Ułamki Fibonacciego

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Weźmy dobry kalkulator do ręki i wykonajmy dzielenie 10000 : 9899. Wynikiem jest ułamek okresowy o okresie 468, ale my ograniczymy się do kilkudziesięciu początkowych cyfr:

Dobrym kalkulatorem jest na przykład wolframalpha.com.

$$\frac{10000}{9899} = 1{,}010203050813213455904636832003 2\ldots$$

Jeśli nie zauważyliśmy w powyższej liczbie niczego niezwykłego, to wyróżnijmy teraz w rozwinięciu dziesiętnym kilka początkowych bloków dwucyfrowych:

$$1,\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ 90463683200322\ldots$$

Wyróżnione bloki to kolejne liczby Fibonacciego! Zwiększmy liczbę zer oraz dziewiątek i wykonajmy dzielenie 1000000 : 998999. Wynik?

$$1,\ 001\ 002\ 003\ 005\ 008\ 013\ 021\ 034\ 055\ 089\ 144\ 233\ 377\ 610\ 98859958\ldots$$

Wyróżnione bloki to ponownie kolejne liczby Fibonacciego! Podobny schemat zaobserwujemy, gdy wykonamy dzielenie

$$\frac{10^{2n}}{10^{2n}-10^n-1},$$

a w rozwinięciu wyniku wyróżnimy bloki n-cyfrowe. Własność niezwykła! W powyższych dwóch przykładach reguła ta obowiązuje jednak tylko do pewnego miejsca. Niestety, będzie tak dla każdego ułamka, z jakim będziemy mieć do czynienia w tym artykule. Jeśli tylko liczba (tu Fibonacciego) jest krótsza niż długość bloku, to prawie zawsze zostanie odtworzona dokładnie. Wyjątek mogą stanowić „ostatnie" bloki, to znaczy te najbardziej z prawej strony. W powyższym przykładzie blok cyfr 610 jest liczbą Fibonacciego, po nim chcielibyśmy zobaczyć 987, a potem 1597 – tak się jednak nie dzieje. Jest to konsekwencją tego, że 1597 (które jest dłuższe niż blok) „nachodzi" na 987 – liczba 1597 przenosi 1 do bloku z 987, dając w efekcie 988. Kolejne bloki są jeszcze bardziej chaotyczne.

Czy w podobny sposób można otrzymać inne sekwencje liczb? Spójrzmy na kolejny intrygujący przykład:

$$\frac{100}{9801} = 0,\ 01\ 02\ 03\ 04\ 05\ 06\ 07\ 08\ 09\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ldots 96\ 97\ 99\ 00\ldots$$

W intrygującym przykładzie obok przedstawione są wszystkie kolejne dodatnie liczby naturalne w blokach dwucyfrowych do 97 włącznie. Blok odpowiadający liczbie 100 jest za długi i przenosi 1 do bloku 99, który ma teraz wartość 100, i ten z kolei przenosi 1 na blok 98, dając w efekcie 99. Stąd po bloku 97 pojawia się blok 99, a następnie 00.

W dalszej części spróbujemy uzasadnić, skąd biorą się powyższe schematy. Zaczniemy od definicji funkcji tworzącej ciągu. Jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb (rzeczywistych), to sumę szeregu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

nazywamy funkcją tworzącą tego ciągu*. Funkcje takie zwykle rozważa się nie dla dowolnej liczby rzeczywistej x (gdyż nie zawsze powyższa suma jest skończona), a jedynie dla pewnego zakresu liczb. Omówimy to na przykładzie.

*Tak naprawdę funkcja tworząca jest definiowana jako szereg formalny. Dla niektórych x szereg ten jest zbieżny, co pozwala w tej sytuacji przypisać sumie $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ wartość liczbową. Jednak w ogólności funkcja tworząca nie jest funkcją, bo dla niektórych argumentów x szereg może nie być zbieżny.

Wyznaczenie zakresu argumentów x, dla których suma szeregu istnieje, to znajdowanie tak zwanego promienia zbieżności szeregu potęgowego. Jest to zagadnienie techniczne i nie będziemy mu poświęcać miejsca w tym artykule.

W trakcie edukacji szkolnej prezentowany (i często uzasadniany) jest wzór na sumę ciągu geometrycznego

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

„Przechodząc" na zmienną x, można to zapisać następująco:

$$H(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

czyli $H(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu stałego $a_n = 1$, gdyż wszystkie współczynniki w nieskończonej sumie są równe 1. Wiemy ponadto, że powyższa suma jest zbieżna tylko wtedy, gdy $|x| < 1$ (pamiętamy warunek na istnienie sumy ciągu geometrycznego). Podobne ograniczenia występują dla wielu innych ciągów.

Teraz niech dany będzie dowolny ciąg geometryczny

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots$$

Naszym zadaniem jest wskazanie funkcji tworzącej tego ciągu.

Twierdzenie 1. *Funkcją tworzącą ciągu geometrycznego jest*

$$G(x) = \frac{a}{1-qx}.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\frac{a}{1-qx} = a(1+qx+q^2x^2+q^3x^3+\ldots) = a+(aq)x+(aq^2)x^2+(aq^3)x^3+\ldots$$

□

Dokonajmy teraz **podstawienia** $x \mapsto 1/x$ do powyższej funkcji tworzącej. Otrzymujemy wtedy

$$G(1/x) = a + \frac{aq}{x} + \frac{aq^2}{x^2} + \frac{aq^3}{x^3} + \ldots$$

i przyjmując na przykład $a=1$, $q=3$ oraz $x=1000$, otrzymujemy

$$G(1/1000) = 1 + \frac{3}{1000} + \frac{9}{1000^2} + \frac{27}{1000^3} + \frac{81}{1000^4} + \frac{243}{1000^5} + \ldots =$$
$$= 1,\ 003\ 009\ 027\ 081\ 243\ \ldots,$$

Zauważmy, że każdy z ułamków $\frac{3}{1000}$ albo $\frac{9}{1000^2}$ odpowiada za blok 3 cyfr i bloki te są rozłączne.

a więc bloki trzycyfrowe są kolejnymi potęgami liczby 3. Z drugiej strony

$$G(1/1000) = \frac{1}{1-\frac{3}{1000}} = \frac{1000}{1000-3} = \frac{10^3}{10^3-3}.$$

Na podstawie powyższego przykładu możemy opisać ogólną postać ułamka, który „tworzy” kolejne potęgi liczby N w blokach n-cyfrowych. Taki ułamek ma postać

$$(\spadesuit) \qquad \frac{10^n}{10^n-N}.$$

Ustalamy tutaj konwencję $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.

Znajdziemy teraz funkcję tworzącą $F(x)$ ciągu Fibonacciego $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 2. *Funkcją tworzącą ciągu Fibonacciego jest*

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n = \\
&= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2} = \\
&= 1 + x + x\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1}\right) + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2} = \\
&= 1 + x + x(-1+F(x)) + x^2F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x),
\end{aligned}$$

stąd otrzymujemy $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$. □

Ponownie stosujemy podstawienie $x \mapsto 1/x$, w ten sposób mamy

$$F(1/x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-x-1}.$$

Dla $x = 100$ otrzymujemy $F(1/100) = \frac{10000}{9899}$, czyli

$$F(1/100) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{2}{100^2} + \frac{3}{100^3} + \frac{5}{100^4} + \ldots = 1,01020305\ldots$$

Uzasadniliśmy efekt widoczny w początkowej części artykułu oraz wyprowadziliśmy wzór, za pomocą którego można tworzyć dłuższe bloki zawierające liczby Fibonacciego.

Twierdzenie 2 można uogólnić na dowolny ciąg zadany rekurencją drugiego rzędu, co zaraz wykażemy. Rozważmy ciąg postaci

$$G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2}, \qquad n \geqslant 2$$

i dodatkowo załóżmy, że G_0, G_1 są dane, p i q są pewnymi stałymi oraz wszystkie G_n są liczbami dodatnimi.

Założenie o dodatniości G_n jest czysto techniczne i potrzebne tylko do rozwinięć ułamków. Dla samego twierdzenia poniżej nie ma ono żadnego znaczenia.

Twierdzenie 3. *Funkcją tworzącą ciągu G_n, opisanego powyżej, jest*

$$G(x) = \frac{G_0 + x(G_1 - pG_0)}{1 - px - qx^2}.$$

Dowód twierdzenia 3 przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.

Twierdzenie 3 pozwala na znalezienie ciekawych ułamków „kodujących" różne ciągi. Wystarczy bowiem, że dany ciąg można zakodować równaniem rekurencyjnym drugiego rzędu. Jest tak na przykład dla ciągu arytmetycznego. Niech $a_n = a_0 + nr$ będzie wzorem ogólnym tego ciągu. Wtedy

$$a_{n+1} = a_0 + nr + n, \qquad a_{n+2} = a_0 + nr + 2n,$$

a stąd wynika, że $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Oznacza to, że funkcją tworzącą ciągu arytmetycznego jest

$$A(x) = \frac{a_0 + x(a_1 - 2a_0)}{1 - 2x + x^2}.$$

Przyjmując teraz $a_0 = 0$ oraz $r = 1$ i ponownie podstawiając $x \mapsto 1/x$, otrzymujemy odpowiednio

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad A(1/x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Wynika z tego, że dla $x = 100$ powinniśmy otrzymać ułamek zawierający w swoim rozwinięciu kolejne liczby naturalne. Istotnie tak jest:

$$A(1/100) = \frac{100}{99^2} = 0,(01\ 02\ 03\ 04\ 05 \ldots 96\ 97\ 99\ 00),$$

a więc w rozwinięciu widzimy aż 97 kolejnych liczb naturalnych.

Dla $x = 10^n$ otrzymamy

$$A(1/10^n) = \frac{10^n}{(10^n - 1)^2},$$

w ten sposób możemy uzyskać więcej kolejnych liczb naturalnych.

Rozważmy jeszcze jeden przykład. Jeśli teraz $a_0 = 3$ oraz $r = 5$, to odpowiadającą temu funkcją tworzącą jest

$$A(x) = \frac{2x + 3}{(1-x)^2}.$$

Stąd biorąc ponownie $x = 100$ i postępując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy

$$A(1/x) = \frac{30200}{9801} = 3,08\ 13\ 18\ 23\ 28\ 33\ 38\ 43\ 48\ 53\ 58 \ldots$$

W ogólnym przypadku, jeśli $x = 10^n$, to

$$A(1/x) = \frac{2 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^{2n}}{(10^n - 1)^2}.$$

Okiełznaliśmy ciągi geometryczne, arytmetyczne oraz ciąg Fibonacciego. Spróbujmy wyznaczyć teraz taką funkcję dla kwadratów liczb dodatnich, to jest znaleźć

$$K(x) = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Twierdzenie 4. *Funkcją tworzącą ciągu kwadratów liczb naturalnych jest*

$$K(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}.$$

Dowód. Skorzystamy tu z wyprowadzonej wcześniej funkcji tworzącej liczby naturalne oraz funkcji tworzącej ciąg stały 1

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + x \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n + 1) x^n = \\ &= x + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = \\ &= x + xK(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \\ &= x + xK(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{1-x}. \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymujemy $K(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$. □

Podstawiamy ponownie $x \mapsto 1/x$, czyli otrzymujemy $K(1/x) = \frac{x+x^2}{(x-1)^3}$. Przewidujemy zatem, że dla $x = 1000$ otrzymamy bloki trzycyfrowe zawierające kolejne kwadraty. Istotnie

$$K(1/1000) = \frac{1000^2 + 1000}{(1000-1)^3} = \frac{10001000}{997002999} =$$
$$= 0{,}\ 001\ 004\ 009\ 016\ 025\ 036\ 049\ 064\ 081\ 100\ 121\ 144\ 169\ 196\ 225\ 256\ 289\ 324\ 361\ 400\ 441\ 484\ 529\ 576\ 625\ 676\ 729\ 784\ 841\ 900\ldots$$

Ułamek $K(1/1000)$ jest okresowy o okresie 2 994 003.

zgodnie z przewidywaniami.

Na koniec zachęcamy Czytelnika do samodzielnych ćwiczeń.

Zadanie 1. Uzasadnić słuszność wzoru (♠).

Liczby Lucasa: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

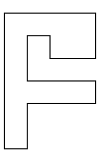
Zadanie 2. Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby Lucasa w blokach pięciocyfrowych.

Zadanie 3. Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby trójkątne w blokach czterocyfrowych.

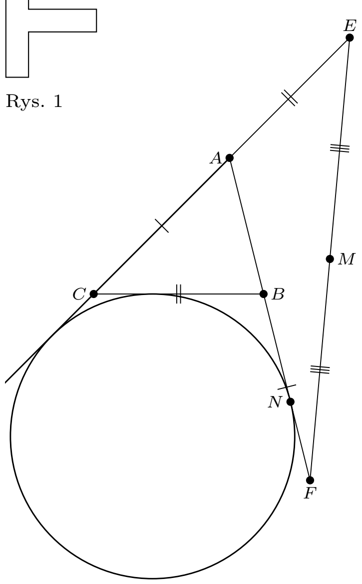
Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1663. Jaka jest największa możliwa liczba niezachodzących na siebie figur w kształcie $\mathcal{F}$ (rys. 1), które można wyciąć z kwadratu 300×300? Figury można obracać i odwracać na drugą stronę.
Rozwiązanie na str. 5


Rys. 1

M 1664. Na przedłużeniach boków CA i AB trójkąta ABC obrano punkty E i F odpowiednio tak, że $AE = BC$ i $BF = AC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC, styczny do boku BC, jest styczny do BF w punkcie N. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Udowodnij, że prosta MN jest równoległa do dwusiecznej kąta przy wierzchołku A.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

M 1665. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d spełniających równość
$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} + \frac{1}{d^3+1} = 2$$
zachodzi nierówność
$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \geqslant 0.$$
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1017. Piramida Cheopsa po wybudowaniu była ostrosłupem o podstawie kwadratowej o boku $a = 230\,\mathrm{m}$ i wysokości $H = 147\,\mathrm{m}$. Zbudowano ją z bloków wapienia. Oszacuj, ile czasu trwałoby dzisiaj jej wznoszenie, gdyby przy jej budowie bez przerwy pracowały dźwigi o łącznej mocy $P = 500\,\mathrm{kW}$. Gęstość wapienia $\rho \approx 2{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.
Wskazówka: środek masy ostrosłupa znajduje się w 1/4 jego wysokości.
Rozwiązanie na str. 1

F 1018. Samolot o masie $M = 10^4\,\mathrm{kg}$ ląduje z początkową prędkością $v_0 = 200\,\mathrm{km/godz.}$ Z powierzchnią lotniska stykają się dwa koła, każde o średnicy $d = 2\,\mathrm{m}$ i momencie bezwładności $I = 100\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Koła mogą obracać się bez oporu, a w momencie lądowania nie obracają się. W chwili zetknięcia się z płytą lotniska koła zaczynają się ślizgać. O ile zmniejszy się prędkość samolotu do czasu, gdy koła zaczną toczyć się bez poślizgu? Pomijamy opór powietrza.
Rozwiązanie na str. 15