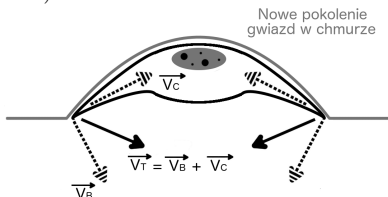


Rys. 1. Schemat obrazujący powstanie fali uderzeniowej w chmurze pyłu. Strzałkami zaznaczone są prędkości poruszania się obszarów chmury prostopadłych do frontu (punkt A) oraz punktów krańcowych chmury (punkt B)



Rys. 2. Zmiana kształtu chmury pyłowej pod wpływem uderzenia fali promieniowania UV. Krańce chmury zaczynają się ugiąć z powodu powstania zagęszczonego obszaru w centrum chmury, gdzie zaczynają tworzyć się nowe gwiazdy

Gwiazdne przedszkola w Δ_{20}^4). Takie masywne gwiazdy emitują silne strumienie promieniowania UV i na nowo modyfikują otaczający je ośrodek międzygwiazdowy, powodując powstawanie kolejnych pokoleń gwiazd.

Strumień promieniowania UV nie tylko rozpoczyna

procesy gwiazdotwórcze w chmurze pyłu, ale też modyfikuje jej morfologię. W początkowych etapach uderzenia fali skrajne obszary chmury popychane są prostopadle do powierzchni chmury. Powstaje w ten sposób gęsty obszar pyłu, który zmienia kierunek prędkości rozchodzenia się fali uderzeniowej na końcach chmury. Kształt chmury zaczyna się zmieniać. Jej krańce zaginają się do zewnątrz, tworząc struktury przypominające skrzydła. Tak zmodyfikowane chmury pyłu nazywamy świetlistymi aureolami (*Bright Rimmed Cloud*, BRC) i klasyfikujemy je na podstawie kąta inklinacji skrzydeł. Na rysunku 2 przedstawiony jest typ A o lekkim zakrzywieniu krańców „skrzydeł”. Typ C to struktura, w której skrzydła się łączą. Natomiast fazy pośrednie klasyfikowane są jako typ B. Interesujące w tym procesie jest to, że struktura chmury nie musi ewoluować od typu A do typu C. Zmiana kształtu może zatrzymać się na typie A lub B. Ale to nie wszystko. Po uderzeniu fali mogą powstać jeszcze bardziej skomplikowane struktury – wszystko zależy od początkowego kształtu chmury pyłowej. Najbardziej efektowne przybierają kształt litery M (typ M, BRC).

Tłumaczenie: Katarzyna Małek, Anna Durkalec

O tym, jak Martyna uratował królestwo

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Zofia MIŚKIEWICZ*, Michał MIŚKIEWICZ*

Dawno, dawno temu w odległym królestwie grasował straszliwy smok, którego zdołał pokonać dopiero dzielny Zygryd. W nagrodę otrzymał on połowę królestwa oraz rękę królowej Brunhildy. Nie będziemy tu jednak mówić o heroicznej walce naszego bohatera, ale o jej ekonomicznych następstwach. Otóż zgodnie z kontraktem swoją nagrodę Zygryd mógł otrzymać dopiero po roku – ten mały szczegół okazał się nieco kłopotliwy.

Zygryd darzył Brunhildę szczerym uczuciem, od razu oboje zaczęli planować ślub, a połowę królestwa postanowili spieniężyć. Druga połowa królestwa była już notowana na giełdzie, wiadomo było zatem, że jest w tym momencie warta 100 talentów (w skrócie: tal.). Zygryd potrzebował pieniędzy, jednak nie miał jeszcze prawa do swoich udziałów. Miał za to żylkę hazardzisty, postanowił więc już teraz sprzedać prawo do kupna swojej połowy królestwa rok później, za to w obniżonej cenie – 80 tal. Uznał za sprawiedliwe zażądać za taki przywilej 20 tal. (płatnych od zaraz). W szczegółach kontrakt jest więc następujący: umówiony Kupiec płaci dzisiaj Zygrydowi 20 tal., a za rok od teraz

- (A) jeśli cena giełdowa jest powyżej 80 tal., kupuje połowę królestwa od Zygryda za 80 tal.;
- (B) jeśli cena spadła poniżej 80 tal., Kupiec odstępuje od transakcji, gdyż bardziej opłacałby mu się zakup na giełdzie.

Jak to bywa w takich przypadkach, szybko znaleźli się przeróżni doradcy. Królestwo toczyło wówczas wojnę z sąsiednim państwem. Mag optymista przekonywał, że wojna ta z pewnością będzie wygrana, przez co wartość królestwa się podwoi. Za rok cena połowy wyniesie więc 200 tal., a Kupiec za przywilej kupna po niższej cenie powinien zapłacić 120 tal. Tymczasem mag Pesymista był przeciwnego zdania – wojna skończy się przegraną, a wartość królestwa zmniejszy się dwukrotnie. W takim scenariuszu cena połowy królestwa wyniesie 50 tal., co czyni przywilej kupna bezwartościowym – Kupiec powinien więc zapłacić okrągłe 0 tal.

Wszyscy byli zgodni, że któryś z magów ma rację – cena giełdowa za rok wyniesie 50 lub 200 tal. – nie wiadomo było tylko, który. Z pośrednią propozycją przyszedł mag Realista: skoro są dwie możliwości, to zgodnie

Kontrakt opisany obok nazywa się fachowo *europijską opcją kupna*.

ze szkolnym doświadczeniem należy uznać, że każda z nich ma to samo prawdopodobieństwo $1/2$. Sprawiedliwa cena kontraktu wynosi więc

$$\frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 60 \text{ tal.}$$

W tym momencie zainterweniowała Brunhilda, ostoją zdrowego rozsądku. Królowa wytknęła Zygrydowi, że wartości $1/2$ i $1/2$ są zupełnie arbitralne, zamiast tego można by wybrać prawdopodobieństwa wygranej $3/4$ i przegranej $1/4$, albo coś jeszcze innego. Trudno przecież przewidywać, jak potoczą się losy wojny. Sprowadziła więc na pomoc znanego mędrca ze wschodu, maga Martyngałowa.

Po wysłuchaniu problemu mag Martyngałow orzekł, że należy przyjąć prawdopodobieństwa wygranej $1/3$ i przegranej $2/3$, a w konsekwencji kontrakt sprzedac za cenę

$$\frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 40 \text{ tal.}$$

Jego autorytet znacząco spadł, kiedy się okazało, że niewiele wie o trwającej wojnie – jak więc mógłby przewidywać jej wynik? Odpowiedź Martyngałowa zszokowała wszystkich – stwierdził, że podane prawdopodobieństwa nie mają związku z jego przekonaniem, a po prostu są dobrane tak, by oczekiwana wartość połowy królestwa po roku była równa obecnej. Istotnie, przy takim doborze spodziewana cena za rok wynosi

$$\frac{1}{3} \cdot 200 + \frac{2}{3} \cdot 50 = 100 \text{ tal.,}$$

czyli tyle co teraz. W takiej sytuacji – i tylko w takiej! – okazuje się, że nie opłaca się ani kupować udziałów królestwa, ani sprzedawać, gdyż udziały po roku będą (średnio) warte tyle samo.

Zygryd nie był jeszcze przekonany, że 40 tal. jest sprawiedliwą ceną. Na pomoc przysłała nieoceniona Brunhilda. Zauważyła, że przy tak dobranej cenie Zygryd mógłby sprzedac przywilej kupna połowy królestwa, nawet gdyby wcale nie miał do niej praw. Jak to możliwe? Otóż mając do dyspozycji 40 tal. od Kupca i dodatkowo pożyczając 40 tal. z banku, mógłby teraz zainwestować 80 tal. w kupno udziałów w królestwie, po roku zaś

- (A) w przypadku wygranej – wartość jego udziałów wynosiłaby 160 tal., co po spłacie długu w banku dawałoby dokładnie 120 tal. na pokrycie zysku Kupca*;
- (B) w przypadku przegranej – wartość jego udziałów wynosiłaby 40 tal., co wystarczyłoby mu dokładnie na spłatę długu w banku.

Stosując powyższą strategię, każdy mógłby sprzedac prawo do kupna połowy królestwa; okazuje się, że niezależnie od wyniku wojny wyszedłby na zero! To przekonało naszych bohaterów ostatecznie, że 40 tal. jest sprawiedliwą ceną. Znaleźli kupca, po czym żyli długo i szczęśliwie.

Czytelnikowi należy się może wyjaśnienie, jak taką strategię inwestycyjną (czyli portfel replikujący) znaleźć. Otóż zakładając, że Zygryd (choćby i nie mając praw do królestwa) otrzymał 40 tal. od kupca, a na rezerwę gotówkową i udziały giełdowe przeznaczył odpowiednio x i y talentów, to liczby te muszą spełniać

$$\begin{cases} x + y = 40 & \text{(taką kwotą dysponuje Zygryd),} \\ x + 2y = 120 & \text{(to jest zobowiązanie w przypadku wygranej),} \\ x + \frac{1}{2}y = 0 & \text{(a to w przypadku przegranej).} \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem rzeczywiście jest $x = -40$ i $y = 80$. Wartość ujemna oznacza, że zamiast rezerwy gotówkowej mamy kredyt, ale w królestwie rynków kapitałowych to nie jest problem – przynajmniej do czasu następnego kryzysu.

A jakie znaczenie ma tu miara martyngałowa? Na to pytanie odpowiedzą poniższe zadania.

Zadania

1. Załóżmy, że Zygryd ustalił jednak cenę wykupu po roku na 65 tal. (zamiast 80 tal.). Przyjmując cenę

kontraktu C za niewiadomą, sformułować odpowiedni układ równań na x , y , C i wyznaczyć ich wartości.

2. W powyższym scenariuszu wyznaczyć miarę martyngałową (prawdopodobieństwa wygranej i przegranej), a następnie cenę kontraktu odpowiadającą tym prawdopodobieństwom. Czy pokrywa się ona z kwotą z poprzedniego zadania?

3. Przypuśćmy, że na organizację wesela Zygryd potrzebuje już teraz 30 tal. zaliczki. Jaką cenę wykupu po roku powinien ustalić, by sprawiedliwa cena kontraktu wyniosła dokładnie 30 tal.?

Miarę prawdopodobieństwa, przy której wartość oczekiwana w przyszłości zgadza się z obecną wartością, nazywamy *miarą martyngałową*.

* Gdyby ściśle trzymać się zasad kontraktu, Kupiec powinien zapłacić 80 tal., z czego 40 należy przeznaczyć na spłatę kredytu, a pozostałe 40 na dokupienie udziałów, aby Kupiec otrzymał obiecaną połowę królestwa. Strategia giełdowa dająca identyczne rezultaty co zawarcie kontraktu nosi w literaturze nazwę *portfela replikującego*.