Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021

Zadania z matematyki nr 815, 816

Redaguje Marcin E. KUCZMA

815. Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(x+y^3) + g(x^3+y) = h(xy) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

816. Liczba naturalna n ma taki dzielnik dodatni d, że $d^2 - 2$ dzieli się przez $n - 1$. Wykazać, że n jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 816 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

807. Dane są liczby $A, B > 0$; $AB < 1$. Funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A \cdot |x-y|, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant B \cdot |x-y|,$$

przy czym f jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$; ma więc funkcję odwrotną $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\ (f(h(x)) = h(f(x)) = x)$. Udowodnić, że funkcja $g + h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.

808. Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$.

807. Z podanych warunków (*Lipschitza*) wynika ciągłość funkcji f, g. Funkcja f jest ciągłą bijekcją zbioru $\mathbb{R}$; wiadomo, że funkcja odwrotna $h = f^{-1}$ wtedy też jest ciągła. Przy tym spełnia warunek: $|h(x) - h(y)| \geqslant \frac{1}{A}|x-y|$.

Mamy wykazać, że funkcja $g + h$ jest bijekcją zbioru $\mathbb{R}$. Różnowartościowość: załóżmy, że $g(x) + h(x) = g(y) + h(y)$; wówczas

$$|x-y| \geqslant \frac{1}{B}\,|g(x) - g(y)| = \frac{1}{B}\,|h(y) - h(x)| \geqslant \frac{1}{AB}\,|x-y|,$$

a to (wobec założenia $AB < 1$) wymusza równość $x = y$.

Różnowartościowa funkcja ciągła $g + h$ musi być ściśle monotoniczna. Pozostaje uzasadnić, że odwzorowuje ona zbiór $\mathbb{R}$ na *cały* zbiór $\mathbb{R}$. To zaś wynika na przykład z szacowania

$$\begin{aligned}|g(x) + h(x)| &\geqslant |h(x) - h(0)| - |g(x) - g(0)| - |g(0) + h(0)| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{A} \cdot |x - 0| - B \cdot |x - 0| - |g(0) + h(0)| = C \cdot |x| + D,\end{aligned}$$

ze stałymi $C = \frac{1}{A} - B > 0$, $D = -|g(0) + h(0)|$. Pokazuje ono, że $\lim_{|x| \to \infty} |g(x) + h(x)| = \infty$. W połączeniu z ciągłością i ścisłą monotonicznością funkcji $g + h$, uzasadnia to jej bijektywność ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

808. Gdy liczby wymierne $x, y > 1$ spełniają podane równanie $x^{y-1} = y$, wówczas zapisując x oraz $y - 1$ w postaci ułamków nieskracalnych $y - 1 = \frac{a}{b}$, $x = \frac{c}{d}$ dostajemy równanie

$$c^a b^b = (a+b)^b d^a.$$

Ponieważ $\operatorname{nwd}(c, d) = 1$ oraz $\operatorname{nwd}(b, a+b) = 1$, implikuje to układ równań

$$(1) \qquad (a+b)^b = c^a \quad \text{oraz} \quad b^b = d^a.$$

Stąd – ponownie z uwagi na warunek $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$ (tym razem stosowany do wykładników w równaniach (1)) – wynika, że

$$(2) \qquad a + b = m^a, \ \ c = m^b \quad \text{oraz} \quad b = n^a, \ \ d = n^b$$

dla pewnych liczb naturalnych m, n. Teraz szacowanie $a = m^a - b = m^a - n^a \geqslant$ $\geqslant (n+1)^a - n^a \geqslant 2^a - 1$ pokazuje, że $a = 1$. Ze związków (2) dostajemy: $b = n$, $m = n + 1$, $c = (n+1)^n$, $d = n^n$, więc ostatecznie

$$x = \frac{c}{d} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n, \qquad y = \frac{a+b}{b} = \frac{n+1}{n}.$$

Na odwrót, łatwo sprawdzić, że każda para (x, y) postaci $\big(\big(\frac{n+1}{n}\big)^n, \frac{n+1}{n}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, spełnia wyjściowe równanie.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2019/20

Janusz Olszewski	20 – 43,43
Marek Spychała	2 – 42,98
Tomasz Wietecha	12 – 42,77
Jakub Węgrecki	41,76
Marcin Małogrosz	3 – 41,65
Paweł Burdzy	41,58
Michał Koźlik	35,73
Marcin Kasperski	4 – 32,68
Jerzy Cisło	14 – 30,04
Kacper Morawski	28,79
Bartłomiej Pawlik	27,51
Stanisław Bednarek	2 – 26,17
Piotr Sołtan	25,51
Janusz Wojtal	25,24
Szymon Kitowski	23,49
Piotr Kumor	14 – 23,38
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Witold Bednarek	8 – 21,90
Radosław Kujawa	21,78
Jędrzej Biedrzycki	21,60
Mikołaj Pater	1 – 21,49
Marian Łupieżowiec	1 – 21,26
Błażej Żmija	1 – 18,04
Paweł Najman	8 – 17,51
Grzegorz Wiączkowski	17,41
Michał Adamaszek	5 – 17,33
Łukasz Merta	1 – 17,31
Marek Prauza	4 – 16,62
Norbert Porwol	15,90
Semen Słobodianiuk	15,83
Adam Woryna	3 – 15,10

Legenda (przykładowo): stan konta 8 – 21,90 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 21,90 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2018, 2019 lub 2020.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (14), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (20), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (5), P. Kubit (7), J. Cisło (14), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz, K. Kamiński, J. Fiett (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, Ł. Merta, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, M. Pater, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, B. Żmija, P. Żmijewski.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2019/20

Pora na coroczne omówienie sezonu ligowego. Aż dziw, żadne z zadań nie okazało się rzetelnie trudne: współczynnik trudności (WT) ani razu nie przekroczył trójki; liczba prawidłowych rozwiązań (LPR) tylko w dwóch zadaniach poniżej 10. Również bardzo niewiele odnotowujemy rozwiązań uderzających oryginalnością. Czyli nic ciekawego? Zupełnie błędne wrażenie: mnóstwo ciekawych komentarzy do zadań. Tu wiodącym autorytetem jest **Piotr Kumor**; do każdego zadania teorioliczbowego był w stanie stworzyć sążnisty elaborat, omawiający samo zagadnienie (*„jest dobrze znane"*) wraz z obszerną otoczką – teorią wokół zadania, historią, bibliografią. Także inni uczestnicy ligi sypali interesującymi uwagami.

W minionych latach staraliśmy się włączać podobne komentarze, w formie ekstraktu redakcyjnego, do drukowanego tekstu omówienia. Tym razem ich rozmiar nie dał temu szans. Za to szansą okazał się równoległy numer *Delty* w wersji elektronicznej; tam pojemność (nieograniczona) pozwoliła zamieścić wybrane prace, wraz z nadbudową erudycyjną, w całości lub z nieznacznymi skrótami. Czytelników zapraszamy do ich lektury; można się naprawdę wiele ciekawego dowiedzieć.

* * *

Zadanie **786.** [Istnieje nieskończenie wiele czwórek $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$: $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$, $bd-1$, $cd-1$ to kwadraty] (WT=1,22; LPR=19). Niefortunnie sformułowane było to zadanie; lepiej byłoby pytać o nieskończony ciąg *rozłącznych* takich czwórek – bo w obecnej wersji wystarczyło ustalić jedną lub dwie zmienne (np. $b=1$, $c=2$) i tylko żonglować pozostałymi trzema lub dwiema. Wszelako i ta ambitniejsza wersja została z powodzeniem zaatakowana przez wielu rozwiązujących. Liczne interesujące uwagi przedstawił **P. Kumor** ($\to$ wydanie elektroniczne); na przykład, że nie wiadomo, czy istnieje choć jedna taka czwórka, by również liczba $ad-1$ była kwadratem…

Zadanie **787.** [$M\subset\mathbb{Z}$; $0<|M|=n<\infty\Rightarrow\exists(x_1,\ldots,x_n)$(permutacja zbioru M) $\forall\, i,j,k$: $(i<j<k\ \Rightarrow\ x_i+x_k\neq 2x_j)$] ($WT$=2,26; LPR=11). Nietrudne; rozwiązania na ogół podobne do firmowego. Także i w tym zadaniu **P. Kumor** wskazał ciekawe uogólnienia; na przykład, że w treści zadania nie jest istotne, by zbiór M składał się z liczb całkowitych – może to być dowolny skończony podzbiór dowolnej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$; i mnóstwo innych komentarzy (więc znów: $\to$ wydanie elektroniczne).

Zadanie **788.** [$\forall a,b,c\,(\text{boki}\triangle)$: $\sum_{\text{cykl}}(a^2b+ab^2)-3abc\geqslant t\big(\sum a\big)^3$; $\max t=?$] (WT=1,82; LPR=13). Wynik: $\max t=1/9$; równość przy $a=b=c$; należało więc pokazać, że $F(a,b,c)\geqslant\frac19\big(\sum a\big)^3$, gdzie $F(a,b,c)$ oznacza wyrażenie po lewej stronie. Prawie wszyscy (a także rozwiązanie firmowe) używali nierówności Schura lub/i innej mądrej wiedzy. Toteż zadziwia prostotą metoda, jaką zastosował **Karol Matuszewski**: niech $s=a+b+c$ oraz (b.s.o.) $c\geqslant s/6$; skoro $ab\leqslant\frac14(a+b)^2=\frac14(s-c)^2$, zatem (po prostym przekształceniu)

$$(1)\qquad F(a,b,c)=sc(s-c)+ab(s-6c)\geqslant sc(s-c)+\tfrac14(s-c)^2(s-6c).$$

Wobec jednorodności można przyjąć, że $s=1$ (więc $\frac16\leqslant c<\frac12$); pozostaje pokazać, że

$$(2)\qquad w(c)\colon =c(1-c)+\tfrac14(1-c)^2(1-6c)\geqslant\tfrac19\,.$$

Tę własność (wielomianu jednej zmiennej!) można uzasadniać różnymi sposobami. Autor omawianej pracy użył rachunku pochodnych – nie ustrzegając się w tym usterki; ona jednak wydaje się drobna wobec urody rozumowania (oszacowanie (1) i sprowadzenie problemu do zależności (2)); zaś nierówność (2) da się uzasadnić króciutko: $w(c)-\frac19=\frac1{36}(5-6c)(1-3c)^2\geqslant0$.

Zadanie **790.** [$\triangle ABC$ ostrokątny; $D,E\notin\triangle ABC$; $|AD|=|BD|$, $|AE|=|CE|$; $AD\perp BD$, $AE\perp CE$; $CD\cap BE=\{P\}$; M,N – środki $BC,DE\Rightarrow$ $MN\perp DE\perp AP$] (WT=2,68; LPR=12). Dziwi taki stosunkowo wysoki współczynnik trudności przy tak – zdawałoby się – prostym zadaniu. Kilka osób zwróciło uwagę, że druga (nieco trudniejsza) część tezy ($DE\perp AP$) to bezpośrednia konsekwencja faktu (dość znanego), że gdy na bokach AB, AC, BC zostaną zbudowane kwadraty o środkach (odpowiednio) D, E, F, wówczas proste AF, BE, CD zawierają wysokości trójkąta DEF; zatem punkt P to jego ortocentrum. Podawano dowody tego twierdzenia (zresztą niezbyt trudne) lub (**J. Fiett**) odsyłacz do książki: Coxeter, Greitzer, *Geometry Revisited*, 1967 (Th. 4.81).

Było też, jak zwykle w geometrii, kilka rozwiązań analitycznych (w prostokątnym układzie współrzędnych), bardzo różniących się urodą i prostotą; rozmiary: od pół strony banalnych równości (**J. Cisło**) do czterech bitych stron zaiste żmudnych rachunków.

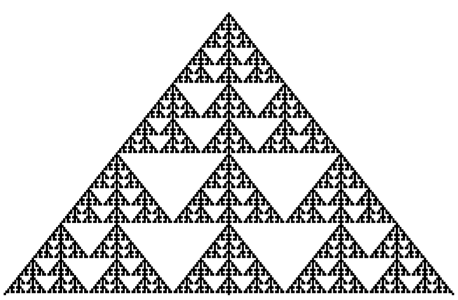
Zadanie **796.** [$m>n>1$; $m=2l$; $l,n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\big((\exists\,x,y\in\mathbb{N}\colon\ x^m+y^m=(x+y)^n)\Leftrightarrow(m-n)|(n-1)\big)$] ($WT$=2,34; LPR=12). Założenie parzystości m (oraz uporządkowanie: $m>n$) miało jedynie na celu zapewnienie poziomu elementarności, do jakiego stara się dostosowywać nasza liga. Wszelako dla naszych etatowych erudytów obecność takiego sztucznego założenia stała się oczywistym wyzwaniem. **Piotr Kumor** znalazł – używając twierdzenia Zsigmondy'ego (por. Δ^2_{20}) – rozwiązanie równania $x^m + y^m = (x+y)^n$ w czwórkach liczb naturalnych (m, n, x, y). **Janusz Olszewski** – tak samo, przy czym pokazał również inną metodę, nie odwołującą się do tw. Zsigmondy'ego; poszedł ponadto jeszcze krok dalej i podał pełne rozwiązanie równania w liczbach $m, n \in \mathbb{Z}$ oraz $x, y \in \mathbb{N}$. Oto wynik: dobre są czwórki

$$(1,1,x,y)\ \ (x,y \in \mathbb{N}\text{ dowolne});\qquad (3,2,2,1);\qquad (3,2,1,2);$$
$$(m,n,2^k,2^k)\ \ (k,m,n \in \mathbb{Z},\ \ k \geqslant 0,\ \ n-1 = k(m-n));$$

i tylko takie. Po szczegóły – ponownie odsyłamy do wersji elektronicznej.

Zadanie **797.** [$\max\lambda = ?$ gdy $\forall\triangle ABC\colon\ \mathrm{dist}(C, AB) = h$; M, N – środki AC, BC; $P \in AB$; okrąg (NBP) styczny do $BM \Rightarrow |AP| \geqslant \lambda h$] ($WT$=2,57; LPR=10). Wynik: $\max\lambda = \sqrt{2}$ uzyskali wszyscy rozwiązujący. Ale tylko trzej: **M. Adamaszek**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski** zrobili to zadanie „geometrycznie" (jak firmówka); pozostali – mocno rachunkowo (na ogół żmudnie i nie zawsze bez zastrzeżeń).

Zadanie **798.** [Diagram $\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$; (wiersz n) = ($2n$+1 liczb > 0); każdy element to suma trzech liczb nad nim $(\searrow, \downarrow, \swarrow) \Rightarrow$ (a) w każdym wierszu o numerze $n \geqslant 2$ jest liczba parzysta; (b) w których wierszach są dokładnie trzy liczby nieparzyste?] (WT=2,11; LPR=11). Bierzemy wszystkie wyrazy (mod 2); powstaje trójkątny diagram zero-jedynkowy, jak na ilustracji poniżej (skopiowany z pracy, którą przysłał **Janusz Fiett**; bardzo podobne przysłali **J. Olszewski** i **A. Kurach**). Diagram przypomina „trójkąt Pascala (mod 2)" i okazuje się jeśli nie równie sławny, to niewiele mniej. Ponownie **Piotr Kumor** udzielił wyczerpującej lekcji; jego praca (→ elektroniczne wydanie numeru) zawiera mnóstwo ciekawych informacji.



Kilku uczestników wskazało bardzo proste uzasadnienie tezy (a): wystarczy kontrolować (mod 2) cztery początkowe wyrazy n-tego wiersza; dla $n = 2, 3, 4, 5, 6$ mamy (kolejno) bloki: 1010, 1101, 1000, 1110, 1010, i wpadamy w cykl; bloki powtarzają się z okresem 4; stale jest obecne jakieś zero.

Teza (b): dokładnie trzy jedynki tylko dla $n = 2^s$ – jest znacznie ciekawsza. Użyty w rozwiązaniu firmowym język algebry (wielomiany $(1 + x + x^2)^n$) nie jest jedynym możliwym, ale jest wygodny. Język „czystej kombinatoryki" też pozwala zapisać rozumowanie, jednak kosztem sporych uciążliwości w opisie (**Janusz Olszewski** przysłał rozwiązania w obu tych stylach). Analizując wspomniane wielomiany bardziej wnikliwie, **Mikołaj Pater** wykazał (→ e-wydanie), że liczba jedynek w n-tym wierszu (oznaczona jako $b(n)$) spełnia zależności rekurencyjne (dla $n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$b(2n) = b(n);\quad b(4n{+}1) = 3b(n);\quad b(4n{+}3) = b(2n{+}1) + 2b(n);$$

to znaczne wzmocnienie tezy (b).

Zadanie **800.** [Dane $a, b > 0$; $f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{1-a/x} + \mathrm{e}^{1-b/x})$ dla $x > 0 \Rightarrow (\exists!\, L > 0\colon\ f(L) = 1)$; usytuowanie L względem średnich A, G, H liczb a, b?] (WT=2,84; LPR=5 (7?)). Odpowiedź: $A \geqslant G \geqslant L \geqslant H$. Dobre rozwiązania przysłali: **Michał Adamaszek** (autor zadania), **W. Bednarek**, **J. Olszewski**, **B. Żmija** oraz (z niewielką, łatwo usuwalną usterką) **P. Sołtan**; były ponadto dwie prace z usterkami nieco bardziej znaczącymi. Jeszcze kilka osób przysłało uzasadnienie samej tylko nierówności $G \geqslant L$, wyraźnie łatwiejszej niż $L \geqslant H$.

Funkcja f jest ściśle rosnąca, więc ta ciekawsza teza $H \leqslant L$ sprowadza się do wykazania, że $f(H) \leqslant 1$. Urzekająco prosty dowód tej ostatniej nierówności przedstawił **Witold Bednarek** (przypomnijmy – uczestnik Ligi od momentu jej narodzin): ponieważ $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$, wobec czego $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}$ dla $t > -1$, zatem biorąc kolejno $t_1 = \frac{a}{2b} - \frac{1}{2}$ oraz $t_2 = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}$, dostajemy (dla $H = \frac{2ab}{a+b}$)

$$f(H) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{1-\frac{a}{H}} + \mathrm{e}^{1-\frac{b}{H}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-t_1} + \mathrm{e}^{-t_2}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2}\Big) = 1.$$

Pięknie!

Zadanie **804.** [$p > 2$ liczba pierwsza; $A_r = \{(x_1, \ldots, x_p)$ – permutacja zbioru $\{0, \ldots, p{-}1\}$: $\sum kx_k \equiv r \pmod{p}\} \Rightarrow |A_r| = |A_s|$ dla $0 < r < s < p$] (WT=2,58; LPR=9). Dobre prace: **M. Adamaszek**, **W. Drozd**, **A. Kurach**, **K. Matuszewski**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **M. Pater**, **R. Słowik**, **B. Żmija**. Najciekawsze w tym zadaniu było to, czego w zadaniu nie było. Zbiory $A_1, \ldots, A_{p-1}$ mają jednakową liczbę elementów; zgoda; a *ile* wynosi ta liczba? Oznaczmy tę wspólną wartość (dla ustalonej liczby pierwszej p) przez b_p; jak się ona porównuje z licznością zbioru A_0, którą (dla tego samego p) oznaczymy a_p? Jasne, że $a_p + (p-1)b_p = p!$, więc poszukiwanie wartości b_p można zastąpić obliczaniem a_p; nie jest jednak znany żaden prosty wzór, wyrażający a_p (lub b_p) jako funkcję zmiennej p (kilka wartości: $a_3 = 0$, $a_5 = 20$, $a_7 = 630$, $a_{11} = 3634950$; $a_p < b_p$ dla $p \leqslant 7$, ale nie dla $p = 11, 13, 17, 19$).

Michał Adamaszek zwrócił uwagę, że dla *każdej* liczby $n \in \mathbb{N}$ (niekoniecznie pierwszej) można określić a_n jako liczność zbioru permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ reszt (mod n), spełniających warunek $\sum kx_k \equiv 0 \pmod{n}$, i że ciąg (a_n) to A004204 w OEIS (wartości numeryczne dla $n \leqslant 20$).

Dla liczby pierwszej p określa się *macierz Schura* $M_p = [\alpha^{kl}]_{1\leqslant k,l\leqslant p}$, gdzie α jest dowolnym nierzeczywistym p-tym pierwiastkiem z jedności. Liczba $\sum_\pi \prod_k \alpha^{k\pi(k)}$ (sumowanie po wszystkich permutacjach π) – tzw. *permanent* macierzy M_p (ozn. $\mathrm{perm}\, M_p$) – jest równa $a_p - b_p$ (nietrudne ćwiczenie). Numeryczne wyznaczanie wartości a_p (lub b_p) ma więc złożoność obliczeniową jak wyznaczanie $\mathrm{perm}\, M_p$ – czyli wysoką; wiele ciekawych informacji można znaleźć w sieci (Google: permanent of a matrix; także ciąg A003112 w OEIS).