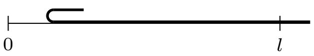
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021

Zadania z fizyki nr 712, 713

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

712. Długi, cienki i wiotki dywan o długości l i masie m leży na podłodze. Jeden z końców dywanu jest odgięty i ciągnięty do tyłu ze stałą prędkością v po części dywanu, która nadal leży na podłodze (rys. 1). Jaka siła działa na dywan w kierunku poziomym? Tarcia między częściami dywanu nie uwzględniamy, dolna część dywanu pozostaje nieruchoma.



Rys. 1

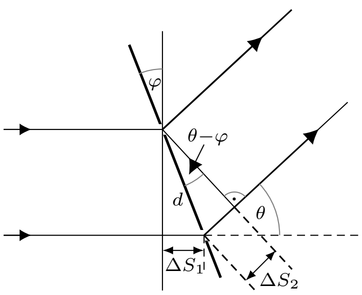
713. Ze szczytu góry na szerokości geograficznej północnej $\varphi_0 = 30^o$ wystrzelono pocisk wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna Ziemi i wprowadzono go na orbitę kołową wokół Ziemi. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Dane są: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi T, promień Ziemi R, przyspieszenie grawitacyjne g. Zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbujemy opory powietrza.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

704. Wąska monochromatyczna wiązka światła laserowego pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione są pionowo. Jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt $\varphi < \pi/2$ wokół osi równoległej do szczelin siatki?

705. W jednorodnej kuli o promieniu $2R$ i gęstości ρ znajduje się współśrodkowa kulista wnęka o promieniu R. Znaleźć energię potencjalną punktu materialnego o masie m znajdującego się w wydrążeniu, w odległości $R/2$ od środka wydrążonej kuli. Oddziaływania zewnętrzne zaniedbujemy.



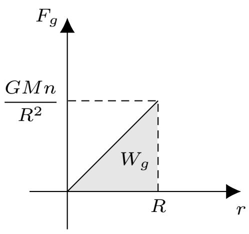
Rys. 2

704. Gdy światło o długości fali λ pada prostopadle na siatkę o stałej d, położenie maksimów interferencyjnych wyznacza kąt θ dany wzorem $d\sin\theta = k\lambda$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Po obrocie siatki o kąt φ równanie to musimy zmodyfikować, przy czym wystarczy rozważyć interferencję na dwóch szczelinach odległych o d (rys. 2). Różnica dróg optycznych promieni ugiętych pod kątem θ wynosi teraz $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = d\sin\varphi + d\sin(\theta - \varphi)$, a warunek na maksima interferencyjne $d(\sin\varphi + \sin(\theta-\varphi)) = k\lambda$. Widać, że po obróceniu siatki położenie zerowego maksimum nie ulegnie zmianie, ale obraz interferencyjny przestanie być symetryczny. Przyjmijmy, że kąt φ jest dodatni, gdy obracamy siatkę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (podobnie dodatni kąt θ odpowiada promieniowi ugiętemu w tym samym kierunku). Wtedy maksymalny kąt ugięcia $\theta_{\max} = \pi/2 + \varphi$, odpowiadająca mu różnica dróg optycznych $\Delta s = d(1+\sin\varphi)$. Maksymalna liczba maksimów na ekranie dla dodatnich θ jest równa

$$k_+ = \lfloor d(1+\sin\varphi)/\lambda \rfloor.$$

Analogicznie $\theta_{\min} = -\pi/2 + \varphi$, maksymalna liczba maksimów dla ujemnych kątów ugięcia

$$k_- = \lfloor d(1-\sin\varphi)/\lambda \rfloor < k_+.$$



Rys. 3

705. Zgodnie z prawem Gaussa na ciało umieszczone wewnątrz wydrążenia siła grawitacji nie działa. Przesunięcie ciała między dowolnymi punktami wewnątrz wydrążenia nie wymaga więc żadnej pracy i energia potencjalna wewnątrz wydrążenia jest wszędzie taka sama. Najwygodniej jest obliczyć ją dla środka wydrążenia. W tym celu skorzystamy z zasady superpozycji i od energii w środku pełnej kuli o promieniu $2R$ oraz gęstości ρ odejmiemy energię w środku kuli o rozmiarach wydrążenia i takiej samej gęstości.

Energię potencjalną $E_p(O)$ w środku O jednorodnej kuli o gęstości ρ i promieniu R znajdziemy ze wzoru $E_p(A) - E_p(O) = W_q(A \to O)$, gdzie A jest jest punktem na powierzchni kuli, a $W_q(A \to O)$ pracą siły grawitacji przy przenoszeniu ciała o masie m do środka kuli o masie $M = 4\pi R^3\rho/3$. Ponieważ siła grawitacji wewnątrz jednorodnej kuli zmienia się liniowo (rys. 3),

$$W_q(A \to O) = GMm/(2R) = 2\pi Gm\rho R^2/3.$$

Uwzględniając, że $E_p(A) = -GMm/R$, otrzymujemy

$$E_p(O) = -2\pi R^2 \rho Gm.$$

Szukana energia potencjalna w wydrążonej kuli wynosi

$$E_{px}(O) = -2\pi\rho Gm((2R)^2 - R^2) = -6\pi R^2 \rho Gm.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2019/20
(po 701 zadaniach)

Michał Koźlik (Gliwice)	4 – 42,82
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Krzysztof Magiera (Łosiów)	3 – 39,55
Jan Zambrzycki (Białystok)	2 – 31,61
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Jacek Konieczny (Poznań)	31,13
Tomasz Wietecha (Tarnów)	14 – 29,47
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Sławomir Buć (Mystków)	25,94
Mateusz Kapusta (Wrocław)	25,37
Konrad Kapcia (Częstochowa)	1 – 19,60
Piotr Adamczyk (Warszawa)	17,94
Paweł Perkowski (Ożarów)	3 – 17,14

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2017–2019 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 17 punktów. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2019/20

Współczynnik trudności zadań w ubiegłym roku szkolnym rozłożył się dosyć równomiernie, dla pięciu zadań był niższy niż 2, dla sześciu przekroczył wartość 3.

Wśród tych trudniejszych warte dokładniejszego omówienia wydaje się zadanie **696** ($WT = 3{,}59$). Lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich o takich samych energiach wylatywała z pewnego punktu naładowanego kondensatora cylindrycznego. Kąt rozwarcia wiązki wynosił α. Zewnętrzna okładka kondensatora naładowana była dodatnio. Prędkości jonów leżały w płaszczyźnie prostopadłej do osi kondensatora. Jony ze środka wiązki poruszały się po okręgu o promieniu r_0 współśrodkowym z okładkami kondensatora. Należało wykazać, że wiązka jonów zogniskuje się ponownie w pewnym punkcie, znaleźć kąt, jaki zatoczy do tego momentu, oraz maksymalną szerokość wiązki. W rozwiązaniu „firmowym" zostało wykazane, że jony poruszają się w kierunku radialnym ruchem harmonicznym z jednakowym okresem, maksymalna szerokość wiązki była równa podwojonej amplitudzie drgań. Wśród nadesłanych rozwiązań nie było całkowicie poprawnych, a autorzy najbardziej zaawansowanych korzystali z zasady zachowania energii. Przedstawię więc szkic rozwiązania energetycznego.

Zasada zachowania energii ma postać

$$mv_0^2/2 = mv_{\min}^2/2 + bqln\left(1 + x_{\max}/r_0\right),$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową najbardziej odchylonego jonu, tworzącą kąt $\alpha/2$ ze styczną do okręgu o promieniu r_0, a $v_{\min}$ to jego prędkość w punkcie najbardziej oddalonym od środka okręgu. Siła działająca na jon o ładunku q jest równa $F = bq/r$, $bq = mr_0^2\omega_0^2$, ω_0 jest prędkością kątową jonu poruszającego się po okręgu o promieniu r_0.

Siła elektryczna jest centralna, więc spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$v_{\min}\left(r_0 + x_{\max}\right) = \omega_0 r_0^2 \cos(\alpha/2).$$

Podstawiając otrzymane stąd $v_{\min}$ do zasady zachowania energii, otrzymujemy

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) = \frac{r_0^2\cos^2(\alpha/2)}{\left(r_0 + x_{\max}\right)^2} + 2ln\left(1 + x_{\max}/r_0\right).$$

Dla $x_{\max} \ll r_0$ możemy ograniczyć się do pierwszych wyrazów rozwinięcia logarytmu w szereg Taylora: $ln\left(1 + x_{\max}/r_0\right) = x_{\max}/r_0 - x_{\max}^2/2r_0^2$. Stąd

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)\,\frac{2r_0x_{\max} + x_{\max}^2}{\left(r_0 + x_{\max}\right)^2} = \frac{\left(2r_0x_{\max} - x_{\max}^2\right)}{r_0^2}.$$

Aby otrzymać wyrażenie z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu, przybliżamy $\sin^2(\alpha/2) = \alpha^2/4$, $\cos^2(\alpha/2) = 1$ i otrzymujemy

$$\alpha^2/4 = 2x_{\max}^2/r_0^2.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $m\omega_0^2$ widzimy, że jest to równanie na energię oscylatora harmonicznego w kierunku radialnym:

$$\frac{mv_0^2\sin^2(\alpha/2)}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2},$$

gdzie $k = 2qb/r_0^2$. Maksymalna szerokość wiązki jonów jest równa $d = 2x_{\max} = r_0\alpha/\sqrt{2}$.

Najwyższej możliwej oceny nie uzyskało też żadne z rozwiązań zadania **683** ($WT = 3{,}5$). Jego celem było pokazanie, że względne zaburzenie wyniku pomiaru napięcia na elemencie to stosunek oporu woltomierza do oporu wewnętrznego źródła nawet wtedy, gdy opór badanego elementu jest porównywalny, a nawet większy od oporu woltomierza. Nadesłane rozwiązania nie zawierały analizy zaburzenia względnego, a jedynie obliczenia bezwzględnego zaburzenia pomiaru.

Najwyższy współczynnik trudności miało zadanie **688** ($WT = 3{,}77$). Klocek leżał na nieruchomej, szorstkiej taśmie transportera i przymocowany był do ściany za pomocą sprężyny. Po uruchomieniu taśmy ustalały się po pewnym czasie drgania harmoniczne. Należało znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Jedyne w pełni poprawne rozwiązanie z uwzględnieniem możliwych przypadków przysłał **Tomasz Wietecha**. Pan Tomasz był też autorem jedynego całkowicie poprawnego rozwiązania zadania **686** ($WT = 3{,}23$) na temat niecentralnego zderzenia nieważkiego pręta z kulkami na końcach z nieruchomym kołkiem.

W zadaniu **698** ($WT = 3{,}19$) z elektrostatyki należało znaleźć siłę oddziaływania między dwiema leżącymi naprzeciw siebie, równomiernie naładowanymi półsferami o wspólnym środku i wspólnej płaszczyźnie największego przekroju, ale różnych promieniach. Bezbłędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk.** Wyróżnił się też **Konrad Kapcia**, który przedstawił prawidłową metodę postępowania, korzystając z zasady superpozycji. Rozwiązanie zawierało drobny błąd wynikający z nieuwagi, którego skutkiem był dwukrotnie za mały wynik. Inne rozwiązania zawierały próby całkowania wkładów od elementów sfer, niestety zakończone niepowodzeniem.

Jedyne ocenione maksymalnie rozwiązanie zadania **694** ($WT = 3{,}19$) dotyczącego ruchu statku napędzanego „miotaczem wody" przesłał **Paweł Perkowski**.

Dwanaście z tegorocznych rozwiązań **Tomasza Wietechy** uzyskało maksymalną ocenę, trzy z nich były jedynymi poprawnymi z nadesłanych. Drugie miejsce w tej konkurencji zajął **Paweł Perkowski**, który przedstawił dziesięć rozwiązań bez usterek. **Jan Zambrzycki** zdobył siedem ocen maksymalnych, a **Piotr Adamczyk** sześć.

Paweł Perkowski po raz trzeci przekroczył w tym roku barierę 44 punktów.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.