrona Internetu), czytamy, że tęcza ma cztery kolory. I to jakie cztery! „Od nieba bierze kolor ognisty, od wody purpurowy, od powietrza biały, a od ziemi czarny”. Liczba kolorów u Izydora nie wynika więc z obserwacji, ale z rozważań teoretycznych: barwy są cztery, jak cztery żywioły, czyli cztery pierwiastki, z których według ówczesnej wiedzy miał być zbudowany świat. Gdy przyjrzymy się średniowiecznej sztuce, zobaczymy tęcze w najróżniejszych, czasem zupełnie fantastycznych barwach, których liczba jest najmniejszym problemem. O zgrozo, także tęczowe aureole Maryi nie należały do rzadkości.

## Newton i jego nuty

Od kiedy więc zaczęto mówić, że tęcza ma siedem barw? Otóż pomysł ten pochodzi od Izaaka Newtona, a konkretnie z najgorszej chyba jego teorii, czyli teorii kolorów. Zaskakująca jest motywacja uczonego – chodziło mu mianowicie o analogię z dźwiękami gamy. Podobieństwo wzięło się stąd, że kolor fioletowy zwykle traktujemy jako pośredni między niebieskim a czerwonym, a zatem widmo światła (widzialnego) można przedstawić w postaci zamkniętej pętli czy też koła. A tak właśnie jest w gamie: po „si” następuje znowu „do”. Newton oczywiście nie wiedział, że analogia barw i tonów ma fizyczne podstawy. Światło uważał on za strumień cząstek, a nie za falę, nie rozważał więc częstotliwości światła. Najzabawniejsze jest to, że światło widzialne rzeczywiście zajmuje mniej więcej oktawę w widmie, to znaczy, że górna granica odpowiada częstotliwości około dwa razy wyższej niż dolna. Dopasowanie faktów do teorii może przypominać pomysł Izydora z czterema kolorami tęczy. Newton jednak po pierwsze wymieniał kolory rzeczywiście występujące w tęczy, a nie czarny i biały, a po drugie rozumiał, że widmo jest ciągle – mówił o stopniowym przechodzeniu jednych odcieni w inne.

## Widzimy to, co umiemy nazwać

Wiemy już, skąd siedem kolorów. Choć dla wielu z nas wskazanie tych siedmiu byłoby problemem, to chyba wszyscy uznamy, że jest ich więcej niż trzy podane przez Arystotelesa. Czy ten skądinąd dobry obserwator przyrody naprawdę nie widział żółtego ani niebieskiego? Otóż prawdopodobna jest hipoteza, według której jednym z czynników jest... język ojczysty patrzącego\*. Odróżniamy przecież „różny kolor” od „różnego odcienia” i jeśli nawet widzimy w książce widmo na ilustracji na szerokość całej strony, to i tak uznajemy „zielony” za jeden kolor, choćbyśmy umieli odróżnić kilka odcieni tej barwy. Tymczasem granice między kolorami są ustalone różnie w różnych językach\*\*.

## Widzimy to, co powinniśmy zobaczyć

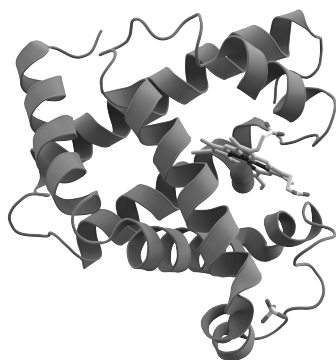
A dlaczego dzisiaj tak wiele osób widzi siedem kolorów tęczy, choć na ogół trudno się ich dopatrzeć, a w życiu codziennym nikt nie używa nazwy „indygo”? Po prostu wiemy, że powinno ich tyle być. Uczyliśmy się o tym jeszcze w przedszkolu, choćby z wierszyka Konopnickiej. Przypomina mi się tu autentyczna historia niezwiązana z tęczą, ale związana z dostrzeganiem tego, czego się spodziewamy. Otóż na pewnej wycieczce pieszej natrafiłszy na rzekę zagradzającą nam drogę. Jak to możliwe, że nie zauważyliśmy przeszkody, planując trasę? Przecież niebieska wstążka wiała się w poprzek naszej mapy, a mapę ową czytaliśmy w wyjątkowo kompetentnym gronie: nauczycielka geografii, historyk, podharcmistrzyni ZHP i autor rozdziału o mapach w podręczniku do matematyki. Otóż wiedzieliśmy, że planujemy wycieczkę na Pustynię Błędowską. Jasne więc, że nie widzieliśmy rzeki, bo takowej nie powinno przecież być na pustyni.

## Nie tylko szachy i gra go...

W 1994 roku w środowisku naukowym pojawił się konkurs CASP (*Critical Assessment of Techniques for Protein Structure Prediction*) o oryginalnej formie. Laboratorium, w którym osiągnięto postęp w opracowaniu modelu struktury przestrzennej wybranego białka metodami fizycznymi (rentgenowska analiza kryształu, niskotemperaturowa mikroskopia elektronowa, NMR), udostępniało swoje wyniki organizatorom konkursu. Do wiadomości publicznej podawano tylko kolejność (sekwencję) aminokwasów ułożonych w łańcuch danego białka, strukturę przestrzenną białka pozostawiając jedynie do wiadomości organizatorów konkursu.

Dla aktywności biologicznej białka najważniejszy jest sposób zwinięcia jego łańcucha w przestrzeni. Według reguły sformułowanej jeszcze w latach 60. ubiegłego wieku przez Christiana Anfinsena (Nagroda Nobla z chemii w 1972 r.) sekwencja aminokwasów determinuje jednoznacznie strukturę przestrzenną łańcucha. Od tamtych czasów liczne grupy doświadczalne usiływały znaleźć reguły opisujące tę strukturę. Zagadnienie błahe nie jest. Forma przestrzenna determinuje oddziaływanie białka z innymi cząsteczkami w komórce, decyduje o jego funkcji biologicznej. Na pewno wielu Czytelnikom pozwoliła ta informacja uznać, że wiedza o strukturze przestrzennej każdego białka jest najważniejsza dla zrozumienia normy i patologii w medycynie. Rosnąca lawinowo wiedza genomyczna pozwala obecnie na tworzenie molekularnych map ewolucyjnych, zagłębienie w historię rozwoju życia. Znajomość struktur przestrzennych białek, kodowanych przez geny, tę wiedzę pogłębia i rozszerza. Nawet w naszym genomie, poznanym już 20 lat temu, istnieje wiele tysięcy sekwencji kodujących białka, których funkcji wciąż nie znamy.

Wracamy do konkursu CASP. Polega on na tym, że uczestnicy jedynie na podstawie znajomości określonej sekwencji aminokwasów mają zaproponować jednoznaczną strukturę przestrzenną białka, którą jurorzy konkursu mogą porównać z ustaloną wcześniej doświadczalnie w laboratorium. Zgodność bywa różna, zależnie od zastosowanych metod teoretycznych, niekiedy jednak prawie doskonała. W konkursie CASP bierze udział około 100 zespołów z całego świata, rozstrzygnięcia zapadają co 2 lata. Organizatorem światowych konkursów związania białek jest dr Krzysztof Fidelis, absolwent Zakładu Biofizyki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, aktualnie pracuje w Genome Center Uniwersytetu Kalifornijskiego w Davis.



W tej dziedzinie w Polsce działały i osiągały światowe wyniki zespoły stosujące metody heurystyczne wspomagane specjalizowanymi programami komputerowymi (Janusz Bujnicki – Międzynarodowy Instytut Biologii Molekularnej i Komórkowej, Warszawa, Krzysztof Ginalski – do 2019 roku pracujący w Centrum Nowych Technologii Uniwersytetu Warszawskiego, Leszek Rychlewski – BioinfoBank Institute, Poznań), a także zespoły realizujące modelowanie związania białek z wykorzystaniem własnych platform symulacyjnych, bazujących na fizyce i potencjałach oddziaływania między aminokwasami (Andrzej Koliński – Wydział Chemii, Uniwersytet Warszawski i Adam Liwo – Wydział Chemii, Uniwersytet Gdański).

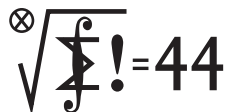
DeepMind, spółka zależna od Google'a, zaprezentowała na konkursie CASP w 2018 roku program sztucznej inteligencji AlphaFold, opisujący trójwymiarowe struktury przestrzenne białek. Ulepszona wersja programu w roku 2020 zdecydowanie wygrała konkurs, osiągając wyniki bliższe doświadczeniu niż wszystkie zespoły ludzkie. Między innymi dzięki temu programowi udało się określić budowę jednego z białek bakteryjnych – rozpracowywaną doświadczalnie od dziesięciu lat. DeepMind działa w skali godzin. W początkach 2020 roku AlphaFold obliczył także strukturę przestrzenną paru białek SARS-CoV-2.

W ten sposób sztuczna inteligencja wkroczyła na pola biologii molekularnej i medycyny bardziej spektakularnie niż zwyciężając z ludźmi w szachy i go.

Można zapytać, czy mając takie osiągnięcia, AlphaFold spowoduje zamknięcie laboratoriów stosujących stare metody przewidywania i badania struktur? Zapewne jeszcze nie jutro. Zmieni się jednak zasadniczo skala czasowa znajdowania odpowiedzi na ważne pytania z zakresu nauk podstawowych i stosowanych.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021

Lista uczestników ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2019/20

Janusz Olszewski	20 – 43,43
Marek Spychała	2 – 42,98
Tomasz Wietecha	12 – 42,77
Jakub Węrecki	41,76
Marcin Małogrosz	3 – 41,65
Paweł Burdzy	41,58
Michał Koźlik	35,73
Marcin Kasperski	4 – 32,68
Jerzy Cisło	14 – 30,04
Kacper Morawski	28,79
Bartłomiej Pawlik	27,51
Stanisław Bednarek	2 – 26,17
Piotr Sołtan	25,51
Janusz Wojtal	25,24
Szymon Kitowski	23,49
Piotr Kumor	14 – 23,38
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Witold Bednarek	8 – 21,90
Radosław Kujawa	21,78
Jędrzej Biedrzycki	21,60
Mikołaj Pater	1 – 21,49
Marian Łupieżowicz	1 – 21,26
Błażej Żmija	1 – 18,04
Paweł Najman	8 – 17,51
Grzegorz Wiączkowski	17,41
Michał Adamaszek	5 – 17,33
Łukasz Merta	1 – 17,31
Marek Prauza	4 – 16,62
Norbert Porwol	15,90
Semen Słobodianiuk	15,83
Adam Woryna	3 – 15,10

Legenda (przykładowo):

stan konta 8 – 21,90 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 21,90 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2018, 2019 lub 2020.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

## Zadania z matematyki nr 815, 816

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**815.** Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , spełniające równanie

$$f(x + y^3) + g(x^3 + y) = h(xy) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

**816.** Liczba naturalna  $n$  ma taki dzielnik dodatni  $d$ , że  $d^2 - 2$  dzieli się przez  $n - 1$ . Wykazać, że  $n$  jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 816 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

**807.** Dane są liczby  $A, B > 0$ ;  $AB < 1$ . Funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  warunki

$$|f(x) - f(y)| \leq A \cdot |x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq B \cdot |x - y|,$$

przy czym  $f$  jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru  $\mathbb{R}$  na cały zbiór  $\mathbb{R}$ ; ma więc funkcję odwrotną  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f(h(x)) = h(f(x)) = x$ ). Udowodnić, że funkcja  $g + h$  też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru  $\mathbb{R}$  na cały zbiór  $\mathbb{R}$ .

**808.** Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych  $x, y > 1$  spełniających równanie  $x^y = xy$ .

**807.** Z podanych warunków (*Lipschitza*) wynika ciągłość funkcji  $f, g$ . Funkcja  $f$  jest ciągłą bijekcją zbioru  $\mathbb{R}$ ; wiadomo, że funkcja odwrotna  $h = f^{-1}$  wtedy też jest ciągła. Przy tym spełnia warunek:  $|h(x) - h(y)| \geq \frac{1}{A}|x - y|$ .

Mamy wykazać, że funkcja  $g + h$  jest bijekcją zbioru  $\mathbb{R}$ . Różnowartościowość: założmy, że  $g(x) + h(x) = g(y) + h(y)$ ; wówczas

$$|x - y| \geq \frac{1}{B}|g(x) - g(y)| = \frac{1}{B}|h(y) - h(x)| \geq \frac{1}{AB}|x - y|,$$

a to (wobec założenia  $AB < 1$ ) wymusza równość  $x = y$ .

Różnowartościowa funkcja ciągła  $g + h$  musi być ściśle monotoniczna. Pozostaje uzasadnić, że odwzorowuje ona zbiór  $\mathbb{R}$  na *cały* zbiór  $\mathbb{R}$ . To zaś wynika na przykład z szacowania

$$\begin{aligned} |g(x) + h(x)| &\geq |h(x) - h(0)| - |g(x) - g(0)| - |g(0) + h(0)| \geq \\ &\geq \frac{1}{A} \cdot |x - 0| - B \cdot |x - 0| - |g(0) + h(0)| = C \cdot |x| + D, \end{aligned}$$

ze stałymi  $C = \frac{1}{A} - B > 0$ ,  $D = -|g(0) + h(0)|$ . Pokazuje ono, że  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |g(x) + h(x)| = \infty$ . W połączeniu z ciągłością i ścisłą monotonicznością funkcji  $g + h$ , uzasadnia to jej bijektywność ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

**808.** Gdy liczby wymierne  $x, y > 1$  spełniają podane równanie  $x^{y-1} = y$ , wówczas zapisując  $x$  oraz  $y - 1$  w postaci ułamków nieskracalnych  $y - 1 = \frac{a}{b}$ ,  $x = \frac{c}{d}$  dostajemy równanie

$$c^a b^b = (a + b)^b d^a.$$

Ponieważ  $\text{nwd}(c, d) = 1$  oraz  $\text{nwd}(b, a + b) = 1$ , implikuje to układ równań

$$(1) \quad (a + b)^b = c^a \quad \text{oraz} \quad b^b = d^a.$$

Stąd – ponownie z uwagi na warunek  $\text{nwd}(a, b) = 1$  (tym razem stosowany do wykładników w równaniach (1)) – wynika, że

$$(2) \quad a + b = m^a, \quad c = m^b \quad \text{oraz} \quad b = n^a, \quad d = n^b$$

dla pewnych liczb naturalnych  $m, n$ . Teraz szacowanie  $a = m^a - b = m^a - n^a \geq (n + 1)^a - n^a \geq 2^a - 1$  pokazuje, że  $a = 1$ . Ze związków (2) dostajemy:  $b = n$ ,  $m = n + 1$ ,  $c = (n + 1)^n$ ,  $d = n^n$ , więc ostatecznie

$$x = \frac{c}{d} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad y = \frac{a+b}{b} = \frac{n+1}{n}.$$

Na odwrót, łatwo sprawdzić, że każda para  $(x, y)$  postaci  $\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \frac{n+1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , spełnia wyjściowe równanie.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałęcki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (14), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (20), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (5), P. Kubit (7), J. Cisło (14), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz, K. Kamiński, J. Fiett (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczbą w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, E. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;  
 „jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwick, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, E. Merta, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, M. Pater, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawisławski, B. Żmija, P. Żmijewski.

Wobec jednorodności można przyjąć, że  $s = 1$  (więc  $\frac{1}{6} \leq c < \frac{1}{2}$ ); pozostaje pokazać, że

$$(2) \quad w(c) := c(1-c) + \frac{1}{4}(1-c)^2(1-6c) \geq \frac{1}{9}.$$

Tę własność (wielomianu jednej zmiennej!) można uzasadniać różnymi sposobami. Autor omawianej pracy użył rachunku pochodnych – nie ustrzegając się w tym usterki; ona jednak wydaje się drobna wobec urody rozumowania (oszacowanie (1) i sprowadzenie problemu do zależności (2)); zaś nierówność (2) da się uzasadnić króciutko:  $w(c) - \frac{1}{9} = \frac{1}{36}(5-6c)(1-3c)^2 \geq 0$ .

**Zadanie 790.**  $[\triangle ABC$  ostrokątny;  $D, E \notin \triangle ABC$ ;  $|AD| = |BD|$ ,  $|AE| = |CE|$ ;  $AD \perp BD$ ,  $AE \perp CE$ ;  $CD \cap BE = \{P\}$ ;  $M, N$  – środki  $BC, DE \Rightarrow MN \perp DE \perp AP$ ] ( $WT=2,68$ ;  $LPR=12$ ). Dziwi taki stosunkowo wysoki współczynnik trudności przy tak – zdawałoby się – prostym zadaniu. Kilka osób zwróciło uwagę, że druga (nieco trudniejsza) część tezy ( $DE \perp AP$ ) to bezpośrednia konsekwencja faktu (dość znanego),

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2019/20

Pora na coroczne omówienie sezonu ligowego. Aż dziw, żadne z zadań nie okazało się rzetelnie trudne: współczynnik trudności ( $WT$ ) ani razu nie przekroczył trójki; liczba prawidłowych rozwiązań ( $LPR$ ) tylko w dwóch zadaniach poniżej 10. Również bardzo niewiele odnotowujemy rozwiązań uderzających oryginalnością. Czyli nie ciekawego? Zupełnie błędne wrażenie: mnóstwo ciekawych komentarzy do zadań. Tu wiodącym autorytetem jest **Piotr Kumor**; do każdego zadania teorii liczbowego był w stanie stworzyć sążnisty elaborat, omawiający samo zagadnienie („jest dobrze znane”) wraz z obszerną otoczką – teorią wokół zadania, historią, bibliografią. Także inni uczestnicy ligi sypali interesującymi uwagami.

W minionych latach staraliśmy się włączać podobne komentarze, w formie ekstraktu redakcyjnego, do drukowanego tekstu omówienia. Tym razem ich rozmiar nie dał temu szans. Za to szansą okazał się równoległy numer *Delty* w wersji elektronicznej; tam pojemność (nieograniczona) pozwoliła zamieścić wybrane prace, wraz z nadbudową erudycyjną, w całości lub z nieznaczными skrótami. Czytelników zapraszamy do ich lektury; można się naprawdę wiele ciekawego dowiedzieć.

\*\*\*

**Zadanie 786.** [Istnieje nieskończenie wiele czwórek  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ :  $ab - 1, bc - 1, ac - 1, bd - 1, cd - 1$  to kwadraty] ( $WT=1,22$ ;  $LPR=19$ ). Niefortunnie sformułowane było to zadanie; lepiej byłoby pytać o nieskończony ciąg *rozłącznych* takich czwórek – bo w obecnej wersji wystarczyło ustalić jedną lub dwie zmienne (np.  $b = 1, c = 2$ ) i tylko żonglować pozostałymi trzema lub dwiema. Wszelako i ta ambitniejsza wersja została z powodzeniem zaatakowana przez wielu rozwiązujących. Liczne interesujące uwagi przedstawił **P. Kumor** ( $\rightarrow$  wydanie elektroniczne); na przykład, że nie wiadomo, czy istnieje choć jedna taka czwórka, by również liczba  $ad - 1$  była kwadratem. . .

**Zadanie 787.** [ $M \subset \mathbb{Z}$ ;  $0 < |M| = n < \infty \Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n)$  (permutacja zbioru  $M$ )  $\forall i, j, k: (i < j < k \Rightarrow x_i + x_k \neq 2x_j)$ ] ( $WT=2,26$ ;  $LPR=11$ ). Nietrudne; rozwiązania na ogół podobne do firmowego. Także i w tym zadaniu **P. Kumor** wskazał ciekawe uogólnienia; na przykład, że w treści zadania nie jest istotne, by zbiór  $M$  składał się z liczb całkowitych – może to być dowolny skończony podzbiór dowolnej przestrzeni liniowej nad  $\mathbb{Q}$ ; i mnóstwo innych komentarzy (więc znów:  $\rightarrow$  wydanie elektroniczne).

**Zadanie 788.** [ $\forall a, b, c$  (boki  $\triangle$ ):  $\sum_{\text{cykl}} (a^2b + ab^2) - 3abc \geq t(\sum a)^3$ ;  $\max t = ?$ ] ( $WT=1,82$ ;  $LPR=13$ ). Wynik:  $\max t = 1/9$ ; równość przy  $a = b = c$ ; należało więc pokazać, że  $F(a, b, c) \geq \frac{1}{9}(\sum a)^3$ , gdzie  $F(a, b, c)$  oznacza wyrażenie po lewej stronie. Prawie wszyscy (a także rozwiązanie firmowe) używali nierówności Schura lub/i innej mądrej wiedzy. Toteż zadziwia prostotą metoda, jaką zastosował **Karol Matuszewski**: niech  $s = a + b + c$  oraz (b.s.o.)  $c \geq s/6$ ; skoro  $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(s-c)^2$ , zatem (po prostym przekształceniu)

$$(1) \quad F(a, b, c) = sc(s-c) + ab(s-6c) \geq sc(s-c) + \frac{1}{4}(s-c)^2(s-6c).$$

że gdy na bokach  $AB, AC, BC$  zostaną zbudowane kwadraty o środkach (odpowiednio)  $D, E, F$ , wówczas proste  $AF, BE, CD$  zawierają wysokości trójkąta  $DEF$ ; zatem punkt  $P$  to jego ortocentrum. Podawano dowody tego twierdzenia (zresztą niezbyt trudne) lub (**J. Fiett**) odsyłał do książki: Coxeter, Greitzer, *Geometry Revisited*, 1967 (Th. 4.81).

Było też, jak zwykle w geometrii, kilka rozwiązań analitycznych (w prostokątnym układzie współrzędnych), bardzo różniących się urodą i prostotą; rozmiary: od pół strony banalnych równości (**J. Cisło**) do czterech bitych stron zaiste żmudnych rachunków.

**Zadanie 796.** [ $m > n > 1$ ;  $m = 2l$ ;  $l, n \in \mathbb{N} \Rightarrow ((\exists x, y \in \mathbb{N}: x^m + y^m = (x+y)^n) \Leftrightarrow (m-n)|(n-1))$ ] ( $WT=2,34$ ;  $LPR=12$ ). Założenie parzystości  $m$  (oraz uporządkowanie:  $m > n$ ) miało jedynie na celu zapewnienie poziomu elementarności, do jakiego stara się dostosowywać

nasza liga. Wszelako dla naszych etatowych erudytów obecność takiego sztucznego założenia stała się oczywistym wyzwaniem. **Piotr Kumor** znalazł – używając twierdzenia Zsigmondy’ego (por.  $\Delta_{20}^2$ ) – rozwiązanie równania  $x^m + y^m = (x + y)^n$  w czwórkach liczb naturalnych  $(m, n, x, y)$ . **Janusz Olszewski** – tak samo, przy czym pokazał również inną metodę, nie odwołując się do tw. Zsigmondy’ego; poszedł ponadto jeszcze krok dalej i podał pełne rozwiązanie równania w liczbach  $m, n \in \mathbb{Z}$  oraz  $x, y \in \mathbb{N}$ . Oto wynik: dobre są czwórki

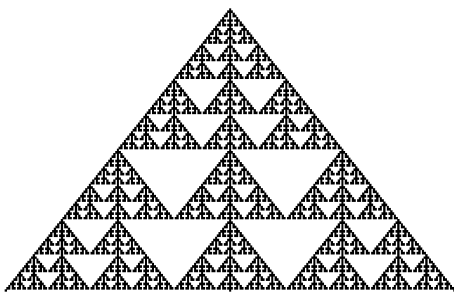
$$(1, 1, x, y) \quad (x, y \in \mathbb{N} \text{ dowolne}); \quad (3, 2, 2, 1); \quad (3, 2, 1, 2);$$

$$(m, n, 2^k, 2^k) \quad (k, m, n \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0, \quad n - 1 = k(m - n));$$

i tylko takie. Po szczegóły – ponownie odsyłamy do wersji elektronicznej.

**Zadanie 797.** [max  $\lambda = ?$  gdy  $\forall \triangle ABC$ : dist( $C, AB$ ) =  $h$ ;  $M, N$  – środki  $AC, BC$ ;  $P \in AB$ ; okrąg ( $NBP$ ) styczny do  $BM \Rightarrow |AP| \geq \lambda h$ ] ( $WT=2,57$ ;  $LPR=10$ ). Wynik: max  $\lambda = \sqrt{2}$  uzyskali wszyscy rozwiązujący. Ale tylko trzej: **M. Adamaszek, M. Małogrosz, J. Olszewski** zrobili to zadanie „geometrycznie” (jak firmówka); pozostali – mocno rachunkowo (na ogół żmudnie i nie zawsze bez zastrzeżeń).

**Zadanie 798.** [Diagram  $\begin{matrix} & & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & & & & \end{matrix}$ ; (wiersz  $n$ ) =  $(2n+1$  liczb  $> 0$ ); każdy element to suma trzech liczb nad nim ( $\searrow, \downarrow, \swarrow$ )  $\Rightarrow$  (a) w każdym wierszu o numerze  $n \geq 2$  jest liczba parzysta; (b) w których wierszach są dokładnie trzy liczby nieparzyste?] ( $WT=2,11$ ;  $LPR=11$ ). Bierzemy wszystkie wyrazy (mod 2); powstaje trójkątny diagram zero-jedynkowy, jak na ilustracji poniżej (skopiowany z pracy, którą przysłał **Janusz Fiett**; bardzo podobne przysłał **J. Olszewski** i **A. Kurach**). Diagram przypomina „trójkąt Pascala (mod 2)” i okazuje się jeśli nie równie sławny, to niewiele mniej. Ponownie **Piotr Kumor** udzielił wyczerpującej lekcji; jego praca ( $\rightarrow$  elektroniczne wydanie numeru) zawiera mnóstwo ciekawych informacji.



Kilku uczestników wskazało bardzo proste uzasadnienie tezy (a): wystarczy kontrolować (mod 2) cztery początkowe wyrazy  $n$ -tego wiersza; dla  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  mamy (kolejno) bloki: 1010, 1101, 1000, 1110, 1010, i wpadamy w cykl; bloki powtarzają się z okresem 4; stale jest obecne jakieś zero.

Teza (b): dokładnie trzy jedynki tylko dla  $n = 2^s$  – jest znacznie ciekawsza. Użyty w rozwiązaniu firmowym język algebry (wielomiany  $(1 + x + x^2)^n$ ) nie jest jedynym możliwym, ale jest wygodny. Język „czystej kombinatoryki” też pozwala zapisać rozumowanie, jednak kosztem sporych uciążliwości w opisie (**Janusz Olszewski** przysłał rozwiązania w obu tych stylach). Analizując wspomniane wielomiany bardziej wnikliwie, **Mikołaj Pater** wykazał

( $\rightarrow$  e-wydanie), że liczba jedynek w  $n$ -tym wierszu (oznaczona jako  $b(n)$ ) spełnia zależności rekurencyjne (dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$b(2n) = b(n); \quad b(4n+1) = 3b(n); \quad b(4n+3) = b(2n+1) + 2b(n);$$

to znaczne wzmocnienie tezy (b).

**Zadanie 800.** [Dane  $a, b > 0$ ;  $f(x) = \frac{1}{2}(e^{1-a/x} + e^{1-b/x})$  dla  $x > 0 \Rightarrow (\exists! L > 0: f(L) = 1)$ ; usytuowanie  $L$  względem średnich  $A, G, H$  liczb  $a, b$ ?] ( $WT=2,84$ ;  $LPR=5$  (?)). Odpowiedź:  $A \geq G \geq L \geq H$ . Dobre rozwiązania przysłał: **Michał Adamaszek** (autor zadania), **W. Bednarek, J. Olszewski, B. Żmija** oraz (z niewielką, łatwo usuwalną usterką) **P. Sołtan**; były ponadto dwie prace z usterkami nieco bardziej znaczącymi. Jeszcze kilka osób przysłało uzasadnienie samej tylko nierówności  $G \geq L$ , wyraźnie łatwiejszej niż  $L \geq H$ .

Funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca, więc ta ciekawsza teza  $H \leq L$  sprowadza się do wykazania, że  $f(H) \leq 1$ . Urzekająco prosty dowód tej ostatniej nierówności przedstawił **Witold Bednarek** (przypomnijmy – uczestnik Ligi od momentu jej narodzin): ponieważ  $e^t \geq 1 + t$ , wobec czego  $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$  dla  $t > -1$ , zatem biorąc kolejno  $t_1 = \frac{a}{2b} - \frac{1}{2}$  oraz  $t_2 = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}$ , dostajemy (dla  $H = \frac{2ab}{a+b}$ )

$$f(H) = \frac{1}{2} \left( e^{1-\frac{a}{H}} + e^{1-\frac{b}{H}} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{-t_1} + e^{-t_2} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} \right) = 1.$$

Pięknie!

**Zadanie 804.** [ $p > 2$  liczba pierwsza;  $A_r = \{(x_1, \dots, x_p) - \text{permutacja zbioru } \{0, \dots, p-1\}: \sum kx_k \equiv r \pmod{p}\} \Rightarrow |A_r| = |A_s|$  dla  $0 < r < s < p$ ] ( $WT=2,58$ ;  $LPR=9$ ). Dobre prace: **M. Adamaszek, W. Drozd, A. Kurach, K. Matuszewski, Ł. Merta, J. Olszewski, M. Pater, R. Słowik, B. Żmija**. Najciekawsze w tym zadaniu było to, czego w zadaniu nie było. Zbiory  $A_1, \dots, A_{p-1}$  mają jednakową liczbę elementów; zgoda; a ile wynosi ta liczba? Oznaczmy tę wspólną wartość (dla ustalonej liczby pierwszej  $p$ ) przez  $b_p$ ; jak się ona porównuje z liczebnością zbioru  $A_0$ , którą (dla tego samego  $p$ ) oznaczmy  $a_p$ ? Jasne, że  $a_p + (p-1)b_p = p!$ , więc poszukiwanie wartości  $b_p$  można zastąpić obliczaniem  $a_p$ ; nie jest jednak znany żaden prosty wzór, wyrażający  $a_p$  (lub  $b_p$ ) jako funkcję zmiennej  $p$  (kilka wartości:  $a_3 = 0, a_5 = 20, a_7 = 630, a_{11} = 3634950; a_p < b_p$  dla  $p \leq 7$ , ale nie dla  $p = 11, 13, 17, 19$ ).

**Michał Adamaszek** zwrócił uwagę, że dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$  (niekoniecznie pierwszej) można określić  $a_n$  jako liczbę zbioru permutacji  $(x_1, \dots, x_n)$  reszt (mod  $n$ ), spełniających warunek  $\sum kx_k \equiv 0 \pmod{n}$ , i że ciąg  $(a_n)$  to A004204 w OEIS (wartości numeryczne dla  $n \leq 20$ ).

Dla liczby pierwszej  $p$  określa się *macierz Schura*  $M_p = [\alpha^{kl}]_{1 \leq k, l \leq p}$ , gdzie  $\alpha$  jest dowolnym nieracjonalnym  $p$ -tym pierwiastkiem z jedności. Liczba  $\sum_{\pi} \prod_k \alpha^{k\pi(k)}$  (sumowanie po wszystkich permutacjach  $\pi$ ) – tzw. *permanent* macierzy  $M_p$  (ozn. perm  $M_p$ ) – jest równa  $a_p - b_p$  (nietrudne ćwiczenie). Numeryczne wyznaczanie wartości  $a_p$  (lub  $b_p$ ) ma więc złożoność obliczeniową jak wyznaczanie perm  $M_p$  – czyli wysoką; wiele ciekawych informacji można znaleźć w sieci (Google: permanent of a matrix; także ciąg A003112 w OEIS).

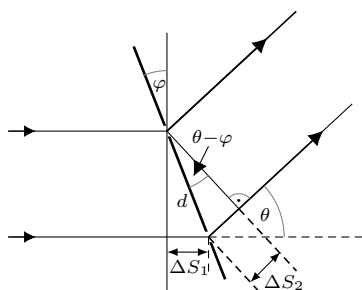
# Klub 44 F



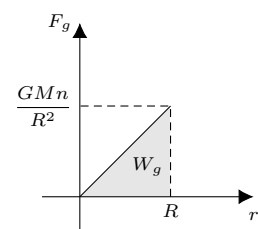
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

## Zadania z fizyki nr 712, 713

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**712.** Długi, cienki i wiotki dywan o długości  $l$  i masie  $m$  leży na podłodze. Jeden z końców dywanu jest odgięty i ciągnięty do tyłu ze stałą prędkością  $v$  po części dywanu, która nadal leży na podłodze (rys. 1). Jaka siła działa na dywan w kierunku poziomym? Tarcia między częściami dywanu nie uwzględniamy, dolna część dywanu pozostaje nieruchoma.

**713.** Ze szczytu góry na szerokości geograficznej północnej  $\varphi_0 = 30^\circ$  wystrzelono pocisk wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna Ziemi i wprowadzono go na orbitę kołową wokół Ziemi. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Dane są: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi  $T$ , promień Ziemi  $R$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ . Zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbujemy opory powietrza.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

**704.** Wąska monochromatyczna wiązka światła laserowego pada prostopadłe na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione są pionowo. Jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt  $\varphi < \pi/2$  wokół osi równoległej do szczelin siatki?

**705.** W jednorodnej kuli o promieniu  $2R$  i gęstości  $\rho$  znajduje się współśrodkowa kulista wnęka o promieniu  $R$ . Znaleźć energię potencjalną punktu materialnego o masie  $m$  znajdującego się w wydrążeniu, w odległości  $R/2$  od środka wydrążonej kuli. Oddziaływania zewnętrzne zaniedbujemy.

**704.** Gdy światło o długości fali  $\lambda$  pada prostopadłe na siatkę o stałej  $d$ , położenie maksimum interferencyjnych wyznacza kąt  $\theta$  dany wzorem  $d \sin \theta = k\lambda$ , gdzie  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Po obrocie siatki o kąt  $\varphi$  równanie to musimy zmodyfikować, przy czym wystarczy rozważyć interferencję na dwóch szczelinach odległych o  $d$  (rys. 2). Różnica dróg optycznych promieni ugiętych pod kątem  $\theta$  wynosi teraz  $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = d \sin \varphi + d \sin(\theta - \varphi)$ , a warunek na maksima interferencyjne  $d(\sin \varphi + \sin(\theta - \varphi)) = k\lambda$ . Widać, że po obróceniu siatki położenie zerowego maksimum nie ulegnie zmianie, ale obraz interferencyjny przestanie być symetryczny. Przyjmijmy, że kąt  $\varphi$  jest dodatni, gdy obracamy siatkę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (podobnie dodatni kąt  $\theta$  odpowiada promieniowi ugiętemu w tym samym kierunku). Wtedy maksymalny kąt ugięcia  $\theta_{\max} = \pi/2 + \varphi$ , odpowiadająca mu różnica dróg optycznych  $\Delta s = d(1 + \sin \varphi)$ . Maksymalna liczba maksimum na ekranie dla dodatnich  $\theta$  jest równa

$$k_+ = \lfloor d(1 + \sin \varphi) / \lambda \rfloor.$$

Analogicznie  $\theta_{\min} = -\pi/2 + \varphi$ , maksymalna liczba maksimum dla ujemnych kątów ugięcia

$$k_- = \lfloor d(1 - \sin \varphi) / \lambda \rfloor < k_+.$$

**705.** Zgodnie z prawem Gaussa na ciało umieszczone wewnątrz wydrążenia siła grawitacji nie działa. Przesunięcie ciała między dowolnymi punktami wewnątrz wydrążenia nie wymaga więc żadnej pracy i energia potencjalna wewnątrz wydrążenia jest wszędzie taka sama. Najwygodniej jest obliczyć ją dla środka wydrążenia. W tym celu skorzystamy z zasady superpozycji i od energii w środku pełnej kuli o promieniu  $2R$  oraz gęstości  $\rho$  odejmiemy energię w środku kuli o rozmiarach wydrążenia i takiej samej gęstości.

Energię potencjalną  $E_p(O)$  w środku  $O$  jednorodnej kuli o gęstości  $\rho$  i promieniu  $R$  znajdziemy ze wzoru  $E_p(A) - E_p(O) = W_q(A \rightarrow O)$ , gdzie  $A$  jest punktem na powierzchni kuli, a  $W_q(A \rightarrow O)$  pracą siły grawitacji przy przenoszeniu ciała o masie  $m$  do środka kuli o masie  $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ . Ponieważ siła grawitacji wewnątrz jednorodnej kuli zmienia się liniowo (rys. 3),

$$W_q(A \rightarrow O) = GMm / (2R) = 2\pi Gm\rho R^2 / 3.$$

Uwzględniając, że  $E_p(A) = -GMm/R$ , otrzymujemy

$$E_p(O) = -2\pi R^2 \rho Gm.$$

Szukana energia potencjalna w wydrążonej kuli wynosi

$$E_{px}(O) = -2\pi \rho Gm((2R)^2 - R^2) = -6\pi R^2 \rho Gm.$$

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klubu 44 F**  
po zakończeniu  
roku szkolnego 2019/20  
(po 701 zadaniach)

Michał Koźlik (Gliwice)	4 – 42,82
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Krzysztof Magiera (Łosiów)	3 – 39,55
Jan Zambrzycki (Białystok)	2 – 31,61
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Jacek Konieczny (Poznań)	31,13
Tomasz Wietecha (Tarnów)	14 – 29,47
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Sławomir Buć (Myszków)	25,94
Mateusz Kapusta (Wrocław)	25,37
Konrad Kapcia (Częstochowa)	1 – 19,60
Piotr Adamczyk (Warszawa)	17,94
Paweł Perkowski (Ożarów)	3 – 17,14

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2017–2019 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 17 punktów. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2019/20

Współczynnik trudności zadań w ubiegłym roku szkolnym rozłożył się dosyć równomiernie, dla pięciu zadań był niższy niż 2, dla sześciu przekroczył wartość 3.

Wśród tych trudniejszych warte dokładniejszego omówienia wydaje się zadanie **696** ( $WT = 3,59$ ). Lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich o takich samych energiach wylatywała z pewnego punktu naładowanego kondensatora cylindrycznego. Kąt rozwarcia wiązki wynosił  $\alpha$ . Zewnętrzna okładka kondensatora naładowana była dodatnio. Prędkości jonów leżały w płaszczyźnie prostopadłej do osi kondensatora. Jony ze środka wiązki poruszały się po okręgu o promieniu  $r_0$  współśrodkowym z okładkami kondensatora. Należało wykazać, że wiązka jonów zogniskuje się ponownie w pewnym punkcie, znaleźć kąt, jaki zatoczy do tego momentu, oraz maksymalną szerokość wiązki. W rozwiązaniu „firmowym” zostało wykazane, że jony poruszają się w kierunku radialnym ruchem harmonicznym z jednakowym okresem, maksymalna szerokość wiązki była równa podwojonej amplitudzie drgań. Wśród nadesłanych rozwiązań nie było całkowicie poprawnych, a autorzy najbardziej zaawansowanych korzystali z zasady zachowania energii. Przedstawię więc szkic rozwiązania energetycznego.

Zasada zachowania energii ma postać

$$mv_0^2/2 = mv_{\min}^2/2 + bq \ln(1 + x_{\max}/r_0),$$

gdzie  $v_0$  jest prędkością początkową najbardziej odchylonego jonu, tworzącą kąt  $\alpha/2$  ze styczną do okręgu o promieniu  $r_0$ , a  $v_{\min}$  to jego prędkość w punkcie najbardziej oddalonym od środka okręgu. Siła działająca na jon o ładunku  $q$  jest równa  $F = bq/r$ ,  $bq = mr_0^2 \omega_0^2$ ,  $\omega_0$  jest prędkością kątową jonu poruszającego się po okręgu o promieniu  $r_0$ .

Siła elektryczna jest centralna, więc spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$v_{\min}(r_0 + x_{\max}) = \omega_0 r_0^2 \cos(\alpha/2).$$

Podstawiając otrzymane stąd  $v_{\min}$  do zasady zachowania energii, otrzymujemy

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) = \frac{r_0^2 \cos^2(\alpha/2)}{(r_0 + x_{\max})^2} + 2 \ln(1 + x_{\max}/r_0).$$

Dla  $x_{\max} \ll r_0$  możemy ograniczyć się do pierwszych wyrazów rozwinięcia logarytmu w szereg Taylora:

$$\ln(1 + x_{\max}/r_0) = x_{\max}/r_0 - x_{\max}^2/2r_0^2. \text{ Stąd}$$

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) \frac{2r_0 x_{\max} + x_{\max}^2}{(r_0 + x_{\max})^2} = \frac{(2r_0 x_{\max} - x_{\max}^2)}{r_0^2}.$$

Aby otrzymać wyrażenie z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu, przybliżamy  $\sin^2(\alpha/2) = \alpha^2/4$ ,  $\cos^2(\alpha/2) = 1$  i otrzymujemy

$$\alpha^2/4 = 2x_{\max}^2/r_0^2.$$

Po pomnożeniu obu stron przez  $mv_0^2$  widzimy, że jest to równanie na energię oscylatora harmonicznego w kierunku radialnym:

$$\frac{mv_0^2 \sin^2(\alpha/2)}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2},$$

gdzie  $k = 2qb/r_0^2$ . Maksymalna szerokość wiązki jonów jest równa  $d = 2x_{\max} = r_0 \alpha / \sqrt{2}$ .

Najwyższej możliwej oceny nie uzyskało też żadne z rozwiązań zadania **683** ( $WT = 3,5$ ). Jego celem było pokazanie, że względne zaburzenie wyniku pomiaru napięcia na elemencie to stosunek oporu woltomierza do oporu wewnętrznego źródła nawet wtedy, gdy opór badanego elementu jest porównywalny, a nawet większy od oporu woltomierza. Nadesłane rozwiązania nie zawierały analizy zaburzenia względnego, a jedynie obliczenia bezwzględnego zaburzenia pomiaru.

Najwyższy współczynnik trudności miało zadanie **688** ( $WT = 3,77$ ). Klocek leżał na nieruchomej, szorstkiej taśmie transportera i przymocowany był do ściany za pomocą sprężyny. Po uruchomieniu taśmy ustalały się po pewnym czasie drgania harmoniczne. Należało znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Jedyne w pełni poprawne rozwiązanie z uwzględnieniem możliwych przypadków przysłał **Tomasz Wietecha**. Pan Tomasz był też autorem jedynego całkowicie poprawnego rozwiązania zadania **686** ( $WT = 3,23$ ) na temat niecentralnego zderzenia nieważkiego pręta z kulkami na końcach z nieruchomym kołkiem.

W zadaniu **698** ( $WT = 3,19$ ) z elektrostatyki należało znaleźć siłę oddziaływania między dwiema leżącymi naprzeciw siebie, równomiernie naładowanymi półsferami o wspólnym środku i wspólnej płaszczyźnie największego przekroju, ale różnych promieniach. Bezbłędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk**. Wyróżnił się też **Konrad Kapcia**, który przedstawił prawidłową metodę postępowania, korzystając z zasady superpozycji. Rozwiązanie zawierało drobny błąd wynikający z nieuwagi, którego skutkiem był dwukrotnie za mały wynik. Inne rozwiązania zawierały próby całkowania wkładów od elementów sfer, niestety zakończone niepowodzeniem.

Jedyne ocenione maksymalnie rozwiązanie zadania **694** ( $WT = 3,19$ ) dotyczącego ruchu statku napędzanego „miotaczem wody” przysłał **Paweł Perkowski**.

Dwanaście z tegorocznych rozwiązań **Tomasza Wietechy** uzyskało maksymalną ocenę, trzy z nich były jedynymi poprawnymi z nadesłanych. Drugie miejsce w tej konkurencji zajął **Paweł Perkowski**, który przedstawił dziesięć rozwiązań bez usterek. **Jan Zambrzycki** zdobył siedem ocen maksymalnych, a **Piotr Adamczyk** sześć.

**Paweł Perkowski** po raz trzeci przekroczył w tym roku barierę 44 punktów.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Jeziora pod powierzchnią Marsa

Tekst przygotowany na podstawie artykułów: *Multiple subglacial water bodies below the south pole of Mars unveiled by new MARSIS data*, Lauro, S.E., Pettinelli, E., Caprarelli, G., et al. 2020, „Nature Astronomy” oraz *Distribution and habitability of (meta)stable brines on present-day Mars*, Rivera-Valentin, E.G., Chevrier, V.F., Soto, A., et al. 2020, „Nature Astronomy” 4,756-761.

Oczywiście, aby udowodnić istnienie wody na Marsie, obserwatorzy mierzą liczne parametry. Pierwszym z nich jest siła sygnału – woda ma większą zdolność do odbijania fali niż skała, dlatego silniejszy sygnał odpowiada wodzie płynnej. Kolejnym parametrem jest czystość odbitego sygnału. Mniej zanieczyszczony sygnał oznacza gładką powierzchnię interpretowaną jako płynna woda (można sobie wyobrazić, że woda jest „gładsza” od skały). Trzecim parametrem wskazującym na obecność wody są zmiany intensywności odbieranego sygnału. Takie zmiany są większe w przypadku przejścia fali z suchego obszaru do mokrego obszaru. Istnieje ogólna zasada, że zmienność powyżej 6 dB odpowiada wodzie.

Październik 2020 roku był miesiącem fascynujących odkryć dotyczących sąsiadujących z nami planet. Na Wenus wykryto fosfinę, która może wskazywać na istnienie życia mikrobiologicznego. W tym samym miesiącu na Marsie potwierdzono obecność wody w stanie ciekłym! Bardzo słonej wody.

Poszukiwania wody na Marsie trwają już od dłuższego czasu. Wiemy, że biegun północny Marsa składa się w dużej części z lodu. Co więcej, naukowcy znaleźli również dowody na to, że na planecie kiedyś płynęła woda, a nawet, że istniał na niej cały ocean. Główny wniosek z dotychczasowych obserwacji planety jest jednak taki: kiedyś Mars był bogaty w wodę, a teraz ma jej o wiele mniej, prawdopodobnie z powodu ekstremalnego globalnego ocieplenia. Jednak grupa naukowców pod kierunkiem Sebastiana Emanuela Lauro z Uniwersytetu Roma Tre (Università degli Studi Roma Tre) udowodniła, że nie jest to do końca prawda. Pokazali oni, że pod marsjańskimi lodowcami na biegunie północnym znajdują się zbiorniki ciekłej wody. Wsłuchując się w echo wysłanych w kierunku lodowca fal radiowych, utworzyli mapę podziemnych (czy raczej podlodowcowych) jezior. Do tego celu wykorzystali Mars Advanced Radar for Subsurface & Ionosphere Sounding (MARSIS) – instrument badawczy umieszczony na satelicie Mars Express krążącym wokół Czerwonej Planety.

Metoda obserwacji wykorzystująca tego typu radar opiera się na bardzo prostym zjawisku odbicia fali. W kierunku powierzchni planety wysyłane są fale radiowe. Sygnał przechodzi przez lód na biegunie północnym, odbija się od tego, co jest pod spodem, i jest znów odbierany przez satelitę. Czas potrzebny na powrót sygnału do satelity zależy od tego, jak gruba jest warstwa lodu, a intensywność powracającego sygnału zależy od tego, jaki rodzaj materiału znajduje się pod jego powierzchnią. W ten sposób naukowcy odkryli, że pod powierzchnią lodowca znajduje się wiele zbiorników wodnych. Między innymi jezioro o powierzchni 600 km<sup>2</sup>, czyli większe od całej Warszawy!

Tutaj możecie zapytać: ale chwileczkę, czy temperatura na Marsie nie jest zbyt niska, żeby woda mogła tam występować w stanie ciekłym? Oczywiście to prawda. Średnia temperatura na powierzchni Czerwonej Planety to niecałe –63°C. Płynna woda nie może tam istnieć. Dlatego obecność ogromnego podziemnego jeziora można tłumaczyć na dwa sposoby. Pierwszy: w tym rejonie ma miejsce aktywność magmowa. Innymi słowy, gdzieś pod jeziorem przepływa lub nawet wydobywa się lava. Drugi: woda jest zasolona. Mieszanka wody i soli znacząco obniża temperaturę zamarzania takiego roztworu.

Ta ostatnia teoria zgadza się z symulacjami przeprowadzonymi przez grupę naukowców z Lunar and Planetary Institute w Hudson. Wykazali oni, że na Marsie roztwory wody i nadchloranu wapnia (Ca(ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>), pierwiastka obficie występującego na powierzchni Czerwonej Planety, mogą istnieć w stanie ciekłym.

Od jakiegoś czasu wiemy, że w Układzie Słonecznym woda występuje dość obficie. Jednak temperatury na powierzchniach innych planet i księżyców pozwalają jedynie na jej istnienie w postaci lodu – tak jak na księżycu Europa, który prawie w całości składa się z lodu. Płynna woda jest prawie zawsze kojarzona z życiem, ponieważ na Ziemi jest ona niezbędna do istnienia niemal wszystkich żywych organizmów. Czy w słonej wodzie podlodowcowego jeziora na Marsie mogło rozwinąć się życie? Na odpowiedź musimy jeszcze poczekać.

*Anna DURKALEC*

## Niebo w lutym

W lutym Słońce wreszcie nabiera wysokości – po miesiącach, w których przechodziło przez najbardziej na południe wysuniętą część ekliptyki. Przez miesiąc wysokość jego górowania zwiększa się do 30°, a zatem czas jego przebywania nad widnokregiem wydłuży się do prawie 11 godzin. O tej porze roku ekliptyka tworzy duży kąt z horyzontem wieczorem i mały rano, stąd też o zmierzchu występują dobre warunki obserwacyjne

obiektów położonych blisko jednocześnie ekliptyki i Słońca, np. planet Merkury i Wenus oraz Księżyc po nowiu. Rano – przeciwnie, nachylenie ekliptyki powoduje, że planety wewnętrzne i Księżyc muszą oddalić się sporo od Słońca, aby mogły przebić się przez zorzę poranną. I nie pomaga tutaj fakt, że podczas swojej maksymalnej elongacji planeta Wenus może oddalić się od Słońca prawie na 47°. To niestety wciąż jest za mało.



Tegoroczny luty również nie rozpieszcza nas pod względem wydarzeń astronomicznych. Planety są jeszcze gorzej widoczne niż w styczniu. **Merkury** na początku lutego kończy okres dobrej widoczności wieczornej i 8 dnia miesiąca przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem. Następnie planeta przeniesie się na niebo poranne, by na początku marca osiągnąć maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą aż  $27^\circ$ . Jednak z wysokich północnych szerokości geograficznych pozostanie ona niewidoczna aż do końca kwietnia, gdy ponownie pojawi się na niebie wieczornym z wciąż dużym nachyleniem ekliptyki. Bardzo dobre warunki obserwacyjne Merkurego przez cały luty i marzec występują za to bliżej równika i na półkuli południowej. A więc nie dla nas. . .

A jest czego żałować, gdyż w lutym pierwsza planeta od Słońca wędruje przez gwiazdozbiór Koziorożca, w którym dość ciasną parę stanowią planety **Jowisz** i **Saturn**, z tym że – w przeciwieństwie do roku 2020 – Jowisz wyprzedził już Saturna i zamienił się z nim miejscami. Blisko dwóch gazowych olbrzymów jest w lutym także dążąca do marcowej koniunkcji górnej planeta **Wenus**, która u nas także ginie w zorzy porannej, ale można ją dostrzec z półkuli południowej. Wenus przejdzie 6 lutego zaledwie  $20'$  od Saturna, natomiast 5 dni później  $24'$  od Jowisza. Podczas tego ostatniego spotkania **Merkury** znajdzie się  $5^\circ$  na północ od obu planet. W następnych dniach Wenus powędruje w kierunku Słońca, natomiast Merkury dzień przed maksymalną elongacją minie Jowisza w odległości mniejszej niż  $20'$ . Planetarne koniunkcje uświetni **Księżyc**, który 10 lutego, dzień przed nowiem, minie Saturna w odległości  $5^\circ$ . Niestety wszystkie te zdarzenia są u nas niewidoczne.

Z pozostałych planet okrążająca Słońce najdalej i świecąca najslabiej planeta **Neptun** również dąży do marcowej koniunkcji ze Słońcem, tak samo jak planeta Wenus, tylko spotka się z nim dwa tygodnie wcześniej. Z tego względu można próbować odnaleźć ją wśród gwiazd tła jedynie na początku miesiąca. To jednak niełatwa sztuka, ponieważ trzeba poczekać aż się odpowiednio ściemni, a do tego czasu wysokość Neptuna nad horyzontem spadnie sporo poniżej  $10^\circ$ .

Dużo lepsze są warunki do obserwacji planet **Mars** i **Uran**. Siódma planeta Układu Słonecznego spotka się ze Słońcem ostatniego dnia kwietnia i na początku nocy astronomicznej nadal zajmuje pozycję na wysokości większej niż  $40^\circ$ . Uran przez cały czas kreśli swoją pętlę na niebie jakieś  $10^\circ$  na południe od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, świecąc z jasnością  $+5,8^m$ . Natomiast Czerwona Planeta znacznie miesiąc w środkowej części Barana, ponad  $6^\circ$  od Urana, by w trzeciej dekadzie lutego przejść do kolejnego gwiazdozbioru zodiakalnego, czyli Byka, i na początku marca minąć Plejady w odległości  $3^\circ$ . W lutym Mars pokona na niebie  $16^\circ$ , zmniejszając przy tym blask z  $+0,4^m$  do  $+0,9^m$  i średnicę tarczy z  $8''$  do  $6''$ .

Na początku marca w opozycji do Słońca znajdzie się najjaśniejsza na naszym niebie planetoida (4) **Westa**. Podczas tegorocznej opozycji jest ona o 0,3 jednostki astronomicznej (jakieś 45 mln km) dalej, niż miało to miejsce w roku 2018. Stąd nie osiągnie takiej jasności jak wtedy, lecz pojaśnieje tym razem do mniej więcej  $+5,9^m$ , a zatem dorówna blaskiem planecie Uran i da się ją łatwo

dostrzec przez lornetkę. W związku z opozycją planetoida porusza się ruchem wstecznym i w lutym przesunie się w ten sposób mniej więcej  $6^\circ$  na tle gwiazdozbioru Lwa. Westa znacznie miesiąc niecałe  $4^\circ$  na południowy zachód od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy głównej figury gwiazdozbioru Lwa, oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\beta$ . Denebola świeci z jasnością obserwowaną  $+2,1^m$ . W końcu miesiąca Westa zamelduje się prawie  $2^\circ$  na wschód od słabszej o  $1,2^m$  gwiazdy Chort, czyli  $\vartheta$  Leo. Podczas górowania Westa osiągnie wysokość mniej więcej  $50^\circ$  nad widnokretem, a więc będzie bardzo dobrze widoczna.

Jak już wspomniałem, 11 lutego **Księżyc** przejdzie przez now. Ale zanim to nastąpi, tydzień wcześniej czeka go ostatnia kwadra. A zatem w pierwszej części lutego można obserwować naturalnego satelitę Ziemi stopniowo zmniejszającego blask i pozostawiającego coraz większą część nocy dostępną obserwacjom słabych obiektów. Niskie już nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu, a także przejście Księżyca na południe od niej spowoduje, że jego dostrzeżenie stanie się bardzo trudne już dwa dni przed spotkaniem ze Słońcem. Wcześniej, 6 lutego, Księżyc w fazie cienkiego sierpa (33%) odwiedzi gwiazdozbiory Skorpiona i Wężownika, tworząc uroczy układ z Antaresem i gwiazdami z charakterystycznego łuku gwiazd w północno-zachodniej części Skorpiona. Dwa dni później, 8 lutego, z tarczą oświetloną w zaledwie 14% Księżyc zawita do gwiazdozbioru Strzelca, zbliżając się na około  $1^\circ$  do gwiazdy Kaus Borealis.

Jednak na samym początku miesiąca, w nocy z 31 stycznia na 1 lutego, Księżyc w fazie 89% minie w odległości  $8^\circ$  planetoidę (4) Westa. Niestety w tym momencie raczej nie przebiję się ona przez księżycową lunę, ale warto zapamiętać położenie Księżyca tej nocy (a tym samym położenie Westy) i wrócić do planetoidy po kilku dniach, gdy Księżyc oddali się od niej i zmniejszy blask.

Po nowiu Srebrny Glob rozgości się na niebie wieczornym, zaczynając każdy kolejny wieczór wyraźnie wyżej nad horyzontem i spędzając na nieboskłonach coraz więcej czasu. Już 17 lutego Księżyc w fazie 33% przejdzie  $3,5^\circ$  od Urana, zaś dobę później – w fazie zwiększonej do 40% – ponad  $4^\circ$  od Marsa. Przez trzy kolejne noce Księżyc zwidzi gwiazdozbiór Byka, gdzie 19 lutego wieczorem przejdzie przez I kwadrę, świecąc między Plejadami a Hiadami.

Wreszcie 23 lutego bardzo jasny już Srebrny Glob, w fazie 87%, przejdzie  $5^\circ$  od Polluksa, najjaśniejszej, choć oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\beta$ , gwiazdy Bliźniąt. Dobę później jeszcze jaśniejszy Księżyc zakryje gwiazdę Asellus Borealis, stanowiącą północno-wschodni róg trapezu otaczającego słynną gromadę otwartą gwiazd M44. Niestety faza ponad 90% sprawi, że oba obiekty zginą w powodowanej przezeń lunie.

Ostatnim akcentem miesiąca jest przejście Srebrnego Globu w pełni blisko Regulusa – 27 lutego oraz dobę później ponownie  $8^\circ$  od Westy. Oczywiście wtedy Westy nie da się obserwować – na jej śledzenie należy przeznaczyć środek miesiąca.

*Ariel MAJCHER*

## Siostra

Matka mówiła jej: „Mózgi kobiet nie są stworzone do uprawiania nauki”.

Jej brat obudził ją kiedyś w środku nocy i zawiózł na pole golfowe za miastem, gdzie po raz pierwszy zobaczyła zorzę polarną.

Pomagała w domowym laboratorium elektronicznym brata. Za każdym razem, kiedy uczyła się czegoś nowego, jej matka podziwiała jego zdolności przekazywania wiedzy.

Z okazji czternastych urodzin brat подарował jej uniwersytecki podręcznik astronomii. Po miesiącach zmagania z tą lekturą na stronie 407 zobaczyła wykres, który zdecydował o jej dalszym życiu. Przedstawiał on względne natężenia linii magnezu i pochodził z książki *Stellar Atmospheres* autorstwa Cecیلی Payne.

Jej matka choć za młodu była sufrażystką, to w obliczu choroby męża nie wiedziała, jak włączyć się w utrzymywanie rodziny.

Podupadający na zdrowiu ojciec poradził jej, by znalazła sobie jakiś zawód. Stwierdziła, że wszystkie dobre zawody są domeną mężczyzn, musi więc wybrać jakąś męską profesję. Wybrała fizykę.

Na studiach licencjackich w koledżu Oberlin pewnego razu wykonywała ćwiczenie z pracowni fizycznej w tandemie z kolegą. Ten przepisał od niej notatki i raport. Dostał ocenę bardzo dobrą, a ona ledwie dopuszczającą.

Na studiach doktoranckich w Syracuse University jeden z profesorów poradził jej, by zrobiła doktorat z pajęczyn, bo będzie je często napotykać, sprzątając dom. Wybrała jednak badanie optycznych własności kryształów.

Po uzyskaniu stopnia doktora fizyki przez kilka lat nie mogła znaleźć pracy, co spowodowało rozwój depresji. Dział ogłoszeń „Poszukuję pracy” w *New York Times* dzielił się na osobne sekcje dla mężczyzn i dla kobiet. W sekcji dla kobiet nikt nie szukał potencjalnych naukowców do zatrudnienia.

Za radą terapeuty napisała do Uniwersytetu Columbia, wyrażając chęć zatrudnienia się w tej uczelni. Wtedy otrzymała ofertę. Wybrała pracę w niepełnym wymiarze godzin, oznajmiwszy dzieciom: „Mogę być matką na pół etatu albo pełnoetatową wariatką”.

Powiedziała bratu: „Musimy podzielić fizykę między siebie. Ja biorę zorze polarne, dla ciebie jest reszta Wszechświata.” Brat przyjął ofertę.

Miejsce pracy zmieniała wielokrotnie, podążając za zatrudnieniem mężów-naukowców. Stały etat w Caltechu znalazła w wieku 58 lat. Wcześniej z racji płci odmówiono jej uczestnictwa w spotkaniach networkingowych dla szukających pracy naukowców, organizowanych przez jej synagogę.

Wykazała, że zorze polarne pojawiają się, gdy cząstki wiatru słonecznego wpadają do ziemskiej magnetosfery, która rozciąga się znacznie dalej, niż wcześniej uważano. Cząstki te, wędrując po zakrzywionych w wyniku oddziaływania z polem magnetycznym torach, zderzają się z cząsteczkami powietrza. Atomy tworzące te cząsteczki są wówczas wzbudzone i emitują promieniowanie o rozmaitych częstotliwościach – czyli świecą w przeróżnych kolorach, co daje efekt od zawsze cieszący ludzkie oko.

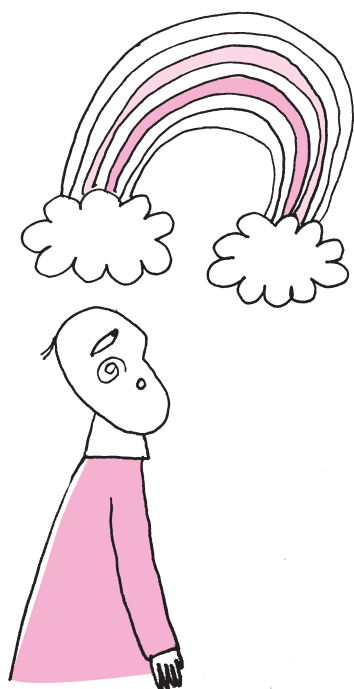
Przeszła na emeryturę w wieku 72 lat. Rok później otrzymała medal NASA za wybitne osiągnięcia naukowe.

Pod koniec życia zajmowała się fizyką procesów klimatycznych, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu Słońca na ziemski klimat.

Ostatnią publikację wydała w wieku 90 lat.

Joan Feynman zmarła latem 2020 roku.

Krzysztof TURZYŃSKI





# Geometria analityczna

Bartłomiej BZDEGA

Geometria analityczna jest narzędziem, dzięki któremu problem geometryczny możemy sprowadzić do algebraicznego. W tym celu konfigurację geometryczną z zadania umieszczamy w układzie współrzędnych, a zależności geometryczne między jej poszczególnymi elementami zapisujemy za pomocą odpowiednich równań.

W całym artykule będziemy stosować konwencję: punkt  $A$  ma współrzędne  $(x_A, y_A)$ , punkt  $B$  –  $(x_B, y_B)$  i tak dalej.

Rozwiązania analityczne zazwyczaj są znacznie dłuższe od tak zwanych syntetycznych – wynika to z ich rachunkowego charakteru, bo wpadnięcie na błyskotliwy pomysł zastępujemy tu ciężką pracą. Są jednak w treściach niektórych zadań pewne poszlaki, dzięki którym można przewidzieć, że ich rozwiązania analityczne będą sensownej długości. Niektóre geometryczne zależności wyraża się bowiem za pomocą współrzędnych względnie łatwo. Wymienimy kilka:

- Środek odcinka  $AB$  ma współrzędne  $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ , a środek ciężkości trójkąta  $ABC$ :  $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$ .
- $|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$  – zadania o kwadratach długości odcinków będą się zdecydowanie lepiej rozwiązywać analitycznie niż zadania o samych długościach.
- Proste o równaniach  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  i  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są odpowiednio prostopadłe do (niezerowych!) wektorów  $[A_1, B_1]$  i  $[A_2, B_2]$ . Wektory te (a więc i proste) są prostopadłe, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ , a równoległe, gdy  $A_1B_2 = A_2B_1$ .

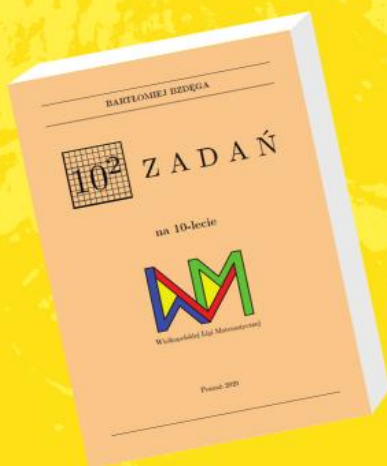
Bardzo ważną rzeczą jest wybór odpowiedniego układu współrzędnych. Zdrowy rozsądek nakazuje, by jak najwięcej punktów występujących w zadaniu umieścić na osiach układu, gdyż z powodu ich zerowych współrzędnych znacznie uprościć się rachunki. Są jednak od tej reguły wyjątki (zadania 1 i 5), ponieważ postępując w ten sposób, zaburzamy algebraiczną symetrię, a tym samym możemy stracić na pogłębieniu.

## Zadania

1. Dany jest trójkąt  $ABC$  oraz takie punkty  $D, E, F$ , że punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $BD$ , punkt  $A$  jest środkiem odcinka  $CE$  oraz punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AF$ . Udowodnić, że środki ciężkości trójkątów  $ABC$  i  $DEF$  pokrywają się.
2. Prosta  $\ell$  przechodzi przez środek ciężkości trójkąta  $ABC$  oraz przecina odcinki  $AC$  i  $BC$ . Wykazać, że odległość punktu  $C$  od prostej  $\ell$  jest równa sumie odległości punktów  $A$  i  $B$  od prostej  $\ell$ .
3. Dany jest prostokąt  $ABCD$  oraz punkt  $X$ . Wykazać, że  $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$ .
4. Wykazać, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.
5. Dla dowolnego trójkąta  $ABC$  wyznaczyć taki punkt  $P$ , żeby wartość wyrażenia  $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2$  była najmniejsza z możliwych.
6. Trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny. Dowieść, że zbiór takich punktów  $X$ , które spełniają równość  $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$ , jest okręgiem.
7. Wykazać, że dla każdego trójkąta  $ABC$  istnieje punkt  $P$ , spełniający równości  $|AB|^2 - |CP|^2 = |BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$ .
8. Dane są kwadraty  $ABCD$  i  $APQR$  (wierzchołki podano w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara). Punkt  $K$  jest środkiem odcinka  $DP$ . Udowodnić, że  $AK \perp BR$ .
9. Na bokach  $AB$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$ , na zewnątrz niego, zbudowano kwadraty  $ABDE$  i  $ACFG$ . Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami odcinków  $DG$  i  $EF$ . Udowodnić, że  $MN \parallel BC$ .
10. Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , w którym  $|AB| < |AC|$ . Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $BC$ . Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach  $ABC$  i  $ADM$  jest równoległa do prostej  $AD$ .

Wskazówki do zadań

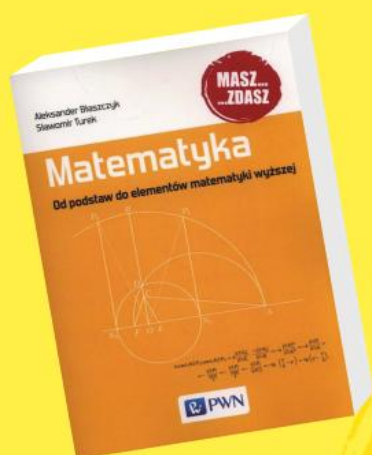
1. Wyznaczyć współrzędne punktów  $D, E, F$  za pomocą współrzędnych punktów  $A, B, C$ .
2. Przyjąć, że środek ciężkości trójkąta  $ABC$  to punkt  $(0, 0)$ , a prosta  $\ell$  ma równanie  $x = 0$  – wtedy odległość punktu  $P$  od prostej  $\ell$  to po prostu  $|y_P|$ .
3. Jako wierzchołki prostokąta wygodnie jest przyjąć  $(\pm a, \pm b)$ .
4. Jako środek równoległoboku dobrze sprawdzi się punkt  $(0, 0)$ , do tego jedna z przekątnych może leżeć na osi  $OX$ .
5. Niech  $P = (x, y)$ . Wyrażenie  $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2$  zapisz jako sumę dwóch funkcji kwadratowych  $f(x)$  i  $g(y)$ .
6. Przyjąć  $A = (-a, 0), B = (b, 0), C = (0, c)$ . Dla  $X = (x, y)$  równość z zadania można sprowadzić do równania okręgu  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  w którym  $x_0, y_0$  i  $r^2$  wyraża się za pomocą  $a, b$  i  $c$ . Trzeba jeszcze wykazać, że jest w tym równaniu dodatnie.
7. Niech  $A = (a, 0), B = (b, 0), C = (0, c)$ . Z równości  $|BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$  wyznaczyc  $x$ , następnie z dowolnej wyznaczonej pozostających dwóch napisać równanie z niewiadomą  $y$  i uzasadnić, że rozwiązanie jest w tym równaniu dodatnie.
8. Wierzchołkami jednego z kwadratów mogą być punkty  $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$ , a drugiego  $(0, 0), (c, 0), (c, b), (0, b)$ .
9. Przyjąć  $A = (0, 0), B = (b, 0), C = (0, c)$ . Wyznaczyć  $x$  i  $y$  dla punktu  $M$  i  $N$  mając taką samą rzędność punkty  $D, E, F$ .
10. Niech  $A = (0, 0), B = (b, 0), C = (0, c)$ . Wyznaczyć  $x$  i  $y$  dla punktu  $M$  i  $N$  mając taką samą rzędność punkty  $D, E, F$ .



Autor i wydawca: **Bartłomiej Bzdęga**  
**„10<sup>2</sup> zadań”**

Poznań 2020, 64 str.

Książeczka powstała na 10-lecie Wielkopolskiej Ligi Matematycznej organizowanej przez poznański oddział PTM. Autor, Bartłomiej Bzdęga, przewodniczy jury Ligi, dostarcza też wiele zadań. Książka przeznaczona jest dla licealistów zainteresowanych matematyką, zwłaszcza tych, którzy myślą o konkursach, np. o Olimpiadzie Matematycznej. Zawiera 100 zadań z różnych działów matematyki, większość wymyślił BB. Składa się na nią pięć rozdziałów: liczby naturalne, analiza i algebra, geometria, kombinatoryka oraz zadania z „kosmosu”. W każdym z nich trudność zadań rośnie. To subiektywny pogląd Autora książki, w dużym stopniu podzielany przez recenzenta. Wszystkie zadania są rozwiązane. Rozwiązania są zręczne, krótkie i stanowią 5/8 tekstu. Czytelnik powinien postarać się rozwiązać każde zadanie samodzielnie, a potem przeczytać rozwiązanie autorskie. Można czasem zostać zaskoczonym tym, co zrobił Autor, a czasem zobaczyć własne rozwiązanie, tylko nieco inaczej zapisane. Niektóre zadania są trudne, więc może się zdarzyć, że po kilku godzinach, niekoniecznie jednego dnia, przyjdzie nam przeczytać przynajmniej początek autorskiego rozwiązania i samemu zakończyć zadanie. Bardzo zachęcam do lektury.



**Aleksander Błaszczak, Sławomir Turek**  
**„Matematyka. Od podstaw do elementów matematyki wyższej”**

PWN, Warszawa 2015, 515 str.

Tytuł książki wyjaśnia cel jej napisania. Książka zawiera wiele twierdzeń z dowodami (z wyjątkiem kilku) i tym różni się od większości dzisiejszych tekstów popularnonaukowych. Można z niej

- dowiedzieć się, jak dowieść niewymierności i przestępności  $\pi$  oraz  $e$ ,
- poznać dowód twierdzenia charakteryzującego wielokąty foremne konstruowalne,
- poznać rozwinięcie sinusa w iloczyn nieskończony

i wiele innych interesujących twierdzeń. Książkę można polecać uczniom, studentom i tym nauczycielom, którzy chcą przypomnieć sobie różne twierdzenia ze studiów, np. by mówiąc uczniom „ $\pi$  jest liczbą niewymierną, ale dowód tego jest...” powstrzymać się przed użyciem słowa „trudny” i powiedzieć raczej, że „wymaga użycia twierdzeń, których w szkole nie omawia się z braku czasu”. To różnica nieistotna z punktu widzenia osób oczekujących na koniec lekcji, ale może być ważna dla tych, którzy chcą włączyć się w matematykę. W tak krótkiej notce nie ma miejsca nawet na listę rozdziałów z tytułami. Szersza informacja o książce pojawi się w numerze 56(2) „Wiadomości Matematycznych”.

Michał KRYCH