Geometria analityczna

Bartłomiej BZDĘGA

Geometria analityczna jest narzędziem, dzięki któremu problem geometryczny możemy sprowadzić do algebraicznego. W tym celu konfigurację geometryczną z zadania umieszczamy w układzie współrzędnych, a zależności geometryczne między jej poszczególnymi elementami zapisujemy za pomocą odpowiednich równań.

W całym artykule będziemy stosować konwencję: punkt A ma współrzędne (x_A, y_A), punkt B – (x_B, y_B) i tak dalej.

Rozwiązania analityczne zazwyczaj są znacznie dłuższe od tak zwanych syntetycznych – wynika to z ich rachunkowego charakteru, bo wpadnięcie na błyskotliwy pomysł zastępujemy tu ciężką pracą. Są jednak w treściach niektórych zadań pewne poszlaki, dzięki którym można przewidzieć, że ich rozwiązania analityczne będą sensownej długości. Niektóre geometryczne zależności wyraża się bowiem za pomocą współrzędnych względnie łatwo. Wymienimy kilka:

- Środek odcinka AB ma współrzędne $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, a środek ciężkości trójkąta ABC: $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.
- $|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ – zadania o kwadratach długości odcinków będą się zdecydowanie lepiej rozwiązywać analitycznie niż zadania o samych długościach.
- Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są odpowiednio prostopadłe do (niezerowych!) wektorów $[A_1, B_1]$ i $[A_2, B_2]$. Wektory te (a więc i proste) są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, a równoległe, gdy $A_1B_2 = A_2B_1$.

Bardzo ważną rzeczą jest wybór odpowiedniego układu współrzędnych. Zdrowy rozsądek nakazuje, by jak najwięcej punktów występujących w zadaniu umieścić na osiach układu, gdyż z powodu ich zerowych współrzędnych znacznie uproszczą się rachunki. Są jednak od tej reguły wyjątki (zadania 1 i 5), ponieważ postępując w ten sposób, zaburzamy algebraiczną symetrię, a tym samym możemy stracić na poglądowości.

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC oraz takie punkty D, E, F, że punkt C jest środkiem odcinka BD, punkt A jest środkiem odcinka CE oraz punkt B jest środkiem odcinka AF. Udowodnić, że środki ciężkości trójkątów ABC i DEF pokrywają się.
2. Prosta ℓ przechodzi przez środek ciężkości trójkąta ABC oraz przecina odcinki AC i BC. Wykazać, że odległość punktu C od prostej ℓ jest równa sumie odległości punktów A i B od prostej ℓ.
3. Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz punkt X. Wykazać, że $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$.
4. Wykazać, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.
5. Dla dowolnego trójkąta ABC wyznaczyć taki punkt P, żeby wartość wyrażenia $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2$ była najmniejsza z możliwych.
6. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Dowieść, że zbiór takich punktów X, które spełniają równość $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$, jest okręgiem.
7. Wykazać, że dla każdego trójkąta ABC istnieje punkt P, spełniający równości $|AB|^2 - |CP|^2 = |BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$.
8. Dane są kwadraty $ABCD$ i $APQR$ (wierzchołki podano w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara). Punkt K jest środkiem odcinka DP. Udowodnić, że $AK \perp BR$.
9. Na bokach AB i AC trójkąta ABC, na zewnątrz niego, zbudowano kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Udowodnić, że $MN \parallel BC$.
10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

Wskazówki do zadań

1. Wyznaczyć współrzędne punktów D, E i F za pomocą współrzędnych punktów A, B i C.
2. Przyjąć, że środek ciężkości trójkąta ABC to punkt $(0, 0)$, a prosta ℓ ma równanie $x = 0$ – wtedy odległość punktu P od prostej ℓ to po prostu $|y_P|$.
3. Jako wierzchołki prostokąta wygodnie jest przyjąć $(\pm a, \pm b)$.
4. Jako środek równoległoboku dobrze sprawdzi się punkt $(0, 0)$, do tego jedna z przekątnych może leżeć na osi OX.
5. Niech $P = (x, y)$. Wyrażenie $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2$ zapisać jako sumę dwóch funkcji kwadratowych $f(x)$ i $g(y)$.
6. Przyjąć $A = (-a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$. Dla $X = (x, y)$ równość z zadania można sprowadzić do równania okręgu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, w którym x_0, y_0 i r^2 wyraża się za pomocą a, b i c. Trzeba jeszcze wykazać, że r^2 jest w tym równaniu dodatnie.
7. Niech $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$. Z równości $|BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$ wyznaczyć x_P, następnie z dowolnej spośród pozostałych dwóch napisać równanie z niewiadomą y_P i uzasadnić, że ma ono rozwiązanie.
8. Wierzchołkami jednego z kwadratów mogą być punkty $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) i $(0, a)$, a drugiego $(0, 0)$, (b, c), $(b - c, b + c)$ i $(-c, b)$.
9. Przyjąć $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$ i $C = (c, 0)$. Wystarczy wykazać, że punkty M i N mają taką samą rzędną.
10. Niech $A = (0, 0)$ i $D = (d, 0)$ – wtedy można przyjąć $B = (b, -\lambda b)$ i $C = (c, \lambda c)$ i wyznaczyć d w zależności od b, c i λ. Wystarczy dowieść równości rzędnych środków okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM.