Lepszy papier w garści i źle zatemperowany ołówek

*Mariusz SKAŁBA**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

My, matematycy, ubolewamy czasem nad tym, jak trudno jest dotrzeć z matematycznym przesłaniem do szerszej publiczności. Zdarza się, że w desperacji porównujemy matematykę a to do muzyki, a to do poezji, jakby to dawało szansę na wyjście z niszy. To jednako błędna strategia, gdyż większość poezji kończy w szufladach, pewna jej część jest wydawana (o zgrozo!) własnym sumptem, a tylko znikoma resztówka jest słusznym przedmiotem naszych urojeń i pretensji. Nie znam również przekonujących zastosowań matematyki w praktyce muzycznej, chociaż w *Deltach* 7–8 (2020) opowiedziano pięknie i przystępnie o ważnym odkryciu starożytnych Greków: *strój instrumentu muzycznego nie może być jednocześnie naturalny i uniwersalny*†. Natomiast ważna dla historii muzyki konstatacja, że Ludwig van Beethoven skomponował **dziewięć** wspaniałych symfonii, nie jest zbyt istotnym zastosowaniem matematyki. Oczywiście chętnie odwołam te autoszyderstwa, gdy spodoba mi się choć trochę szumnie zapowiadana kompozycja AI oparta na szkicach dziesiątej symfonii Beethovena. Ma być ona ważnym elementem obchodów 250-lecia urodzin tego wielkiego kompozytora, który został ochrzczony 17 grudnia 1770 roku (zatem z chwilą ukazania się tego tekstu będę zapewne wiedział, czy mam powód do odwoływania czegokolwiek).

†Ta naturalna i uniwersalna metaprawda odnosi się niestety też do mody krawieckiej.

Ale teraz o wyższości zwykłego papieru nad ulotnym złotem. Jak powszechnie wiadomo, liczba $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ zwana *złotą proporcją* ma następującą własność. Jeśli krótsza część odcinka ma długość $k = 1$, a dłuższa ma długość $d = \phi$, to cały odcinek ma długość $c = k + d = 1 + \phi = \phi^2$, czyli

$$\frac{c}{d} = \frac{d}{k} = \phi.$$

W otchłaniach Internetu i wszędzie poza nim (jeśli są jeszcze takie miejsca) znajdziesz, Czytelniku, mnóstwo wywodów o walorach estetycznych tej proporcji i jej rozlicznych zastosowaniach w różnych dziedzinach. YouTube obfituje w filmiki z ϕ w roli głównej, których gorąco nie polecam. Nie jest oczywiście tak, że z liczby ϕ nie daje się nic wycisnąć – ostatecznie jest przecież z dość miękkiego kruszcu. Oto jego próbka.

Ponieważ $\phi^2 = \phi + 1$, więc

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}} \text{ itd.}$$

Z elementarnej teorii ułamków łańcuchowych wynika zatem, że ϕ ma możliwie najprostsze rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots}}$$

Z takim ułamkiem łańcuchowym związany jest zawsze ciąg jego reduktów ϕ_n, czyli ułamków urwanych

$$\phi_0 = 1,\ \phi_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2,\ \phi_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \ldots$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że

$$\phi_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}},$$

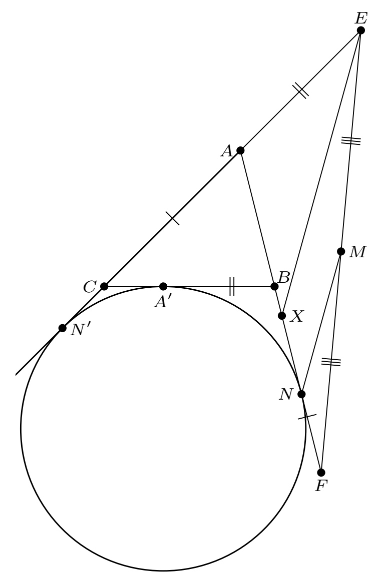
gdzie $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Fibonacciego, określonym słynną rekurencją

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ponadto $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$, i to jest najważniejsza własność ciągu reduktów.

Weźmy teraz $k = F_9 = 34$, $d = F_{10} = 55$, $c = k + d = F_{11} = 89$ i rozważmy prostokąt o wymiarach 55 na 89. Jest on praktycznie złoty, gdyż $89/55 = 1{,}6(18) \approx \phi$. No cóż, estetyka tego prostokąta mnie nie poraża, ale muszę przyznać, że ma on dość ciekawą własność: po odcięciu kwadratu pozostały prostokąt o wymiarach 34 na 55 jest też praktycznie złoty, a więc

Rozwiązanie zadania M 1664. Rozważmy punkt X będący punktem przecięcia prostej przechodzącej przez E i równoległej do MN z prostą AB. Wówczas wystarczy udowodnić, że trójkąt XAE jest równoramienny.



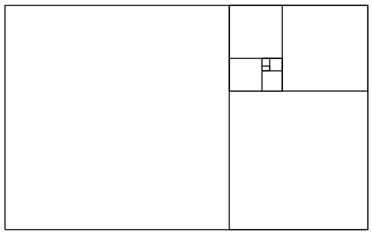
Oznaczmy przez Ω okrąg dopisany z zadania, a przez N' i A' punkty styczności Ω z prostymi, odpowiednio, AC i AB. Wówczas, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych, dostajemy

$$(\star) \quad \begin{aligned} 2AN &= AN + AN' = \\ &= AB + BN + AC + CN' = \\ &= AB + AC + BA' + CA' = \\ &= AB + BC + CA. \end{aligned}$$

Ponieważ prosta MN jest linią środkową w trójkącie EFX, to $XF = 2NF$. Ponadto z równości $AE = BC$, $BF = AC$ oraz $(\star)$ mamy

$$\begin{aligned} AX &= AF - XF = \\ &= AB + BF - 2NF = \\ &= AB + AC - 2NF = \\ &= AB + AC - 2(AB + BF - AN) = \\ &= AB + AC - 2(AB + AC - AN) = \\ &= BC = AE, \end{aligned}$$

skąd wynika, że trójkąt XAE jest równoramienny.



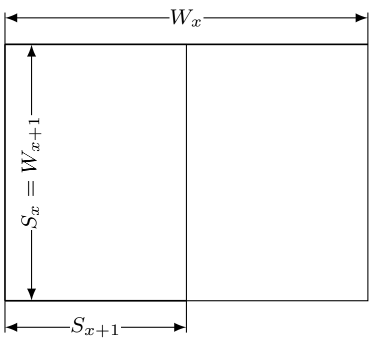
Rys. 1

prawie podobny do wyjściowego. Oczywiście jeśli ktoś jest bezkompromisowy w swoich wymaganiach estetycznych, to nie będzie tolerował powyższych *praktycznie* i *prawie*, ale być może uzna, że przedstawiony na rysunku 1 doskonale złoty prostokąt (o niewspółmiernych bokach) jest jednoczesną sublimacją wycinanek łowickich i origami – bardzo przepraszam, ale to mnie też nie wzrusza!

Zupełnie inaczej jest, gdy mam przed sobą pustą kartkę papieru formatu A4, długopis w prawej ręce i być może inne jeszcze przedmioty, przydatne w tego typu kłopotliwej sytuacji. Po dłuższej chwili namysłu odkładam długopis na bok, a pustą w dalszym ciągu kartkę składam na pół wzdłuż linii równoległej do krótszego boku. Łudzę się, że pomysłów wystarczy przynajmniej na wypełnienie tej mniejszej kartki – ostatecznie przecież jest ona **podobna** do wyjściowej. Oto uzasadnienie.

Szerokość S_4 i wysokość W_4 arkusza A4 wynoszą $S_4 = 210$ mm, $W_4 = 297$ mm. Wymiary arkusza A5, który odpowiada złożonej na pół kartce formatu A4, to $S_5 = 148$ mm, $W_5 = 210$ mm. Obliczamy

$$\frac{W_4}{S_4} \approx 1{,}414286 \quad \text{oraz} \quad \frac{W_5}{S_5} \approx 1{,}418919.$$



Rys. 2

Zatem arkusze A4 oraz A5 są praktycznie podobne. W wersji bezkompromisowej stosunek boków S_x, W_x w arkuszu Ax wynosi

$$\frac{W_x}{S_x} = \sqrt{2},$$

natomiast

$$S_{x+1} = \frac{W_x}{2}, \quad W_{x+1} = S_x \quad \text{(patrz rys. 2)}.$$

Mamy oczywiście

$$\frac{W_{x+1}}{S_{x+1}} = \frac{S_x}{W_x/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Elegancji tej konstrukcji dodaje fakt, że format A0 ma założoną powierzchnię 1 m^2. Obliczmy jego wymiary teoretyczne. Mamy równania

$$\frac{W_0}{S_0} = \sqrt{2}, \quad W_0 \cdot S_0 = 10^6 \ \mathrm{mm}^2,$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$W_0 = \sqrt[4]{2} \cdot 10^3 \approx 1189{,}2 \text{ mm}, \quad S_0 = \frac{10^3}{\sqrt[4]{2}} \approx 840{,}9 \text{ mm}.$$

Prawdziwe wymiary A0, $W_0 = 1189$ mm, $S_0 = 841$ mm są wynikiem zastosowania praktycznej reguły, że wymiary boków w milimetrach muszą być całkowite.

Ciąg formatów papieru Ax reguluje międzynarodowa ustawa normalizacyjna ISO 216, ale jego twórcą jest Georg Christoph Lichtenberg, niemiecki fizyk i aforysta żyjący w XVIII wieku. Goethe zabiegał u niego, na próżno, o uznanie swojej *Zur Farbenlehre*, a wspomniany na początku Beethoven nie konsultował z matematykami wiedeńskimi optymalnego rozmiaru dla swoich partytur. Wymiar ich sztuki nie jest matematyczny, a raczej zupełnie nieobliczalny: Beethoven zapewne nie skorzystałby z rad i zachęt do przycinania kwadratów lub składania nut na pół, chociaż anegdotyczne stały się jego kłótnie z wydawcami i sponsorami o każdego guldena.

Przy okazji wspomnijmy tutaj, że według Hansa von Bülowa zbiór preludiów i fug J.S. Bacha *Das Wohltemperierte Klavier* jest Starym Testamentem muzyki europejskiej, a 32 sonaty fortepianowe Beethovena Nowym Testamentem.

No cóż: nam pozostaje papier i dobrze nastrojony umysł…

Rozwiązanie zadania M 1665. Zauważmy, że

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a^3+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2a+1)(a-1)^2}{3(a+1)(a^2-a+1)} \geqslant 0,$$

wobec tego

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \geqslant \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} + \frac{1}{d^3+1} - 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot (2-2) = 0.$$