

delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 1 (560) 2021

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PI ISSN 0137-3003 | NR IND 35 550 X
MIESIECZNIK

www.deltami.edu.pl



Nakład: 3500 egz.

**Jaśnie pan
bąbelek**
str. 4

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (560)

Fale grawitacyjne od Newtona do Einsteina

Michał Bejger

Jaśnie pan bąbelek

Jan Sotek



Zadania

Matematyczny kącik muzyczny III:
Błądząc po przestrzeni tonacji

Konstanty Kostrzewski

Zgaduj zgadula, gdzie jest kwantowa kula?

Ewa Borsuk, Paweł Błasiak

Pół szklanki mocnego kodu

Ustawka 2020

Logika implikacji

Aleksy Schubert

Funkcja sinus – detektor liczb niewymiernych?

Karol Gryszka

Które zgięcie jest naj...?

Jarosław Górnicki

O związkach optymalnego transportu z twierdzeniem o kanapce

Krzysztof J. Ciosmak

Klub 44

Prosto z nieba: 25. cykl Słoneczny

Niebo w styczniu

Aktualności

LHC odkrywa nową cząstkę



Chodzi mi o to, aby język giętki...

Bartłomiej Bzdega

str. 1

str. 4

str. 5

str. 6

str. 8

str. 10

str. 12

str. 15

str. 16

str. 18

str. 20

str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

W następnym numerze o tym,
jak Martynałow uratował królestwo.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Fale grawitacyjne od Newtona do Einsteina

Michał BEJGER

W listach do teologa Richarda Bentleya Newton pisze, że oddziaływanie ciał bez jakiegokolwiek pośrednictwa jest niedorzecznością, co prowadzi do wniosku, że musi istnieć dodatkowy czynnik przekazujący oddziaływania: „Jest czymś nie do pomyślenia, by prostacka materia mogła, bez pośrednictwa czegoś więcej, co jest niematerialne, działać na cokolwiek i wpływać na inną materię bez wzajemnego kontaktu [...] Grawitacja musi być efektem Czynnika działającego stale według pewnych praw, ale czy ten czynnik jest materialny, czy niematerialny, należy już do rozstrzygnięcia przez moich czytelników.” (przekład Janusz Sytnik-Czetwertyński, Kwartalnik Filozoficzny T. XLII, Z. 2, 2014).

W *Teorii dynamiki pola elektromagnetycznego* z 1865 roku Maxwell pisze też o grawitacji: „... w naturalny sposób dochodzimy do pytania, czy przyciąganie grawitacyjne, które podobnie zależy od odległości, nie jest również powiązane z działaniem otaczającego ośrodka”. Czy można więc myśleć o grawitacji jako o efekcie propagacji pola?

Popkulturowa opowieść o **Albercie Einsteinie** i ogólnej teorii względności jest bardzo romantyczna: samotny geniusz rozwiązuje wielką zagadkę swoich czasów. Droga do sformułowania nowoczesnej teorii grawitacji i, w szczególności, przewidywań dotyczących fal grawitacyjnych (obecnie rejestrowanych rutynowo przez laserowe interferometry LIGO i Virgo) jest jednak bardziej skomplikowana... Wymagała pracy wielu pokoleń fizyków i rozwoju innej wielkiej teorii – elektromagnetyzmu.

Zacznijmy jednak od początku. W 1687 roku **Izaak Newton** przedstawił swój przepis na siłę grawitacji, zależną od iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, czyli $F = Gm_1m_2/r^2$, gdzie G to stała wartość. Newtonowska siła grawitacji działa *natychmiastowo*, nawet między *bardzo odległymi* obiektami. W wielu zastosowaniach mechaniki takie przybliżenie jest zupełnie wystarczające, szczególnie do niewielkich, wolno poruszających się obiektów. Problemem natomiast okazało się zrozumienie tego, jak siła może w ogóle „działać na odległość”. Temu zagadnieniu poświęcono wiele czasu oraz dyskusji filozoficznych. Pierwsza próba rozwiązania tej zagadki i sformułowania newtonowskiego prawa grawitacji o skończonej prędkości została podjęta przez **Pierre’a Simona Laplace’a** pod koniec XVIII wieku. Pole grawitacyjne jest w tym modelu rodzajem promieniowania lub płynu, w którym rozchodzą się fale, podobnie jak fale na powierzchni wody. Dopasowując swoją teorię do parametrów Układu Słonecznego, Laplace otrzymał ogromną prędkość grawitacji, miliony razy większą od prędkości światła. Samo w sobie nie jest to jeszcze katastrofą; niestety, urządzony w ten sposób Układ Słoneczny jest niestabilny w dłuższej skali czasowej. Ostateczna teoria okazała się niekompatybilna z rzeczywistością.

Takie i podobne rozważania były częścią dynamicznego rozwoju pojęcia *pola*, czyli wypełniającego przestrzeń medium przekazującego oddziaływania, wymyślonego w celu eliminacji kluczowego problemu „działania na odległość”. Obiekty oddziałują z polem, reagując na jego potencjał ϕ (zmieniając swoją energię potencjalną), a siła działająca między obiektami jest funkcją tego potencjału. W przypadku newtonowskiej grawitacji siła jest gradientem potencjału, co można zapisać jako $F = -\nabla\phi$. Dziś wiemy, że pojęcie pola nie jest wymyślonym medium – możemy je nawet obserwować, np. w zachowaniu się opiłków żelaza w pobliżu magnesu. W przeszłości koncept pól był używany w różnych kontekstach, m.in. dziewiętnastowiecznej teorii hydrodynamiki (siłę wyporności można uważać za gradient „pola” ciśnienia). Pomysły te okazały się bardzo użyteczne – stały się podstawą elektromagnetyzmu **Jamesa Clerka Maxwella**. Traktując elektryczność i magnetyzm jako przejaw obecności pól, Maxwell wykazał, że są one ze sobą ściśle powiązane oraz że oddziaływanie elektromagnetyczne może propagować się jak fala o prędkości światła (to znaczy, istnieją rozwiązania równania falowego typu $\ddot{u} = c^2\nabla^2u$, gdzie dwie kropki oznaczają drugą pochodną czasową). Wniosek narzuca się sam: światło jest falą elektromagnetyczną. Udowodnił to Heinrich Hertz w pracach prowadzonych w latach 1886–1888.

Pomysł rozwinął w 1893 roku **Oliver Heaviside** w grawitacyjnym odpowiedniku równań Maxwella, który nazywa się obecnie *grawitomagnetyzmem*. W tych równaniach energia pola grawitacyjnego zastępuje pole elektryczne. Pole grawitomagnetyczne jest związane z ruchem mas, podobnie jak pole magnetyczne jest związane z ruchem ładunków. Tak zmodyfikowane równania dostarczają np. rozwiązań dla fal poruszających się ze skończoną prędkością. Praca Heaviside’a jest pierwszą „nowoczesną” publikacją dotyczącą fal grawitacyjnych. Heaviside zbadał, jak zmienia się przyciąganie poruszających się ciał, gdy pole grawitacyjne przekazuje oddziaływanie ze skończoną prędkością. Zmiany w polu powodują niewielkie zakłócenia w ruchu Ziemi i Słońca. Niewykrycie takich zaburzeń wyznacza ograniczenie na prędkość grawitacji, która według Heaviside’a może być nawet tak wielka jak prędkość światła.

Do końca XIX wieku podejmowano wiele (nieskutecznych) prób prostego połączenia mechaniki Newtona z elektrodynamiką Maxwella, wprowadzając

dotatkowe ulepszenia modeli stabilizujące ruch planet. Dzięki postępom technik astronomicznych próby te były konfrontowane z nowymi obserwacjami, niezwykle trudnymi do wytłumaczenia w ramach ówczesnych teorii. Chodzi oczywiście o pomiar precesji peryhelium orbity Merkurego, anomalii w ruchu planety stwierdzonej w 1859 roku przez **Urbaina Le Verriera**. Obserwacje Merkurego stały się ostatecznie jednym z klasycznych testów ogólnej teorii względności.

Publikacja szczególnej teorii względności Einsteina w 1905 roku łączy na stałe elektryczność i magnetyzm w jedno pole, w oparciu o dwie zasady: *zasadę względności* oraz *zasadę stałości prędkości światła*. W konsekwencji żadna informacja, również dotycząca grawitacji, nie może podróżować szybciej niż światło, co oczywiście stoi w sprzeczności z mechaniką Newtona. W tym samym czasie, niezależnie od Einsteina, **Henri Poincaré** w pracy *O dynamice elektronu* opisuje praktycznie to samo co szczególna teoria względności, ale bez wyróżnienia zasad względności i stałości prędkości światła. Poincaré opisuje poprawny sposób modyfikacji mechaniki Newtona poprzez zamianę transformacji czasu i przestrzeni Galileusza na transformację czasoprzestrzeni **Hendrika Lorentza**. Zakładając skończoną prędkość grawitacji, ze szczególną uwagą omawia znaczenie opóźnienia (retardacji) pomiędzy zmianą pola grawitacyjnego a skutkiem tej zmiany w innym miejscu, wprost nazywając ten efekt falami grawitacyjnymi (franc. *ondes gravifiques*). W istocie rzeczy opóźnienie jest kluczowym conceptualnym elementem potrzebnym do powstania fal.

W niezwykle pracowitych latach pomiędzy 1907 a 1915 rokiem wielu badaczy podejmowało próby stworzenia nowej teorii grawitacji, wychodząc od różnych, często sprzecznych i błędnych postulatów. Umożliwiało to wyciąganie wniosków z nieudanych prób i ewolucję w kierunku coraz lepszego opisu rzeczywistości. Jako że szczególna teoria względności opisuje ruch układów inercjalnych (w których ciała poruszają się ze stałą prędkością), grawitacja nie może być tak po prostu włączona do szczególnej teorii – potrzebne jest ulepszenie opisu o ruch przyspieszony w polu grawitacyjnym. W 1907 roku Einstein sformułował „najszcześniejszą myśl życia”, czyli *zasadę równoważności*. Głosi ona, że nie jest możliwe lokalne eksperymentalne odróżnienie braku grawitacji od sytuacji, gdy znajdujemy się w układzie spadającym swobodnie w polu grawitacyjnym. Oznacza to też, że swobodnie spadające ciało nie odczuwa działania żadnych sił.

Cztery lata później, w 1911 roku, Einstein wykazał, używając zasady równoważności, że fotony muszą zyskiwać energię, „spadając” w kierunku masy, i tracić energię, oddalając się od niej. Oddalające się fotony są grawitacyjnie „przesuwane ku czerwieni” (częstotliwość ν się zmniejsza, zatem energia $E = h\nu$ maleje), a zegary w różnych odległościach od masy tykają w różnym tempie. Oczywiście nie da się tego pogodzić z pozbawioną grawitacji szczególną teorią względności. Czy zatem prędkość światła zmienia się w polu grawitacyjnym, zależąc w odpowiedni sposób od skalarnego potencjału grawitacyjnego?

Brawurowy, z dzisiejszego punktu widzenia, pomysł skalarnej grawitacji ze zmienną prędkością światła stał się inspiracją dla **Maksa Abrahama**, który w 1912 roku zaproponował własną modyfikację szczególnej teorii względności (nie była ona relatywistyczna ani zgodna z zasadą równoważności, więc została skrytykowana przez Einsteina). Mimo że teoria ta jest błędna, jej ciekawym elementem jest analiza emisji fal. Fale w teorii Abrahama są podłużne – pole oscyluje wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali – a nie poprzeczne, jak fale elektromagnetyczne, gdzie drgania są prostopadłe do kierunku propagacji. Można przypuszczać, że jeśli masa przyspiesza, to w sposób analogiczny do fali elektromagnetycznej emitowałaby ona grawitacyjne promieniowanie dipolowe. Abraham stwierdził jednak, że prawo zachowania pędu zabrania przyspieszania masy bez równoczesnego przyspieszania drugiej masy w przeciwnym kierunku (lub innymi słowy, proces jest niemożliwy z powodu nieistnienia ujemnych mas). To poprawna konkluzja, która uniemożliwia istnienie grawitacyjnego promieniowania dipolowego. Konsekwentne podążanie za teorią doprowadziło Abrahama do wniosku, że nadzieje na wykrycie fal grawitacyjnych są nikłe.

Zasada względności: dowolny eksperyment w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia obserwatora (bez względu na to, jak szybko poruszają się względem innego obserwatora) daje zawsze ten sam wynik. Zasada stałości prędkości światła w próżni: dla każdego obserwatora mierzona wartość prędkości światła jest taka sama, niezależnie od jego własnej prędkości.

Transformacja współrzędnych, czasu i przestrzeni, z układu O do O' , dla obiektu poruszającego się wzdłuż osi x z prędkością v . Galileusz:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\t' &= \gamma(t - vx/c^2),\end{aligned}$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

W eksperymencie myślowym zwanym „windą Einsteina” opisuje się dwa przypadki: w pierwszym szczelnie zamknięta winda bez okien stoi nieruchomo na powierzchni Ziemi, w drugim porusza się z przyspieszeniem $1g$ w pustej przestrzeni kosmicznej. Obserwator wewnątrz windy nie będzie w stanie stwierdzić, w którym wariancie się znajduje. Zasada równoważności dotyczy też równości masy grawitacyjnej i masy bezwładnej: niezależnie od składu i wewnętrznej struktury wszystkie masy spadają w tym samym tempie w danym polu grawitacyjnym. Jest to bezpośrednie nawiązanie do zasady równoważności sformułowanej na początku XVII wieku przez Galileusza.

Skalar (pole skalarne) to wielkość całkowicie charakteryzowana przez liczbę w danej chwili czasu i punkcie przestrzeni. Elektrodynamika Maxwella jest teorią wektorową, ponieważ pola elektryczne i magnetyczne mają, oprócz wielkości, również kierunek i zwrot. Ogólna teoria względności jest natomiast teorią tensorową, z podstawowymi obiektami algebraicznymi opisującymi pole, będącymi uogólnieniem pojęcia wektora (np. tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ w czterowymiarowej czasoprzestrzeni można przedstawić jako symetryczną macierz 4×4).

Innym interesującym wkładem Maksa Abrahama w rozwój teorii jest odkrycie przed Karlem Schwarzschildem „horyzontu zdarzeń”, czyli krytycznego rozmiaru określającego czarną dziurę.

Do naukowego fermentu w tym okresie przyczynił się również **Gustav Mie**, znany z teorii rozpraszania światła na kulistych cząstkach. Jego teoria zachowuje stałą prędkość światła, a wraz z nią zasady szczególnej teorii względności, ale pod wieloma względami jest bardzo podobna do propozycji Abrahama, i również błędna, z powodu nieprzestrzegania zasady równoważności.

Podobnie jak Abraham, Mie przewiduje podłużne fale grawitacyjne, nie wydaje się jednak przejmować faktem, że grawitacyjne promieniowanie dipolowe jest zabronione. Píše za to proroczno o astronomii fal grawitacyjnych: „gdyby kiedykolwiek udowodniono istnienie fal grawitacyjnych, procesy odpowiedzialne za ich powstawanie byłyby prawdopodobnie znacznie ciekawsze niż same fale”.

Równanie pola Nordströma to $R = 24\pi T$, gdzie R to skalar Ricciego (ślad tensora Ricciego $R_{\mu\nu}$), a T to ślad tensora energii-napięć $T_{\mu\nu}$. Dla porównania, równanie Einsteina w ogólnej teorii względności to $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$.

W swojej korespondencji z Einsteinem Nordström nazywa metrykę Schwarzschilda rozwiązaniem Droste. Johannes Droste, student holenderskiego fizyka Hendrika Lorentza, odkrył je niezależnie od Schwarzschilda w tym samym czasie. Nordström jest niezależnym współodkrywcą, wraz z Hansem Reissnerem i Hermannem Wylem, metryki Reissnera–Nordströma, jednego z pierwszych rozwiązań równań ogólnej teorii względności. Rozwiązanie to opisuje sferycznie symetryczną, jak u Schwarzschilda, czasoprzestrzeń czarnej dziury, która dodatkowo ma ładunek elektryczny.

Praca doktorska Andrzeja Trautmana, opisująca fale grawitacyjne, była inspirowana współpracą z Jerzym Plebańskim. Promotor Trautmana, Leopold Infeld, był współpracownikiem Einsteina, i tak jak on nie wierzył w istnienie fal grawitacyjnych (jednocześnie wspierał badania swojego studenta!).

Żartobliwa odpowiedź Arthura Eddingtona na pytanie o prędkość fal grawitacyjnych w 1922 roku brzmiała: „fale grawitacyjne rozchodzą się z prędkością myśli”.

Współpracownikiem raczej niż krytykiem Einsteina był natomiast **Gunnar Nordström**, który w latach 1912–1913 stworzył dwie skalarne teorie grawitacji, zgodne z zasadami równoważności i stałości prędkości światła. W drugiej z nich po raz pierwszy pojawia się idea przyrównania geometrii czasoprzestrzeni do wpływającego na geometrię rozkładu materii-energii. Innymi słowy powstała (jeszcze niedoskonała i niekompletna) wersja równań, które obecnie nazwalibyśmy równaniami Einsteina. Teoria Nordströma jest na tyle podobna do ogólnej teorii względności Einsteina, że czasem jest używana w celach ilustracyjnych. Z tego, co wiadomo, Nordström nie badał rozwiązań falowych być może dlatego, że jego teoria okazała się niepoprawna – nie przewiduje ugięcia promieni świetlnych w pobliżu mas i błędnie przewiduje wartość precesji orbity Merkurego – jednak jego równanie pola przewiduje rozwiązanie dla poprzecznych fal grawitacyjnych, tak jak w ogólnej teorii względności.

Publikacja ogólnej teorii względności w 1916 roku nie zawiera wzmianki o falach grawitacyjnych. W liście do **Karla Schwarzschilda** Einstein pisze sceptycznie o możliwości ich istnienia, co nie przeszkadza mu w kilka miesięcy później opublikować artykułu na temat uproszczonych (z zachowaniem tylko pierwszego, liniowego rzędu przybliżenia) równań ogólnej teorii, które wtedy przyjmują formę równania falowego. Praca ta nie jest pozbawiona błędów. Einstein omawia promieniowanie monopolowe (zabronione z powodu prawa zachowania masy-energii, nieobecne również w elektromagnetyzmie) związane ze sferycznie symetrycznym ruchem masy. Opublikowana dwa lata później praca jest już poprawna (dzięki wymianie listów z Nordströmem) i zawiera prawidłowy wzór na promieniowanie grawitacyjne. Einstein nie spekuluje jednak, czy fale mogą zostać kiedykolwiek wykryte.

Przyczyną wcześniejszych oraz wielu późniejszych pomyłek w ogólnej teorii jest kwestia doboru odpowiedniego układu współrzędnych, co jak widać było problematyczne nawet dla jej twórców: w jednym układzie współrzędnych obecność fal jest oczywista, podczas gdy w innym układzie przestrzeni może wydawać się całkowicie niezaburzona i „płaska”. Einstein wrócił do tematu fal w 1936 roku z **Nathanem Rosenem**, analizując pełne (nieuproszczone) równania ogólnej teorii... I po raz drugi wpadł w pułapkę źle dobranego układu współrzędnych – stwierdzając, że teoria jednak nie przewiduje fal grawitacyjnych. Pozostał sceptyczny wobec fal grawitacyjnych aż do śmierci (w 1955 r.).

Dopiero pod koniec lat pięćdziesiątych XX wieku praca *O fizycznym znaczeniu tensora Riemanna* **Feliksa Piraniego**, opublikowana w 1957 roku w „Acta Physica Polonica”, a następnie prace **Hermann Bondiego**, **Ivora Robinsona** oraz **Andrzeja Trautmana** z Uniwersytetu Warszawskiego (Alma Mater *Delty*) ostatecznie udowadniają, że fale grawitacyjne nie są artefaktem wyboru układu współrzędnych, ale procesem przenoszącym energię, a zatem fizycznym zjawiskiem przewidywanym przez ogólną teorię względności.

Z punktu widzenia oddziaływania na materię fale grawitacyjne są zmiennymi w czasie zaburzeniami pływowymi (podobnie jak grawitacja Księżyca deformuje oceany na Ziemi), jednak z podstawowego punktu widzenia są zmianami geometrii czasoprzestrzeni. Efekt wywołany przez falę grawitacyjną docierającą do Ziemi jest niezwykle mały: najsilniejszy dotychczas zarejestrowany sygnał, GW150914, zmienił długość ramion interferometrów LIGO zaledwie o jedną dziesięciotysięczną średnicy jądra atomowego. Fale grawitacyjne rozchodzą się z tą samą prędkością co światło (zgodnie z oczekiwaniami teorii względności). Dowodzi tego niemal jednoczesna obserwacja sygnału fal grawitacyjnych GW170817 i fotonów z układu podwójnego gwiazd neutronowych, oddalonych o 130 miliardów lat świetlnych.

Jaśnie pan bąbelek

Jan SOŁEK*

* Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Ponieważ temperatura wrzenia wody maleje wraz z malejącym ciśnieniem, w wysokich górach woda wrze w temperaturze niższej niż na poziomie morza. Na Kasprowym Wierchu (1987 m n.p.m.) zagotujemy wodę w temperaturze ok. 93°C. W Himalajach, na szczycie Mount Everest (8848 m n.p.m.) wystarczy 71°C.

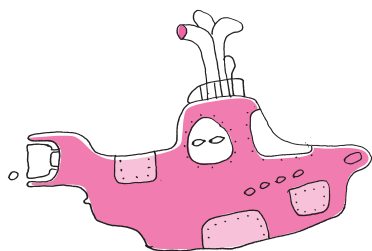
Każdy z nas widział na filmie, jak łódź podwodna sunie, przedzierając się przez masy wody. I zapewne widział też, że łódź pozostawia za sobą szlaczek bąbelków. A skąd właściwie biorą się te bąbelki? Czy mogą mieć one w sobie coś interesującego?

Okazuje się, że za powstawanie bąbelków wydobywających się spod płynącej łodzi odpowiada ten sam efekt, co za gotowanie się wody w górach w temperaturze niższej niż 100°C. Na ostrzu łopaty łodzi podwodnej powstaje wysokie ciśnienie rekompensowane niskim ciśnieniem w innym obszarze łopaty – do tego stopnia, że punkt wrzenia wody obniża się do wartości niższej niż temperatura wody otaczającej łódź. Powstaje więc bąbelek wypełniony parą wodną, który jest otoczony przez wodę w fazie ciekłej. Taki bąbelek zwą *kawitacyjnym*. Mimo że zwykle nie jest on zbyt duży, to bywa dość niebezpieczny dla urządzeń. Tworzenie się bąbelków kawitacyjnych jest efektem niepożądanym. Dlaczego? Mają one tendencję do bycia „kamikadze”. Jeśli bąbelek wyląduje w obszarze o zewnętrznym ciśnieniu większym niż ciśnienie gazu wewnętrznego, to gwałtownie się zapada i często wyrzuca część swoich „wnętrzości” w kierunku materiału, obok którego się znajdował. Wystrzelone wnętrzości uderzają w powierzchnię materiału, powodując mikrouszkodzenia. To zjawisko, zwane *kawitacją*, było wielce niepożądane w gospodarce oraz w zastosowaniach militarnych, ponieważ niszczyło śruby. Co więcej, podczas zapadania się takiego bąbelka powstaje dźwięk, więc łodzie podwodne, korzystające ze śrub generujących dużą kawitację, były łatwe do wykrycia przez sonar.

Na szczęście bąbelki nie tylko szkodzą. Powiedzmy, że w jakiś sposób wytworzymy bąbelek w laboratorium i będziemy go utrzymywali przy „życiu”. Czy odkryjemy w nim coś ciekawego? Odpowiedź nie jest oczywista. Cofnijmy się więc w czasie o 100 lat do deszczowej Anglii. W 1916 roku w celu zwalczania efektu kawitacji wojsko skontaktowało się z Lordem Rayleighem z prośbą, by pomógł zrozumieć to zjawisko. W efekcie Rayleigh sformułował równanie różniczkowe, które opisuje zmianę promienia bąbelka w zależności od czasu. Same równania są dosyć ciekawe i prawie na pewno nie dają się rozwiązać analitycznie. Pozwalają jednak zrozumieć relację między ciśnieniem a promieniem bąbelka. Lord Rayleigh dał więc początek ścisłemu podejściu do tego problemu. Wkrótce zorientowano się, że bąbelki mogą przyspieszać reakcje chemiczne. Zaczęto więc eksperymentować z nimi na różne sposoby.

Okolo 17 lat po wyprowadzeniu równania przez Lorda Rayleigha dwaj panowie, Neda Marinesco i Jean-Jacques Trillat, wykonywali (oczywiście znów na zlecenie wojska) eksperymenty z użyciem ultradźwięków, wody oraz kliszy fotograficznej. Jak się okazało w międzyczasie, ultradźwięki mogą wytworzyć takie same bąbelki jak w przypadku ostrza łopaty, a nawet lepsze! Te bąbelki mogą żyć dłużej, ponieważ są zamknięte niejako w zadanym polu ciśnien. Podczas takiego eksperymentowania, całkowicie przypadkiem, Marinesco i Trillat odkryli, że na kliszy fotograficznej używanej w doświadczeniu powstały małe zaciemnienia. Skądś musiało więc dochodzić światło. Na początku wydało im się to bardzo dziwne, nie wiedzieli, co jest źródłem światła. Jednakże po czasie stało się jasne, że światło wydobywa się z bąbelka. Marinesco i Trillat zauważyli bardzo egzotyczny proces, który teraz zwiemy *sonoluminescencją*. Świecenie pojawia się w chwili zapadnięcia się bąbelka. Jak dochodzi do takiego świecenia? To jest bardzo dobre pytanie, na które nie mamy jak dotąd dobrej odpowiedzi. Do dziś powstają teorie (niektóre wydają się nawet trochę absurdalne) opisujące jakiś aspekt zjawiska, ale niestety najczęściej nie opisują go w pełni i nie do końca zgadzają się z niektórymi doświadczeniami.

Pozwolę sobie teraz przywołać parę moich ulubionych teorii. Jedna z nich przewidywała, że bardzo mały obszar jądra bąbelka może się ogrzać nawet do 10⁵ kelwinów i promieniować jak ciało doskonale czarne. Inna mówiła o tym, że za świecenie jest odpowiedzialny efekt Casimira (zjawisko kwantowe). Jeszcze



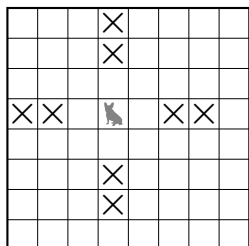


inna, w przeciwieństwie do tej pierwszej, że środek bąbelka schładza się do 10 kelwinów, a potem nagle podgrzewa do 600 K. Jednym słowem, co fizyk, to teoria. Każda z tych teorii tłumaczyła jakiś efekt występujący w tym świeceniu, jednak każda była daleka od pełnej zgody z doświadczeniami. Pomimo to wydaje się, że w ostatnich latach dokonał się pewien postęp i aktualnie jesteśmy na dobrej drodze do stworzenia teorii sonoluminescencji. Wiele wniosków spektroskopowe badania światła, dzięki którym okazało się, że pojęcie temperatury w powszechnym tego słowa znaczeniu traci sens w odniesieniu do bąbelka kawitacyjnego. Przypomnijmy sobie, co to znaczy, że obiekt ma jakąś temperaturę. Oznacza to, że molekuly mają pewien rozkład energii (związany z ruchem postępowym), który jest najczęściej rozkładem Boltzmanna. W wyniku ostatnich doświadczeń ustalono, że wewnątrz bąbelka powstaje egzotyczna plazma, gdzie rozkład energii jest wysoce nieoczywisty. Skoro jest plazma, to muszą też być wybite elektrony. Jak jednak dochodzi do wybicia elektronów z atomów? Przeprowadzone obliczenia pokazały jednoznacznie, że w środku bąbelka powstaje tak wysokie ciśnienie, że zachodzi pewien efekt kwantowy. Odpowiada on za obniżenie energii jonizacji elektronów. Podobny efekt występuje w gwiazdach. W tym kontekście można powiedzieć, że naukowcy bez dużej trudności mogą tworzyć gwiazdy w probówce.

Chociaż jesteśmy na dobrej drodze do sformułowania teorii sonoluminescencji, to nadal nie znamy pełnego modelu teoretycznego, który porządkowałby ten bałagan, i trudno powiedzieć, co się zmieni w tej kwestii w najbliższym czasie. Wydaje się dość nieprawdopodobne i jednocześnie fascynujące, że tak niepozorny bąbelek, który nietrudno stworzyć (choćby kręcąc śrubą statku podwodnego), jest tak skomplikowanym zjawiskiem, że do dzisiaj budzi wiele kontrowersji. Te wielkie kontrowersje dotyczą małego bąbelka (często mierzącego kilka mikrometrów), którego wielkość objawia się w jego złożoności.



Zadania



Rys. 1

Przygotował Dominik BUREK

M 1660. Dana jest liczba całkowita $k > 1$. Suma pewnego dzielnika liczby k oraz dzielnika liczby $k - 1$ jest równa ℓ , przy czym $\ell > k$. Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb $\ell - 1$, $\ell + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie na str. 24

M 1661. Na polach dużej szachownicy 8×8 umieszczamy pieski. Dwa pieski szczekają na siebie, jeśli znajdują się w tym samym wierszu lub kolumnie w odległości dwóch lub trzech pól (rys. 1). Ile najwięcej piesków można ustawić na szachownicy tak, aby żaden nie szczekał?

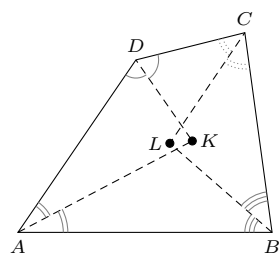
Rozwiązanie na str. 14

M 1662. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się w punkcie K , natomiast dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C przecinają się w punkcie L (rys. 2) Udowodnij, że

$$2KL \geq |AB + CD - BC - DA|.$$

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER



Rys. 2

F 1015. W poziomej rurze znajduje się woda pod ciśnieniem $p = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ (4 atmosfery). Na jaką wysokość wystrzeli strumień wody, gdy w górnej ścianie rury powstanie mały otwór? Przyjmij, że gęstość wody wynosi $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie na str. 18

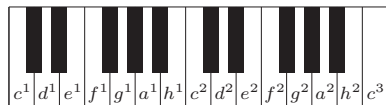
F 1016. Oszacuj, jak szybko idziemy podczas spaceru, gdy poruszamy się tak, żeby zużywać jak najmniej energii. Przyjmij, że podczas spaceru długość kroku wynosi $s \approx 70 \text{ cm}$, a długość nogi dorosłego człowieka to $l \approx 90 \text{ cm}$. Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie na str. 13

Matematyczny kącik muzyczny III: Błądząc po przestrzeni tonacji

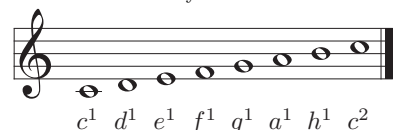
Konstanty KOSTRZEWSKI*

* Student, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski



Ściągawka pianistyczna

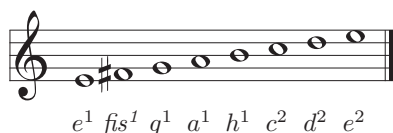
Poniżej zapis gamy *C*-dur na pięciolini z kluczem wiolinowym



Ogólnie *gama durowa* to gama, w której odległości między kolejnymi dźwiękami (na klawiaturze, wliczając czarne klawisze) to (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1). Dla gam durowych różnych od *C*-dur potrzebujemy podwyższyć (symbol \sharp , końcówka *-is*) lub obniżyć (symbol \flat , końcówka *-es*) niektóre dźwięki, co odpowiada następnemu/poprzedniemu klawiszowi (być może czarnemu) na klawiaturze. Dla przykładu poniżej zapis nutowy gamy *D*-dur.



Gama molowa to gama durowa zagrana od szóstego dźwięku. Brzmi „smutniej” niż gama durowa. Poniżej zapis nutowy gamy *e*-moll (której „durowym odpowiednikiem” jest gama *G*-dur).



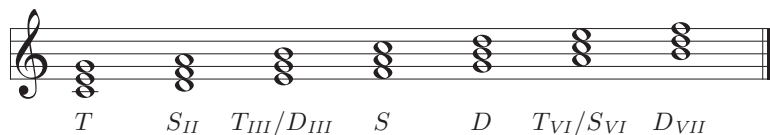
† Kadencja w szerokim pojęciu nie musi kończyć się toniką, ale na potrzeby niniejszego artykułu wystarczy nam takie założenie.

W systemie dur-moll, którym najczęściej się posługujemy, utwory mają swoje określone tonacje, bardzo często wzmiankowane w tytułach – przykładami mogą być: *I symfonia C-dur* Ludwiga van Beethovena, *Koncert fortepianowy d-moll* Wolfganga Amadeusza Mozarta i wiele, wiele innych. Poruszanie się w obrębie pewnej tonacji oznacza z grubsza, że posługujemy się dźwiękami z tej tonacji. Na dłuższą metę jest to jednak... nudne. Toteż dla urozmaicenia muzyki zaczęto się zastanawiać, jak przeskakiwać z jednej tonacji do drugiej. Wprowadza to dodatkowe napięcie, zmienia brzmienie i charakter muzyki w danym momencie. I tak opracowano trzy podstawowe sposoby zmiany tonacji. Nim jednak omówimy ich mechanikę, będziemy potrzebowali pojęcia *funkcji harmonicznej*.

Nie, nie jest to funkcja o ciągłych drugich pochodnych cząstkowych i zerowym laplasjanie, do czego pewnie Czytelnicy *Delty* są bardziej przyzwyczajeni.

W muzyce tak nazywamy akordy, które w konkretnej tonacji pełnią określoną funkcję. Najlepiej zobaczyć to na przykładzie.

Rozważmy gamę *C*-dur o dźwiękach kolejno *c, d, e, f, g, a, h, c* (pigulka informacji o gamach na marginesie). Dźwięki te są kolejno *I, II, ..., VIII* stopniami gamy. Od każdego z tych dźwięków budujemy trójdzźwięki złożone z dźwięków gamy – przykładowo od drugiego stopnia, czyli dźwięku *d*, budujemy trójdzźwięk *d, f, a*, natomiast od szóstego stopnia – *a* – budujemy trójdzźwięk *a, c, e*. Zaznaczymy od razu, bez wchodzenia w szczegóły, że w ramach trójdzźwięku możemy wykorzystywać reprezentantów danego dźwięku z różnych oktaw, na przykład e^1, g^1, c^2 będzie dla nas dobrym reprezentantem trójdzźwięku *c, e, g*.



Funkcję zbudowaną na pierwszym stopniu nazywamy *toniką* (*T*), na czwartym – *subdominantą* (*S*), a na piątym – *dominantą* (*D*). Są to główne funkcje harmoniczne. Pozostałe funkcje (poboczne) nazywają się podobnie do tych, z którymi mają najwięcej dźwięków wspólnych – i tak funkcja na *II* stopniu jest *subdominantą II stopnia* (*SII*), bo ma z subdominantą dwa dźwięki wspólne. Natomiast funkcja *III* stopnia może być zarówno *dominantą III stopnia*, jak i *toniką III stopnia* (odpowiednio *DIII* i *TIII*), gdyż ma po dwa dźwięki wspólne i z toniką, i z dominantą – zależy to od kontekstu muzycznego.

Możemy teraz zauważyć, że akordy mogą pełnić różne funkcje w zależności od tonacji, w której je rozważamy. Akord *C*-dur pełni funkcję toniki w tonacji *C*-dur, ale i funkcję dominanty w tonacji *F*-dur czy toniki *VI* stopnia w tonacji *e*-moll. Tę właściwość wykorzystuje się w pierwszym typie modulacji, modulacji diatonicznej.

Modulacja diatoniczna

Zwana jest również *modulacją akordu wspólnego*. Chcąc przejść z tonacji pierwszej (*X*) do drugiej (*Y*), należy znaleźć akord pełniący jakąś funkcję w obu tych tonacjach. Schemat modulacji jest prosty – jesteśmy w *X*, gramy akord wspólny, który jest wyjściowy z *X* i jednocześnie wejściowy w *Y*, a następnie utrwalamy tonację *Y* tzw. *kadencją*[†], czyli ciągiem funkcji prowadzących do toniki *Y*.

Zobaczymy to na poniższym przykładzie: Naszym celem jest przejście z tonacji *C*-dur do tonacji *B*-dur (*B = Hes*, i jest to mały, nazewniczy wyjątek), której funkcje przedstawione są poniżej:



Widzimy, że akordem wspólnym jest m.in. *F*-dur, który w tonacjach tych pełni funkcje, odpowiednio, subdominandy i dominandy. Przykładowa realizacja tej modulacji wygląda następująco (w indeksie górnym umieszczono tonację odpowiedniej funkcji harmonicznego):



c d e f g a h c¹

Klucz basowy daje inną (przesuniętą) interpretację nut na pięciolinii w stosunku do klucza wiolinowego. Powyżej zapis gamy *C*-dur na pięciolinii z kluczem basowym.



$T^C \quad S^C/D^B \quad T^B_{VI} \quad S^B \quad T^B$

W powyższej modulacji ostatnie cztery akordy stanowią kadencję w *B*-dur. W praktyce stosuje się również pewne modyfikacje podstawowych funkcji – a i to nie wystarcza do przeprowadzenia jednorazowej modulacji diatonicznej w każdym przypadku – nie każde dwie tonacje mają akord wspólny. W takiej sytuacji należy po prostu wykonać ich kilka z rzędu.

Modulacja chromatyczna

Aby zrozumieć mechanizm tej modulacji, potrzebne nam będzie pojęcie *kroku chromatycznego*. Krokiem takim nazwiemy sekwencję dwóch dźwięków w odległości połowy tonu (czyt. sąsiednie klawisze na klawiaturze fortepianu), których nazwy mają ten sam „rdzeń”, ale różnią się tym, że mają jedno więcej *-is* lub *-es*. Takimi krokami będą na przykład *c-cis*, *es-e*, *fisis-fis*, ale już nie *c-des* (gdyż ich nazwy pochodzą od różnych dźwięków *c* i *d*).



Przykładowe kroki chromatyczne

Tak jak w modulacji diatonicznej akord wyjściowy z *X* był jednocześnie wejściowym do *Y*, tak teraz miejscem modulacji są dwa sąsiednie akordy w ciągu modulacyjnym, pomiędzy którymi pojawia się co najmniej jeden krok chromatyczny. Dla przykładu, można tak ze sobą zestawić akordy *c – e – g* i *e – gis – h*, wtedy krok chromatyczny pojawia się między dźwiękami *g* i *gis*. Poniżej przedstawiona jest modulacja chromatyczna z *C*-dur do *H*-dur z wykorzystaniem właśnie tego połączenia (pierwsze dwa akordy są miejscem, gdzie zachodzi ta modulacja – krok chromatyczny zaznaczony jest łukiem).



Gama *H*-dur



$T^C \quad S^H \quad \text{kadencja w } H\text{-dur}$

Modulacja enharmoniczna

Ze względu na to, że ten typ modulacji korzysta z bardzo rozbudowanych i zmodyfikowanych funkcji harmonicznego, opowiemy tylko krótko o jej charakterystycznej własności, a szczegóły pominiemy.

Istotnie skorzystamy tu z faktu, że na klawiaturze fortepianu pewne dźwięki są ze sobą utożsamione, np. *cis* i *des*. W modulacji enharmonicznej bowiem należy znaleźć (raczej skomplikowany) akord, który na klawiaturze fortepianu jest wspólny dla obu tonacji, lecz co najmniej jeden z dźwięków tego akordu nazywa się inaczej w pierwszej, a inaczej w drugiej tonacji. I tak na przykład akordy na marginesie obok są tym samym na klawiaturze fortepianu, lecz różnią się w nazewnictwie najwyższego dźwięku (*as* i *gis*). Jak w poprzednich typach modulacji, po zagranie akordu „pianistycznie wspólnego” należy utrwalić tonację docelową. Zaletą tego typu modulacji jest to, że można szybko przejść pomiędzy każdymi dwiema tonacjami. Ponadto stwarza ona silne napięcie harmonicznego, toteż jest znaczącym elementem zaskoczenia.



Modulacje możemy spotkać w ogromnej liczbie utworów. Służą między innymi do tego, by pewną myśl muzyczną przedstawić w „innym świetle” czy charakterze lub też wprowadzić zupełnie inną myśl na nowym tle.

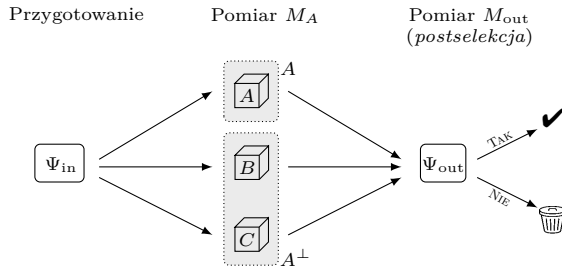
Zgaduj zgadula, gdzie jest kwantowa kula?

*Instytut Fizyki Jądrowej im. Henryka Niewodniczańskiego Polskiej Akademii Nauk

Ewa BORSUK*, Paweł BŁASIAK*

Co pierwsze przychodzi nam do głowy, gdy słyszymy hasło „paradoks w fizyce”? Może słynny paradoks kota Schrödingera? A może paradoks bliźniąt? Ktoś może przypomni sobie paradoks wiedzy wlatującej na miotle do stodoły z prędkością bliską prędkości światła, ktoś inny opowie o wyścigu żółwia

z Achillesem. Bez względu na to, który paradoks jest naszym ulubionym, mają one wspólne cechy: są czymś zaskakującym, niespodziewanym, pozwalają lepiej poznać otaczający nas świat lub chociaż zadziwić się nim przez chwilę. Jednym z mniej znanych, choć bardzo ciekawych paradoksów jest paradoks trzech pudełek, który, Drogi Czytelniku, możesz poznać, jeśli tylko zdecydujesz się na dalszą lekturę. Paradoks wyścigu żółwia z Achillesem ilustruje współczesne zrozumienie pojęcia granicy. Paradoksy bliźniaków i wiedzy latającej na miotle są związane ze szczególną teorią względności, dotyczą dylatacji czasu i kontrakcji przestrzeni. Słynny jednocześnie „żywy i martwy” kot Schrödingera to paradoks z zakresu fizyki kwantowej. I tą właśnie zajmiemy się dzisiaj, ponieważ do niej należy również paradoks trzech pudełek [1].



Rys. 1. Schemat eksperymentu z jedną cząstką i trzema pudełkami (z pośrednim pomiarem na pudełku A). Na układzie przygotowanym w stanie $|\Psi_{in}\rangle$ wykonujemy pomiar M_A , zadając pytanie, czy cząstka jest w pudełku A, czy jej tam nie ma (czyli A lub A^\perp). Następnie dokonujemy postselekcji ze względu na drugi pomiar, M_{out} , sprawdzając, czy układ jest w stanie $|\Psi_{out}\rangle$

Stany $|A\rangle$, $|B\rangle$ i $|C\rangle$ to wektory rozpinające trójwymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} . Wektory te są parami ortogonalne i unormowane (ich długości są równe jeden), stanowią więc bazę ortogonalną (a nawet ortonormalną). W tej bazie współrzędne wektorów występujących w artykule są następujące:

$$|\Psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$|\Psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$|\Psi^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$|A\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |C\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

obliczany jest według wzoru:

$$\langle u|v\rangle = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \overline{u_3}v_3,$$

gdzie kreska oznacza sprzężenie zespolone. Jeżeli $\langle u|v\rangle = 0$, to mówimy, że wektory $|u\rangle$ i $|v\rangle$ są ortogonalne (prostopadłe). Długość wektora $|u\rangle$ jest zdefiniowana jako

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2}.$$

Stan układu to dowolny wektor o długości równej jeden.

Rzut na dwuwymiarową podprzestrzeń prostopadłą do $|A\rangle$ rozpiętą na ortogonalnych wektorach $|B\rangle$ i $|C\rangle$ jest zdefiniowany jako:

$$\mathbf{P} = |B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C|,$$

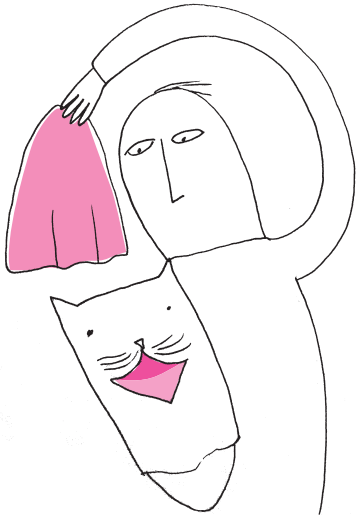
a jego działanie na dowolny wektor $|w\rangle$ jest dane wzorem:

$$\mathbf{P}|w\rangle = |B\rangle\langle B|w\rangle + |C\rangle\langle C|w\rangle.$$

Dlatego $\mathbf{P}|\Psi_{in}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\Psi^*\rangle$.

Paradoks trzech pudełek sprowadza się do prostego pytania: *Gdzie jest cząstka?* Wyobraźmy sobie następujący eksperyment z pojedynczą cząstką. Zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej możemy przygotować układ w superpozycji trzech stanów $|\Psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$, gdzie stany bazowe $|A\rangle$, $|B\rangle$ i $|C\rangle$ oznaczają cząstkę znajdującą się w jednym z pudełek, odpowiednio, A, B lub C. Jest to jeden z tych tajemniczych stanów, typowych dla mechaniki kwantowej, które wymykają się klasycznemu opisowi. W praktyce taką cząstką może być np. foton lub elektron, a pudełka odpowiadają ścieżkom w układzie optycznym, po których może się on poruszać. Na tak przygotowanym układzie wykonujemy następnie pomiar M_{out} , zadając pytanie: czy układ znajduje się w stanie $|\Psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$? Jeśli odpowiedź brzmi TAK, to uważamy, że eksperyment się powiódł. Odpowiedź NIE oznacza eksperyment nieudany, którego wynik odrzucamy. W żargonie eksperymentalnym jest to tak zwana *postselekcja*, czyli wybranie interesujących nas przypadków zgodnie z jakimś kryterium (w naszym przykładzie jest to pozytywny wynik pomiaru M_{out}). Nie ma tu nic niepokojącego, dopóki nie zaczniemy się zastanawiać, gdzie była cząstka w trakcie eksperymentu. Sprawdźmy zatem, zadając pytanie: *Czy cząstka jest w pudełku A?* Czyli zrobmy po drodze pomiar M_A polegający na zaglądnięciu do tegoż pudełka, udzielając jednej z dwóch możliwych odpowiedzi: *cząstka znajduje się w pudełku A* lub *cząstka jest gdzieś indziej* (oznaczymy tę odpowiedź A^\perp). Rysunek 1 ilustruje nasz eksperyment. Mamy trzy pudełka, trzy opcje: A, B, C i jedną cząstkę. Jakie zatem może być prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w jednym z tych pudełek, pod warunkiem powodzenia eksperymentu? Odpowiedź wydaje się oczywista: $\frac{1}{3}$. Tymczasem fizyka kwantowa mówi, że jest to błędna odpowiedź! W tak przeprowadzonym eksperymencie znalezienie cząstki w pudełku A wynosi 100%! Wydaje się zatem, że jeśli zadamy analogiczne pytanie o pudełko B zamiast o pudełko A (tzn. wykonamy pomiar M_B zamiast M_A), to powinniśmy tam cząstki nie znaleźć. Tym większe zaskoczenie, bo wtedy również cząstka znajduje się w pudełku B z prawdopodobieństwem 100%! Jak to jest możliwe? Czyżby cząstka „wiedziała”, gdzie robimy pomiar, i przeskakiwała do badanego pudełka? A może cząstka znajduje się w dwóch miejscach na raz?

Dla pewności przekonajmy się, jak mechanika kwantowa opisuje ten paradoks. W eksperymencie mamy trzy następujące po sobie etapy: przygotowanie układu w stanie $|\Psi_{in}\rangle$, pomiar M_A (lub odpowiednio M_B) oraz pomiar M_{out} z postselekcją ze względu na stan $|\Psi_{out}\rangle$ (patrz rys. 1). Pytanie, które zadajemy, dotyczy prawdopodobieństwa $P(A|\Psi_{out})$ znalezienia cząstki w pudełku A pod warunkiem, że postselekcja się udała. Zauważmy, że interesujące nas zdarzenie



jest wcześniejsze niż warunek, pod którym zadajemy pytanie. Używając twierdzenia Bayesa, możemy odwrócić kolejność warunkowania, tak aby odzwierciedlało ono chronologię zdarzeń w eksperymencie, tzn.:

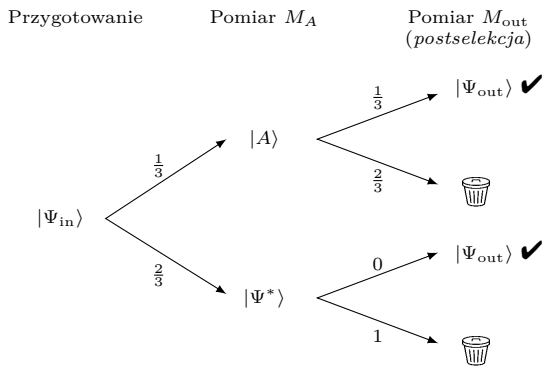
$$(1) \quad P(A | \Psi_{\text{out}}) = \frac{P(\Psi_{\text{out}} | A) \cdot P(A)}{P(\Psi_{\text{out}})},$$

gdzie mianownik możemy rozpisac za pomocą twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym w następujący sposób:

$$(2) \quad P(\Psi_{\text{out}}) = P(\Psi_{\text{out}} | A) \cdot P(A) + P(\Psi_{\text{out}} | A^+) \cdot P(A^+),$$

ponieważ dwa możliwe wyniki pomiaru M_A , tzn. A oraz A^+ , wzajemnie się wykluczają.

Mechanika kwantowa daje odpowiedź, jak obliczać poszczególne prawdopodobieństwa. Wszystko, czego potrzebujemy, to prosta wersja tzw. reguły Borna oraz postulat „kolapsu” funkcji falowej. Reguła Borna określa prawdopodobieństwo otrzymania wyniku odpowiadającego wektorowi $|\psi\rangle$, pod warunkiem, że stan układu opisany jest przez wektor stanu $|\phi\rangle$ następującym wzorem: $P_\phi(\psi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Natomiast postulat kolapsu funkcji falowej mówi, że po takim pomiarze stan układu opisany jest wektorem zrzuwanym na podprzestrzeń odpowiadającą otrzymanemu wynikowi. (Po zrzurowaniu wektor należy jeszcze unormować, czyli pomnożyć przez tak dobraną stałą, aby jego długość była równa 1.) Prześledźmy zatem po kolei, jak ewoluuje układ przygotowany w stanie $|\Psi_{\text{in}}\rangle$. Rysunek 2 ilustruje kolejne etapy. Pierwszy



Rys. 2. Diagram ilustrujący możliwe scenariusze w eksperymencie z trzema pudełkami (w przypadku pomiaru na pudełku A). Nad strzałkami podane są odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe. Zauważmy, że po pomiarze M_A wynikiem A oraz A^+ odpowiadają kwantowe stany, odpowiednio, $|A\rangle$ oraz $|\Psi^*\rangle$

miar, M_A , daje odpowiedź *Cząstka jest w pudełku A* z prawdopodobieństwem $P(A) = P_{\Psi_{\text{in}}}(A) = |\langle A | \Psi_{\text{in}} \rangle|^2 = \frac{1}{3}$, przekształcając funkcję falową do stanu $|A\rangle$, tzn. $|\Psi_{\text{in}}\rangle \xrightarrow{A} |A\rangle$. Przeciwniej odpowiedzi, tzn. *Cząstki nie ma w pudełku A* , spodziewamy się z prawdopodobieństwem $P(A^+) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$, która oznacza kolaps $|\Psi_{\text{in}}\rangle \xrightarrow{A^+} |\Psi^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle)$ (czyli rzut wektora $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ na podprzestrzeń ortogonalną do $|A\rangle$, rozpiętą na wektorach $|B\rangle$ i $|C\rangle$). Następnie wykonywany jest drugi pomiar, M_{out} , którego wynik zależeć będzie od stanu układu po wcześniejszym pomiarze M_A . Jeśli jest to stan $|A\rangle$, pozytywną odpowiedź na pytanie *Czy układ jest w stanie $|\Psi_{\text{out}}\rangle$* (czyli postselekcja się udała) dostaniemy z prawdopodobieństwem $P(\Psi_{\text{out}} | A) = P_A(\Psi_{\text{out}}) = |\langle \Psi_{\text{out}} | A \rangle|^2 = \frac{1}{3}$. Natomiast jeśli jest to stan $|\Psi^*\rangle$, odpowiedź jest zawsze negatywna (czyli postselekcja nigdy się nie uda), ponieważ $P(\Psi_{\text{out}} | A^+) = P_{\Psi^*}(\Psi_{\text{out}}) = |\langle \Psi_{\text{out}} | \Psi^* \rangle|^2 = 0$ (stany $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ oraz $|\Psi^*\rangle$ są ortogonalne).

Teraz wystarczy wszystko podstawić do równań (1) i (2), aby otrzymać $P(A | \Psi_{\text{out}}) = 1!$ Dla kompletności zauważmy również, że z równania (2) możemy odczytać, jak często ten eksperyment się udaje, tzn. postselekcja w pomiarze M_{out} daje pozytywny wynik z prawdopodobieństwem $P(\Psi_{\text{out}}) = \frac{1}{9}$ (jeden przypadek na dziewięć to może mało, ale wystarcza). Na rysunku 2 rozrysowaliśmy wszystkie możliwości w tym eksperymencie. Czytelnik szybko się przekona, że wynik dla eksperymentu M_B będzie analogiczny $P(B | \Psi_{\text{out}}) = 1!$ A więc faktycznie, matematyka mechaniki kwantowej daje takie „dziwne” przewidywania. Co więcej, takie eksperymenty wykonuje się obecnie w laboratoriach, potwierdzając, że ten opis jest poprawny [2].

Literatura

- [1] Y. Aharonov and L. Vaidman. Complete description of a quantum system at a given time. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:2315–2328, 1991.
- [2] R. E. George, L. M. Robledo, O. J. E. Maroney, M. S. Blok, H. Bernien, M. L. Markham, D. J. Twitchen, J. J. L. Morton, G. A. D. D. Briggs, and R. Hanson. Opening up three quantum boxes causes classically undetectable wavefunction collapse. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 110:3777–3781, 2013.

Oto cała sztuczka. Jeśli sprawdzamy pudełko A , cząstka jest w pudełku A , jeśli pudełko B , cząstka jest w pudełku B . Jak to możliwe? Czyżby postselekcja „oddziaływała” na pomiar do tyłu w czasie? Czy coś, co zdarzy się później (w naszym przypadku postselekcja), może mieć wpływ na to, co zdarzy się wcześniej (pomiar pudełka A lub B)? A może cząstka jest zdelokalizowana i tak „naprawdę” jest i tu, i tam (lokalizując się, gdzie akurat trzeba, aby potwierdzić nasze rachunki)? A może nie należy odrzucać wszystkich przypadków, w których postselekcja się nie udała, i nie przejmować się paradoksem trzech pudełek sformułowanym w powyższy sposób? Tych „a może” jest wiele i każde z nich ma swoich zwolenników. Do której grupy Ty się zaliczasz, Drogi Czytelniku?

Ustawka 2020

Zob. [ustawka2020.pl](#)

W najgorętszym okresie sesji egzaminacyjnej – w połowie czerwca – piętnaście drużyn z różnych polskich uczelni walczyło w hackathonie zorganizowanym przez IBM Polska przy współpracy Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW. Cel był pozornie bardzo prosty – przez dziesięć kolejnych dni przewidzieć trzy liczby: liczbę zachorowań, wyzdrowień i zgonów na Covid-19, podawane nazajutrz przez Ministerstwo Zdrowia. O miejscu drużyny w końcowym rankingu decydowała suma kwadratów błędów wszystkich prognoz.

Zwycięzcy zgodzili się podzielić z Czytelnikami *Delty* tajemnicami swoich sukcesów. Poniżej zamieszczamy ich bezpośrednie krótkie relacje, spisane podczas wakacji.

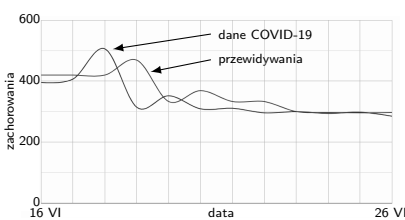
Starsza siostra rozsądku, intuicja

I miejsce

Tomasz BAJKACZ*, Kamil CHOIŃSKI*, Fabian JEZIOREK*

* Wydział Automatyki Elektroniki i Informatyki, Politechnika Śląska

Prognozując wartości na następny dzień, uwzględnialiśmy takie parametry, jak: dane z ostatnich dwóch tygodni, dzień tygodnia (bo np. w weekendy wykonywano mniej testów), bieżące wiadomości, dane meteorologiczne. Codziennie wieczorem zbieraliśmy się i wspólnie analizowaliśmy te dane, i na tej podstawie przygotowaliśmy, polegając na naszej intuicji, ostateczne typy na następny dzień. Dominujący wpływ na nasze prognozy miały wartości z bieżącego dnia, co możemy zauważyć na wykresie obok.



Początkowo mieliśmy plan, aby stworzyć algorytm dostosowujący krzywą do wykresu, jednak byliśmy wtedy w trakcie sesji i uznaliśmy, że równie dobrze możemy dokonać naszych przewidywań bez wykorzystania modelu. Stwierdziliśmy, że chaotyczna zmienność liczby zachorowań i wyzdrowień uniemożliwia stworzenie działającego modelu. Uznaliśmy też, że nie warto przykładać większej wagi do prognozy liczby zgonów, ponieważ nie miała ona znaczącego wpływu na ostateczny wynik.

Czynnikiem, który istotnie wpłynął na nasze przewidywania, była wiadomość o wyzdrowieniach górników – zwiększyliśmy wtedy sporo wartość prognozy wyzdrowień, co okazało się celnym strzałem. Od tego momentu z pomyślnym skutkiem typowaliśmy większe liczby wyzdrowień od zachorowań.

Szlifując aż do ostatniego dnia

II miejsce

Aleksandra MUSIAŁ**, Michał MAŚLANKA**, Bartosz MAZIARKA**

** Wydział Elektrotechniki i Informatyki, Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Nasze podejście do tematu było stosunkowo luźne – bardzo podstawowe przewidywanie szeregów czasowych metodą podwójnego wygładzania wykładniczego (model Holta–Wintersa), dostępną w pakiecie R:

$$s_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}),$$

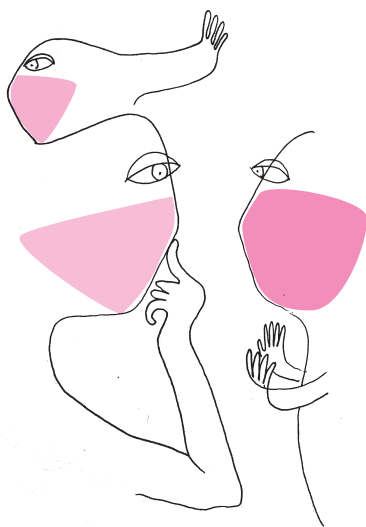
$$b_t = \beta(s_t - s_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1},$$

gdzie y_t jest wartością zmiennej prognozowanej w chwili t , a b_t – wygładzonym przyrostem trendu. Współczynniki α i β znajduje się eksperymentalnie. Mając te wartości, prognozę na chwilę $t + m$ oblicza się ze wzoru

$$\hat{y}_{t+m} = s_t + mb_t.$$

Szeregi nie miały wyraźnego trendu (był on bardzo łagodnie wzrostowy), więc współczynnik β grał małą rolę w prognozach; współczynnik α był dużo większy. Z szeregów usunęliśmy dane sprzed umownej daty stabilizacji sytuacji, czyli sprzed 2 kwietnia. Przed tą datą wirus rozwijał się i mogłoby to wpłynąć na prognozy.

Mając wstępną prognozę z modelu Holta–Wintersa, patrzyliśmy na sytuację również z perspektywy zdrowego rozsądku, biorąc pod uwagę takie czynniki, jak:



liczbę hospitalizowanych osób, liczbę osób pod respiratorami, dzień tygodnia (np. spadki wyzdrowień w niedzielę), a także czynniki środowiskowe, jak wyjazdy na wakacje. Korekty zwykle się zdarzały, ale najczęściej nie większe niż 10% dla zachorowań i wyzdrowień i 20% dla śmiertelności.

Na początku hackathonu liczba zachorowań była stabilna, dlatego też co do liczby zachorowań można było śmiało oprzeć się na prognozach z modelu. Przy wyzdrowieniach należało wziąć pod uwagę falę zachorowań na Śląsku, która rozpoczęła się 11 dni od dnia początku zawodów – mieliśmy świadomość, że zarówno śmiertelność, jak i wyzdrowienia mogą nagle znacząco wzrosnąć, dlatego wyzdrowienia zwiększane były o około 40% w stosunku do prognozowanej wartości. Dość cynicznie stwierdziliśmy, że śmiertelność ma mały wpływ na błąd końcowy, więc przyjęliśmy, że wartość ta będzie oscylowała w okolicach 10 (czasem dodamy 1, czasem odejmiemy 1, zależnie od przecucia).

Przez kilka dni metoda sprawdzała się... aż nadszedł dzień sądu, czyli 18 czerwca. Wtedy zachorowania gwałtownie spadły, podczas gdy wyzdrowienia mocno wzrosły, nie mówiąc już o niezwykle wysokiej liczbie zgonów. To był moment, w którym należało zrewidować strategię. Stanęliśmy przed problemem – czy spadek zachorowań jest anomalią, czy jednak wartości na niskim poziomie będą się utrzymywały? Chociaż dane historyczne sugerowały, że tak nie będzie, postanowiliśmy przez dłuższy czas prognozować niższe wartości zachorowań, co bardzo się opłaciło.

Wzrost wyzdrowień dało się przewidzieć, ale nie spodziewaliśmy się, że będzie aż tak wysoki. Wartości ponad 380 zdarzyły się w historii tylko 3 razy, i to przy kilkudniowych seriach zachorowań rzędu 450. Zaskoczyło nas to zarówno 19 czerwca, jak i później. Po przebłysku geniuszu w niedzielę 22 czerwca (obniżenie wartości wyzdrowień poniżej 400 z uwagi na niedzielę) spodziewaliśmy się, że wyzdrowienia przestaną rosnąć i wrócą do poziomu około 350, ponieważ większość poszkodowanych w śląskiej fali wróciła już do zdrowia. Przez kilka dni upieraliśmy się przy tej strategii, rezygnując dopiero ostatniego dnia, kiedy to udało nam się postawić najtrafniejszą prognozę w zawodach: o błędzie rzędu 2%!

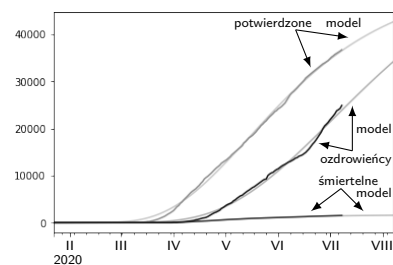
Od innowacji do pandemii

III miejsce

Paweł GOCAL^{***}, Przemysław SARNACKI^{***}, Rafał SZCZEPANIK^{***}

^{***} Wydział Elektroniki, Wojskowa Akademia Techniczna

E. Le Nagard i A. Steyer, *La prévision des ventes d'un nouveau produit de télécommunication: probit ou théorie des avalanches?*, Rech. Appl. En Mark., t. 10, nr 1, s. 57-68, 1995.



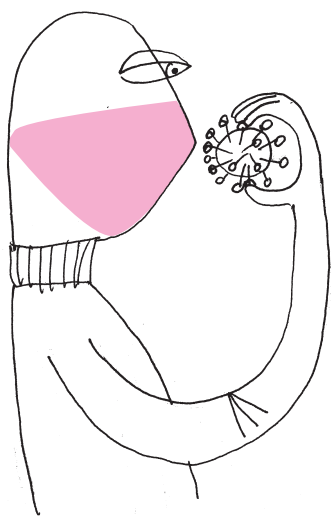
Dopasowanie modelu do danych historycznych

Do stworzenia modelu przewidującego liczbę zakażonych, zdrowych i zmarłych wykorzystaliśmy dane o osobach dotychczas już zarażonych, uwzględniając liczbę zakażeń na każdy poprzedni dzień. Pozwoliło to na określenie trendu. Ponieważ wirus przenosi się drogą kropelkową, najczęściej przy rozmowie, kichaniu i kaszlu, założono, że może się rozprzestrzeniać podobnie jak innowacje. Użyliśmy zaproponowanego przez francuskich naukowców modelu rozprzestrzeniania się innowacji w telekomunikacji (źródło obok):

$$n_t = N \cdot (1 - e^{-at})^\alpha,$$

gdzie n_t oznacza prognozowaną wartość w chwili t , natomiast N , a oraz α to współczynniki modelu. Ich wartości wyznaczaliśmy tak, by zminimalizować błąd średniokwadratowy dopasowania do danych historycznych. Model zaimplementowaliśmy w Pythonie przy użyciu bibliotek NumPy, Pandas i SciPy. Z powodu sytuacji epidemiologicznej współpracowaliśmy zdalnie, korzystając z platform Microsoft Teams, Google Colab i Github.

Zasadniczym problemem w przewidywaniu liczby zachorowań i wyzdrowień była niejednakowa liczba wykonywanych dziennie testów na obecność wirusa. Zauważyliśmy, że wyniki w niedzielę i poniedziałek były mniejsze od pozostałych dni tygodnia – z powodu wykonania mniejszej liczby testów w okresie weekendowym. Gdyby liczba testów wykonywanych dziennie była stała, modele prognozujące dawałyby dużo lepsze wyniki.



Dlatego potraktowaliśmy model jako punkt wyjścia i uzupełniliśmy go o sumę dwóch poprawek, wyznaczanych na podstawie dnia tygodnia i liczby testów. Przykładowo, jeśli testów było mało, to poprawka wynosiła -10% , jeśli dużo, to $+10\%$, a w przeciwnym wypadku $+5\%$. Analogicznie reagowaliśmy w drugim przypadku.

Choć obiecaliśmy sobie, że nie będziemy modyfikować modelu ani jego wyników w trakcie hackathonu, to ze względu na niespodziewane pojawienie się nowego ogniska choroby na Śląsku wzbogaciliśmy zestaw poprawek o dodatkowy parametr z tym związany, co poprawiło jakość prognoz.

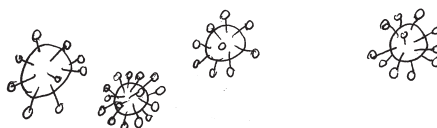
Komentarz kibica

W imieniu Komisji Konkursowej hackathonu, której miałem zaszczyt przewodniczyć, gratuluję zwyciężskim zespołom odwagi zmierzenia się z obu wyzwaniami: prognozowaniem tego, co nieprzewidywalne i... pisaniem do *Delty*. Bardzo byłem ciekaw ich rozwiązań i, zapewne jak wielu Czytelników rubryki, podświadomie oczekiwałem, że najlepsze przewidywania będą efektem użycia spektakularnego modelu matematycznego, być może wymagającego nietrywialnej implementacji. Tymczasem okazało się, że najlepsza prognoza była najzwyczajniej w świecie wynikiem działania trzech, równoległe działających, wszechstronnych sieci neuronowych, trenowanych przez ostatnie 20+ lat: to znaczy mózgowi zwycięskiej trójki. Pracujących w szczególnym trybie, który nazywamy na różne sposoby: *przeczućciem*, *intuicją*, *zdrowym rozsądkiem*.

Czy naprawdę powinniśmy się temu dziwić? Przewidywane zjawisko było bardzo skomplikowane, m.in. przez wpływ najróżniejszych zewnętrznych szumów: nieznaną i zmienną liczbę testów, sprawozdawczości, nowych ognisk choroby itp. Nie było czasu na długotrwałe analizy i studia epidemiologiczne; z oczywistych powodów nie można było też zapytać specjalistów... W takiej sytuacji chyba każdy miałby silne przeczućcie, że postawienie na intuicję jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem.

Aby jednak nie nadawać intuicji znaczenia większego, niż zasługuje, warto zauważyć, że całkowicie odmienna strategia – bezrefleksyjna i nad wyraz leniwa (na którą wszakże nikt się nie zdecydował): *jutro będzie tak samo jak dziś*, dawałaby... drugie miejsce w naszym konkursie.

Piotr KRZYŻANOWSKI



Logika implikacji

Aleksy SCHUBERT*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

†Dlaczego w ogóle zajmować się czymś bez sensu? Na przykład dlatego, że czasem ktoś poda nieprawidłowe rozwiązanie zadania, ale stwierdzenie błędu wymaga sporego wysiłku.

Na początek zajmijmy się czymś zupełnie bez sensu[†]. Na przykład zdaniem:

(A) *Jeśli na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek, to na Merkurym znajdują się ślady człowieka.*

To zdanie jednak bylibyśmy gotowi uznać za „bardziej prawdziwe” niż wypowiedź:

(B) *Jeśli na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek, to autor tego artykułu jest Czyngis-chanem.*

Tymczasem na gruncie logiki klasycznej zdania te są równie prawdziwe. W logice tej jeśli pierwszy człon implikacji (np. *na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*) jest fałszywy albo jeśli drugi człon implikacji (np. *autor tego artykułu jest Czyngis-chanem*) jest prawdziwy, to całe zdanie jest prawdziwe.

Wielu uczniów i studentów burzy się, gdy poda im się taką interpretację wynikania. Jednak w systemie nastawionym wyłącznie na określanie, czy coś jest prawdą, czy fałszem, a takim systemem jest logika klasyczna, wyjścia specjalnie nie mamy. Gdy uprzemy się, że implikacja jest spójnikiem, jak *i* czy *lub*, oraz że

Wielkim orędownikiem pewnej pierwotnej, apriorycznej intuicji w rozumowaniach matematycznych na gruncie matematyki był słynny L. E. J. Brouwer.

Opisany w tekście formalizm definiowania funkcji nazywany jest *rachunkiem lambda*.



Rozwiązanie zadania F 1016.

Najmniej energii zużywamy, gdy maksymalnie wykorzystujemy siłę grawitacji podczas poruszania nogami. Wówczas kolejne kroki polegają na swobodnym, wahadłowym ruchu nóg – na przemian lewej i prawej, a jeden krok wykonujemy w czasie połowy okresu wahadła utworzonego z naszej nogi. Okres wahadła fizycznego wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdzie I jest momentem bezwładności, m masą nogi, a d odległością jej środka ciężkości od osi obrotu – w tym przypadku od stawu biodrowego. Przyjmijmy, że noga jest w przybliżeniu jednorodnym prętem o długości l i masie m . Wówczas $I = ml^2/3$, a $d = l/2$. Otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

i oszacowanie prędkości spaceru:

$$v = \frac{s}{\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

Dla podanych wartości $l = 0,9$ m i $s = 0,7$ m otrzymujemy $v \approx 0,91$ m/s $\approx 3,3$ km/godz. Podawana zwykle „prędkość piechura” równa około 5 km/godz. dotyczy szybkiego marszu wymagającego sporego wysiłku. Noga nie jest jednorodnym prętem, bo udo jest zwykle grubsze od łydki, co zmniejsza moment bezwładności I i „podnosi” środek ciężkości nogi, czyli zmniejsza d . Przybliżenie „ratuje” masa skupiona w stopie znajdującej się na końcu nogi. Zachęcamy Czytelników Dociekliwych do wykonania własnych pomiarów i sprawdzenia poprawności przyjętego tu modelu.

człony zdania mogą być tylko prawdziwe lub fałszywe, to pozostaje nam jedynie przyjąć jak w logice klasycznej: prawda implikuje tylko prawdę (bo inaczej być nie może), ale fałsz implikuje cokolwiek (bo gdy doszliśmy do fałszu, to jest nam naprawdę wszystko jedno). Taka „teoria prawdy” jest bardzo eleganckim systemem matematycznym, który spodobał się ogromnej liczbie ludzi.

Powyższe podejście ignoruje na przykład fakt, że może aktualnie nie być wiadomo, czy dany człon implikacji jest prawdziwy. Jak zatem mogą sobie poradzić ci niezadowoleni z tego rozwiązania? Czyż różni się powyższe zdanie A od B ? Otóż za zdaniem A kryje się wyraźna intuicja na temat tego, jak z faktu, że na Merkurym znajduje się człowiek, wydedukować, że znajdują się tam ślady człowieka.

Za zdaniem B nie kryje się żadna taka odpowiedź, natomiast ewidentna fałszywość drugiego członu sugeruje nam po cichu, że całe to zdanie musi być jakoś „nieprawidłowe”.

Kłopotliwe jednak w tym podejściu jest to, że w zasadzie nie wiadomo, czym jest intuicja. Matematycy na początku XX wieku (m.in. A. Heyting, A. Church, S. Kleene) doszli do przekonania, że wystarczająco dobrym przybliżeniem pojęcia intuicji będzie pojęcie funkcji rozumianej jako przepis na przetworzenie założonych argumentów w wynik. Jak jednak mogą wyglądać takie *przepisy*? Oznaczmy określane przez nas przepis jako M . Oto potrzebne cegiełki:

- Musimy mieć do dyspozycji mechanizm wprowadzania do obiegu składnika, który może być używany przy dalszym pisaniu przepisu na obliczenie funkcji. Polegający na takiej operacji przepis M można zapisać w postaci wyrażenia $M = \lambda x.N$, gdzie N jest tą częścią przepisu, w której można używać składnika x , zwykle w tym kontekście zwanego argumentem x . Takie wyrażenie będziemy nazywać *lambda abstrakcją x w N* .
- Drugi potrzebny mechanizm to używanie wprowadzonego do obiegu argumentu. Nasz przepis M , jeśli polega właśnie na takim użyciu, można zapisać jako $M = x$. Takie wyrażenie będziemy nazywać *użyciem zmiennej x* .
- Jest jeszcze trzeci mechanizm – to mechanizm zastosowania, inaczej aplikacji, funkcji do zadanego argumentu. Jeśli nasz przepis M ma na tym polegać, to możemy go zapisać jako $M = M_1 M_2$, gdzie M_1 jest wcześniej opisanym przepisem na funkcję, a M_2 argumentem (który też może być funkcją). Takie wyrażenie będziemy nazywać *aplikacją M_1 do M_2* .

Można się teraz takimi wyrażeniami pobawić i napisać sobie „przepis” $\lambda x.x$. Ta prosta definicja określa funkcję, która dla zadanego argumentu x daje w wyniku właśnie ten argument. W ten sposób zdefiniowaliśmy funkcję identycznościową f , taką że $f(x) = x$. Inny ciekawy przepis to $\lambda x.\lambda y.xy$. Wbrew pozorom nie jest to mnożenie! Zgodnie z przyjętą przez nas notacją przepis ten oznacza, że funkcję, która jest podana jako pierwszy argument, zastosujemy do drugiego argumentu. Tutaj możemy pójść za ciosem i podać cały ciąg podobnych przepisów:

$$\lambda x.\lambda y.xy, \quad \lambda x.\lambda y.x(xy), \quad \lambda x.\lambda y.x(x(xy)), \dots$$

gdzie argument x jest powtarzany w kolejnych wyrażeniach coraz większą liczbę razy. I tu mamy niespodziankę, bo tym sposobem zbudowaliśmy w naszym języku odpowiedniki liczb naturalnych. Mając do dyspozycji „przepisoliczby” n i m , możemy je dodać za pomocą następującego przepisu na dodawanie:

$$\lambda n.\lambda m.\lambda x.\lambda y.(nx)((mx)y)$$

(zaznaczmy jeszcze, że n i m to przepisy, a nx i mx to *aplikacje* tych przepisów do argumentu x).

Rozszyfrowanie, że powyższe wyrażenie reprezentuje dodawanie, jest niezłą łamigłówką. Jednak wszystko stanie się dużo jaśniejsze, jeśli spostrzemy, że dla wyrażenia $(\lambda x.M)N$, polegającego na użyciu przepisu $\lambda x.M$ do argumentu N , ostateczny wynik jest taki sam jak dla wyrażenia, w którym w przepisie M na każde wystąpienie argumentu x wstawimy faktyczną treść N . Proszę popatrzeć (w każdym wierszu podkreśliliśmy argumenty, które biorą udział

w przekształceniu):

$$\begin{aligned} & ((\lambda n. \lambda m. \lambda x. \lambda y. (n x)((m x) y)) \quad (\lambda x'. \lambda y'. x'(x' y'))) \quad (\lambda x''. \lambda y''. x''(x''(x'' y''))) \rightarrow \\ & \rightarrow (\lambda x. \lambda y. ((\lambda x'. \lambda y'. x'(x' y')) \underline{x}) \quad (((\lambda x''. \lambda y''. x''(x''(x'' y''))) \underline{x}) y)) \rightarrow \\ & \rightarrow \lambda x. \lambda y. (\lambda y'. x(x y')) \quad (x(x(x y))) \rightarrow \\ & \rightarrow \lambda x. \lambda y. x(x(x(x(x y))))). \end{aligned}$$

Czytelnikowi Ambitnemu zalecamy zastanowić się, jak powinien wyglądać przepis na mnożenie.

Rzeczywiście 2 dodane w ten sposób do 3 daje 5. Tutaj ważna uwaga: żeby nam się oznaczenia w przepisach nie pomyliły, pozmienialiśmy nazwy argumentów tak, żeby nazwy wprowadzane przez lambda abstrakcję w wyrażeniach, na których pracujemy, się nie powtarzały. W istocie nie ma przecież znaczenia, czy wewnątrz przepisu pierwszy argument nazwiemy x czy x' .

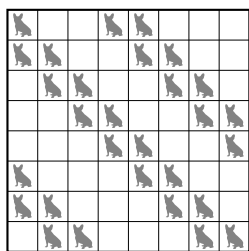
Jak takie przepisy można powiązać z implikacjami? Możemy przyjąć, że z opisanymi powyżej wyrażeniami wiążemy pewne zdania. Jak to robimy? Otóż z argumentami takimi jak x wiążemy zdania, w których uzasadnienia nie będziemy wnikali, które niejako w nasz świat rozważań weszły z zewnątrz. W świecie matematyki o tego typu zdaniach mówi się założenia lub aksjomaty. To pierwszy rodzaj powiązania. Załóżmy teraz, że mamy wyrażenie N , z którym związane jest zdanie D , np. *człowiek zostawia ślady na Merkurym*. Gdy jednocześnie w obiegu obecny jest argument x , który związany jest ze zdaniem C , np. *zdanem na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*, to przepis $\lambda x. N$ związany będzie z implikacją $C \Rightarrow D$. Opisuje on, jak zdobyte przez nas doświadczenia połączone ze zdaniem C związanym z x dają świadectwo zdaniu D . Dla naszego przykładowego zdania A stosowny przepis M , który naszych doświadczeń używa do wywołania przekonania o prawidłowości tego zdania, mógłby w szczegółach wyglądać jak poniżej. Dla skrócenia zapisu przyjmijmy, że

Przedstawiony w artykule system logiczny nazywany jest *minimalną logiką implikacyjną*. Co ciekawe, stwierdzenie, czy zdanie jest tautologią tego systemu, jest obliczeniowo trudniejsze niż dla klasycznej logiki zdaniowej.



Rozwiązanie zadania M 1661.

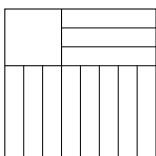
Możemy rozmieścić 27 piesków tak, jak wskazano na rysunku, i wówczas żaden nie będzie szczekał. Pokażemy, że jest to największa możliwa liczba.



Zauważmy, że w prostokącie 1×5 pieski mogą być umieszczone albo na dwóch skrajnych polach, albo mogą stać obok siebie. W szczególności można w nim umieścić nie więcej niż dwa pieski. Ponadto łatwo zauważyć, że w dowolnym kwadracie 3×3 , którego pola oznaczono jak na rysunku, na polach oznaczonych w ten sam sposób może stać tylko jeden piesek. Wobec tego w takim kwadracie można umieścić maksymalnie 5 piesków.



Dzieląc teraz szachownicę 8×8 w sposób pokazany na rysunku (na 11 prostokątów 1×5 i kwadrat 3×3), widzimy, że „cichych” piesków może być maksymalnie $5 + 11 \cdot 2 = 27$.



- C to zdanie: *na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*,
- D to zdanie: *człowiek zostawia ślady na Merkurym*, zaś
- E to zdanie: *na Merkurym znajdują się ślady człowieka*.

Założmy, że mamy do dyspozycji doświadczenie g , którego treść da się opisać jako implikacja $C \Rightarrow D$, oraz doświadczenie h , którego treść da się opisać jako implikacja $D \Rightarrow E$. Są to szczególne przypadki doświadczeń ujętych w ogólniejsze prawa: *jeśli człowiek znajduje się w jakimś miejscu, to zostawia tam ślady* oraz *jeśli człowiek zostawia gdzieś ślady, to one się tam znajdują*. Możemy teraz z aplikacją gx związać zdanie D , bo jest ono wynikiem użycia doświadczenia g do argumentu x związanego już wcześniej z założeniem C . Podobnie z $h(gx)$ zwiążemy zdanie E , bo jest ono wynikiem użycia doświadczenia h do wyrażenia gx związanego, jak się przekonaliśmy, z założeniem D . W tej sytuacji szukanym przez nas przepisem M jest po prostu $\lambda x. h(gx)$. Podobnego przepisu nie moglibyśmy skonstruować dla zdania B z początku artykułu, bo nie znamy żadnych doświadczeń, za pomocą których jak z klocków moglibyśmy zbudować podobne powiązanie obecności człowieka na Merkurym z faktem, że autor tego artykułu jest Czyngis-chanem.

Warto jeszcze może dodać, że w tym systemie teoretycznie możliwe wyrażenie hx odrzucimy, bo doświadczenia h związanego z $D \Rightarrow E$ nie da się zastosować do argumentu x związanego z C . Jak wspomnieliśmy, da się je zastosować tylko do wyrażenia związanego z D . System ten w tym kontekście nazywany jest *rachunkiem lambda z typami prostymi*.

Co ciekawe, tego samego mechanizmu można użyć do zarządzania operowaniem na wartościach. Wtedy pojęcie zdania zastępujemy pojęciem typu. Przyjrzyjmy się naszej reprezentacji liczb naturalnych. Z wyrażeniem $\lambda x. (\lambda y. xy)$ możemy związać, stosując powyższe reguły, typ $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$ – wystarczy, że w podwyrażeniu xy przyjmijmy, iż x jest związane z $\alpha \Rightarrow \alpha$, zaś y z α . Wtedy wyrażenie xy będzie związane z typem α , zaś $(\lambda y. xy)$ z typem $\alpha \Rightarrow \alpha$. Dodanie $\lambda x.$ na początku da natomiast nasze wyrażenie $\lambda x. (\lambda y. xy)$ i będzie ono związane z typem $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$. W tym miejscu pozostaje mi życzyć miłej zabawy przy sprawdzaniu, że zdefiniowana powyżej operacja dodawania ma typ taki, jakiego się spodziewamy.

Funkcja sinus – detektor liczb niewymiernych?

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Karol GRYSZKA *

Liczbę e , znaną jako liczbę Nepera lub Eulera, można zdefiniować na przykład na następujące sposoby:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Wiemy o niej bardzo dużo – jest niewymierna, przestępna, znamy jej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy oraz miliardy cyfr rozwinięcia dziesiętnego.

W tym artykule wykazemy, że e jest faktycznie liczbą niewymierną, a więc nie można jej przedstawić jako stosunek dwóch liczb całkowitych. Użyjemy do tego pewnej granicy (lemat 2), która sama w sobie jest ciekawa. Wcześniej jednak udowodnimy (na marginesie) dwie nierówności.

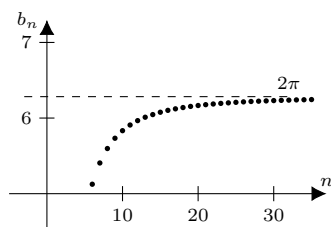
Lemat 1. *Zachodzą następujące oszacowania:*

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n-1}.$$

Dowód lematu 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{n!}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots k} < \\ &< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Niech $b_n := n \sin(2\pi en!)$. Korzystając z dobrego kalkulatora, możemy sprawdzić, że $|b_{100} - 2\pi| < 0,005$ oraz $|b_{1000} - 2\pi| < 0,00005$. Wykres ciągu b_n dla $6 \leq n \leq 35$ znajduje się na poniższym rysunku.



A teraz czas na wspomnianą „ciekawą granicę”.

Lemat 2. *Zachodzi równość:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi.$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia

$$a_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \quad \text{oraz} \quad z_n := \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}.$$

Zauważmy, że z_n jest liczbą całkowitą. W takim razie możemy zapisać:

$$n \sin(2\pi en!) = n \sin\left(2\pi \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\right) = n \sin(2\pi z_n + 2\pi a_n) = n \sin(2\pi a_n).$$

Ostatnia równość to konsekwencja tego, że sinus jest funkcją okresową. Zauważmy także, że $a_n \rightarrow 0$ oraz $na_n \rightarrow 1$. Istotnie, z lematu 1 wynika, że

$$0 < a_n < \frac{1}{n-1},$$

stąd dla $n \rightarrow \infty$ dostajemy, że $a_n \rightarrow 0$. Z lematu 1 otrzymujemy także, że

$$\frac{n}{n+1} < na_n < \frac{n}{n-1}.$$

Dla $n \rightarrow \infty$ granice skrajnych ciągów są równe 1, stąd też granica ciągu na_n jest równa 1. Wiedząc ponadto, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$n \sin(2\pi a_n) = n 2\pi a_n \frac{\sin(2\pi a_n)}{2\pi a_n} \rightarrow 2\pi \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

Teraz możemy przejść do realizacji głównego celu tego artykułu.

Twierdzenie. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód. Rozumujemy nie wprost: niech $e = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że jeśli $n > q$, to $en! = \frac{p}{q}n!$ jest liczbą naturalną. Stąd dla $n > q$ i $\sin(2\pi en!) = 0$ (sinus jest okresowy!). Oznacza to jednak, że dla $n > q$, $n \sin(2\pi en!) = 0$ wbrew lematowi 2. \square

Powyższy dowód nie jest ani najprostszy, ani najkrótszy z możliwych. Niemniej jest godny polecenia, na przykład z uwagi na fakt, że niewymierność liczby „wykrywamy” przy użyciu okresowości funkcji sinus.

Które zgięcie jest naj...?

Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

† G.H. Hardy, Kurs analizy. Rachunek różniczkowy i całkowy, wyd. II, Warszawa 1930.

Zadania na „wyznaczanie ekstremum” potrafią być kłopotliwe. Przeglądając *Kurs Analizy Hardy’ego*[†], zwróciłem uwagę na wyjątkowo naturalny problem.

Zadanie 1 (G.H. Hardy, 1908). *Zginamy prostokątną kartkę papieru w ten sposób, że koniec jednego boku leży na boku przeciwnym. Kiedy długość tego zgięcia jest największa?*

Nie, nie podamy pełnego rozwiązania, dla Czytelników muszą być smakołyki! Smak sukcesu zapewni „rozbrojenie” wskazanych podpowiedzi.

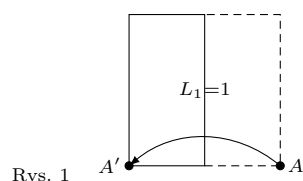
Znane twierdzenie Weierstrassa gwarantuje, że rozwiązanie zadania istnieje. Gdy kartka jest kwadratem jednostkowym, wystarczą rozważania geometryczne – możliwe są trzy przypadki (rys. 1–3).

Gdy punkt A' oddala się od punktu D (rys. 2), to zmienia się położenie zgięcia i rośnie jego długość. Oczywiście zgięcie jest najdłuższe, gdy wierzchołek A przechodzi na wierzchołek przeciwny A' (rys. 3).

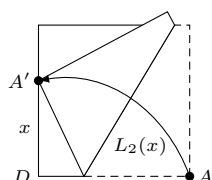
Rozwiązanie analityczne wymaga obliczenia długości zgięcia w zależności od jakiegoś parametru, np. kąta nachylenia linii zgięcia do boku.

Podpowiedź 1. Wykazać, że dla kwadratu jednostkowego długość zgięcia w przypadku „pośrednim” (rys. 2) $L_2(x) = \sqrt{1+x^2}$, gdzie $|DA'| = x \in (0, 1)$.

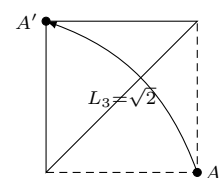
Dla prostokąta o bokach długości $0 < a < b$ sprawa się komplikuje. Aby uprościć rachunki, rozważmy prostokąt znormalizowany o bokach długości $1 \times h$, gdzie $h = \frac{b}{a} > 1$. Dynamicznie zmieniające się położenia zgięć dla wierzchołka zginanego rogu umiejscowionego na dłuższym boku przedstawiają rysunki 4–10. (Nietrudno przekonać się, że jeśli wierzchołek zgięcia będzie na krótszym boku, to długość zgięcia będzie krótsza od tej z konfiguracji z rys. 10.)



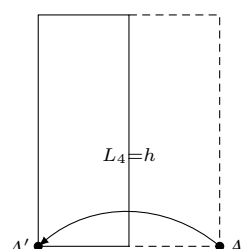
Rys. 1



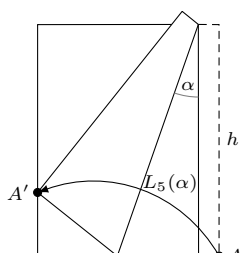
Rys. 2



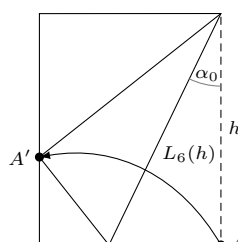
Rys. 3



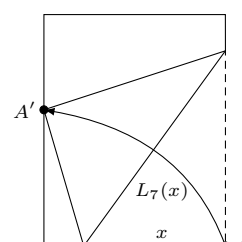
Rys. 4



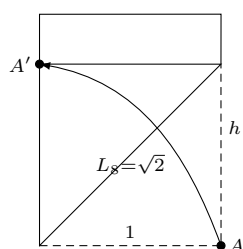
Rys. 5



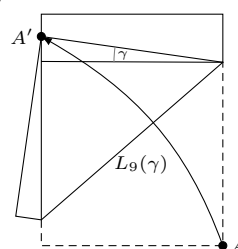
Rys. 6



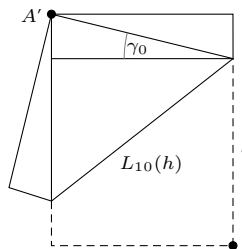
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



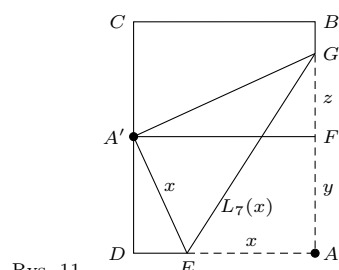
Rys. 10

Które z tych zgięć jest najdłuższe i w jakich warunkach? Kandydatów jest dwóch – to zgięcia z rysunków 6 i 8. Skąd taki wybór?

Zgięcie na rysunku 5 ma długość $L_5(\alpha) = \frac{h}{\cos \alpha}$, gdzie $\alpha \in (0, \alpha_0)$ i $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ jest takie jak na rysunku 6. Ponieważ $L'(\alpha) = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} > 0$, więc wielkość $L_5(\alpha)$ rośnie wraz ze wzrostem argumentu α , aż do osiągnięcia położenia granicznego z rysunku 6.

Podpowiedź 2. Wykazać, że dla prostokąta $1 \times h$ ($h > 1$) długość zgięcia z rysunku 6 jest określona wzorem $L_6(h) = \sqrt{2h^4 - 2h^3\sqrt{h^2 - 1}}$.

Dalsza wędrówka punktu A' wzdłuż boku prostokąta wymusza pojawienie się przypadku przedstawionego na rysunku 7. Obliczenie długości zgięcia $L_7(x)$ jako funkcji parametru $|AE| = x \in (\frac{1}{2}, 1)$ jest łatwe (rys. 11).



Rys. 11

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do $\triangle DEA'$ mamy $y^2 = x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1$, a z podobieństwa trójkątów $\triangle DEA' \sim \triangle FGA'$,

$$\frac{|FG|}{|FA'|} = \frac{|DE|}{|DA'|}, \text{ skąd } yz = 1 - x \text{ oraz } z^2 = \frac{(1-x)^2}{y^2} = \frac{(1-x)^2}{2x-1}.$$

Ponownie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla $\triangle EAG$,

$$[L_7(x)]^2 = x^2 + (y+z)^2 = x^2 + y^2 + 2yz + z^2 = \dots = \frac{2x^3}{2x-1}, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dx} ([L_7(x)]^2) = \frac{2x^2(4x-3)}{(2x-1)^2} < 0 \text{ dla } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4},$$

więc długość zgięcia najpierw maleje, osiąga minimum lokalne dla $x = \frac{3}{4}$, a później wzrasta do wielkości $L_8(h) = \sqrt{2}$ (patrz rys. 8). Gdy punkt A' wędruje dalej w górę (rys. 9), pojawia się kolejna pułapka.

Podpowieź 3. Wykazać, że dla prostokąta $1 \times h$ ($h > 1$) przy oznaczeniach takich jak na rysunku 9, długość zgięcia jest określona wzorem $L_9(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{1+\sin \gamma}}$, gdzie $0 < \gamma < \gamma_0$ i $\gamma_0 < \frac{\pi}{2}$ jest takie jak na rysunku 10.

Ponieważ $[L_9(\gamma)]' = \frac{-\sqrt{1+\sin \gamma} \cdot \cos \gamma}{\sqrt{2}(1+\sin \gamma)^2} < 0$, więc w tym przypadku długość zgięcia maleje do osiągnięcia wartości granicznej $L_{10}(h)$ (patrz rys. 10).

Z powyższych rozważań wynika, że rozwiązaniem zadania Hardy'ego dla prostokąta o wymiarach $1 \times h$ ($h > 1$) jest funkcja

$$L_{\max}(h) = \max \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2h^4 - 2h^3\sqrt{h^2-1}} \right\} \text{ dla } h > 1.$$

Porównując wykresy funkcji $L_6(h) = \sqrt{2h^4 - 2h^3\sqrt{h^2-1}}$ i $L_8(h) = \sqrt{2}$ dla $h > 1$ (rys. 12), widzimy, że jedynie dla prostokąta o wysokości $h = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$ istnieją dwa różne położenia zgięć o takich samych największych długościach (rys. 6 i 8).

W zadaniu 1 nie mówimy o zgięciu najmniejszej długości, bo jest ono długości 1 (wystarczy kartkę o wymiarach $1 \times h$ ($h > 1$) złożyć na pół tak, aby pokrywały się krótsze boki).

Mniej trywialna jest następująca sytuacja:

Zadanie 2. Zginamy prostokątną kartkę papieru w ten sposób, że koniec dłuższego boku leży na dłuższym boku przeciwległym. Kiedy długość tego zgięcia jest najmniejsza?

Wcześniejsza dyskusja uprawnia nas do szukania rozwiązania wśród przypadków z rysunków 4, 7 i 10. Jak już wiemy, $L_4(h) = h$, a funkcja $L_7(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{2x-1}}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, osiąga minimum lokalne dla $x_0 = \frac{3}{4}$, które jest równe $L_7(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Obliczenie długości zgięcia w ostatnim przypadku (rys. 10) jest łatwe.

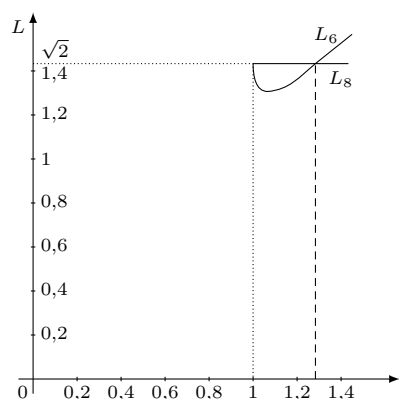
Przy oznaczeniach takich jak na rysunku 13, z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $\triangle DAA'$ wynika $d^2 = 1 + h^2$. Z podobieństwa trójkątów $\triangle DAA' \sim \triangle OSA'$ mamy $\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{2}L_{10}}{\frac{1}{2}d}$, skąd $L_{10}(h) = \frac{\sqrt{1+h^2}}{h}$, gdzie $h > 1$.

Porównując wykresy funkcji $L_4(h) = h$, $L_7(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $L_{10}(h) = \frac{\sqrt{1+h^2}}{h}$ dla $h > 1$ (rys. 14), widzimy, że wartość minimum lokalnego z przypadku na rysunku 7 nigdy (!) nie jest zgięciem o najmniejszej długości. Rozwiązaniem zadania 2 dla prostokąta o wymiarach $1 \times h$, ($h > 1$), jest funkcja

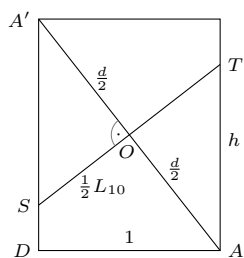
$$L_{\min}(h) = \min \left\{ h, \frac{\sqrt{1+h^2}}{h} \right\} \text{ dla } h > 1.$$

Jedynie dla $h = \sqrt{\varphi}$, gdzie $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (złota liczba), istnieją dwa zgięcia o najmniejszej długości (rys. 4 i 10).

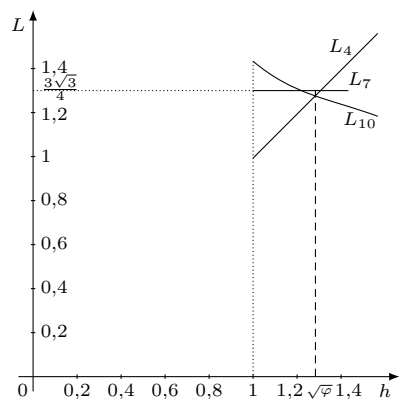
Tak oto rozwiązanie naturalnie wyglądającego i pozornie łatwego zadania okazało się zaskakująco nieoczywiste.



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

O związkach optymalnego transportu z twierdzeniem o kanapce

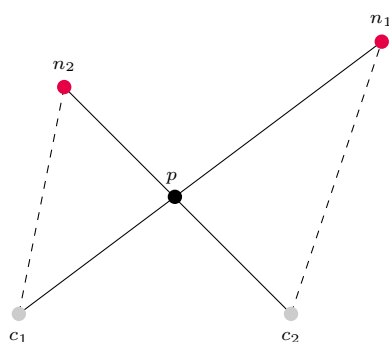
Krzysztof J. CIOŚMAK*

* Uniwersytet Oksfordzki

Badania problemu optymalnego transportu zostały zainicjowane już w 1781 roku przez Gasparda Monge'a, ale na dowód istnienia rozwiązania w przypadku ciągłym trzeba było czekać ponad dwieście lat. Zadanie polega na tym, by znając początkowe i docelowe rozmieszczenie nieodróżnialnych ładunków, tak dobrać docelowe miejsca każdego z nich, by jak najmniej zapłacić. Zakładamy przy tym, że koszt przemieszczenia ładunku z jednego punktu do drugiego jest proporcjonalny do ich odległości.

Łączenie punktów

Zobaczmy, jak powyżej opisany problem jest związany z następującym zagadnieniem. Przypuśćmy, że mamy na płaszczyźnie zadane n punktów szarych i n punktów niebieskich. Chcielibyśmy znaleźć takich n odcinków parami rozłącznych, że każdy z nich ma jeden kraniec szary i jeden kraniec niebieski. Jak łatwo zaobserwować, nie zawsze takie odcinki istnieją. Istotnie, jeśli wszystkie punkty leżą na jednej prostej i wśród nich jest taka trójka jednokolorowych punktów, że pomiędzy nimi nie ma żadnego punktu o odmiennym kolorze, to takich odcinków nie znajdziemy. Aby wyeliminować tego typu sytuacje, będziemy zakładali, że zadane punkty są w *położeniu ogólnym*. Oznacza to, że żadna trójka punktów nie leży na jednej prostej. Pokażemy, że przy tym założeniu można wykazać, że takie odcinki istnieją. Rozważmy bowiem wszystkie możliwe zestawy n odcinków, które łączą punkty szare z niebieskimi w sensie rozważanym powyżej. Takich zestawów jest skończenie wiele – dokładnie: $n!$. Weźmy ten, dla którego suma długości odcinków jest najmniejsza. Przypuśćmy, że w tym wybranym zestawie mamy dwa odcinki, które się przecinają. Sytuacja ta jest zilustrowana na marginesie. Używając oznaczeń z rysunku, widzimy, że nierówność trójkąta implikuje, że



$$d(c_1, n_2) \leq d(c_1, p) + d(n_2, p)$$

oraz

$$d(c_2, n_1) \leq d(c_2, p) + d(n_1, p).$$

Powyżej $d(x, y)$ oznacza odległość między punktami x i y . Ze względu na poczynione założenie – o tym, że punkty są w położeniu ogólnym – nierówności są ostre. Sumując je, otrzymujemy

$$d(c_1, n_2) + d(c_2, n_1) < d(c_1, n_1) + d(c_2, n_2).$$

Stoi to w sprzeczności z przypuszczeniem, że wybrany zestaw odcinków miał tę własność, że suma długości odcinków była najmniejsza. W istocie, biorąc taki zestaw jak poprzednio, z taką modyfikacją, że zamiast łączyć c_1 z n_1 i c_2 z n_2 łączymy c_1 z n_2 oraz c_2 z n_1 – dostajemy zestaw o ściśle mniejszej sumie długości odcinków. Tym samym wykazaliśmy istnienie pożądanego zestawu odcinków.

Rozumowanie, które prowadzi do dowodu tego faktu, jest ściśle związane z opisany powyżej problemem optymalnego transportu. Rzeczywiście, jeśli pomyślimy o punktach szarych jako o początkowym rozmieszczeniu ładunków, a o punktach niebieskich jako o ich rozmieszczeniu docelowym, to rozważany problem optymalizacyjny jest dokładnie problemem optymalnego transportu.

Lokalizacja

Optymalny transport ma nie tylko bezpośrednie zastosowania. To, co przedstawiliśmy powyżej, stanowi pierwszy krok ku zrozumieniu zastosowania optymalnego transportu do nierówności geometrycznych. Jedną z takich nierówności jest *nierówność izoperymetryczna*. Mówi ona, w klasycznej wersji



Rozwiązanie zadania F 1015.

Na powierzchnię wody w powstałym otworze działa ciśnienie powietrza równe około 10^5 N/m^2 , a więc strumień wody będzie wynikiem różnicy ciśnień $\Delta p = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Wyobraźmy sobie, że różnica ciśnień Δp została wytworzona przez pionowy słup wody. Wysokość h takiego słupa wody wynosiłaby

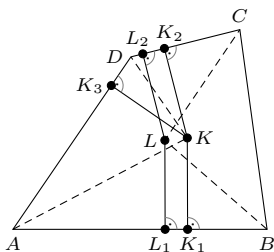
$$h = \frac{\Delta p}{g\rho}$$

i właśnie na taką wysokość wzniosłby się strumień wody wytryskujący z otworu. Po podstawieniu danych otrzymujemy $h \approx 30 \text{ m}$. Jest to oszacowanie z góry – z powodu oporu powietrza rzeczywista wysokość będzie mniejsza.



Rozwiązanie zadania M 1662.

Oznaczmy przez L_1, L_2 rzuty punktu L , odpowiednio, na proste AB i CD , a K_1, K_2, K_3 rzuty punktu K na proste, odpowiednio, AB, CD i DA . Z wypukłości $ABCD$ punkty K_1 i L_1 leżą wewnątrz odcinka AB , punkty K_2 i L_2 leżą wewnątrz odcinka CD , natomiast punkt K_3 leży wewnątrz odcinka DA .



Mamy zatem równości

$$K_1L_1 = |AB - AK_1 - BL_1|$$

oraz

$$K_2L_2 = |DC - DK_2 - CL_2|.$$

Ponadto

$$AD = AK_3 + DK_3 = AK_1 + DK_2.$$

Analogicznie $BC = BL_1 + CL_2$. Odcinki K_1L_1 i K_2L_2 są rzutami odcinka KL , odpowiednio, na odcinki AB i CD , skąd $KL \geq K_1L_1$ oraz $KL \geq K_2L_2$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 2KL &\geq K_1L_1 + K_2L_2 = \\ &= |AB - AK_1 - BL_1| + |DC - DK_2 - CL_2| \geq \\ &\geq |AB - AK_1 - BL_1 + DC - DK_2 - CL_2| = \\ &= |AB + DC - AD - BC|, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności trójkąta.

Uwaga: Niech Ω_K i Ω_L będą okręgami st stycznymi do trzech boków czworokąta o środkach, odpowiednio, K i L . Jeśli przez P i Q oznaczymy punkty styczności Ω_K i Ω_L z odcinkiem AB , to z powyższego rachunku można wywnioskować, że

$$PQ = \frac{1}{2}|AB + CD - BC - DA|,$$

skąd teza, gdyż oczywiście $KL \geq PQ$.

znanej już starożytnym, że spośród zbiorów o ustalonej objętości najmniejsze pole powierzchni ma kula.

Taka własność optymalnego transportu, że drogi transportowanych ładunków się nie przecinają (wykorzystaliśmy ją przy rozwiązaniu problemu z odcinkami), pozwala na zredukowanie trójwymiarowego problemu izoperymetrycznego do jego odpowiednika jednowymiarowego. Rozwiązanie tego odpowiednika jest już jednak, jak Czytelnik zechce sprawdzić, oczywiste. Szczegóły metod wykorzystywanych w optymalnym transporcie przy tej redukcji wybiegają jednak poza zakres tego artykułu. Wspomnijmy tylko, że kluczową rolę gra tu *dualność Kantorowicza–Rubinsteina*. Odnajmy, że Kantorowicz za prace nad tymi zagadnieniami został uhonorowany w 1975 roku Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii.

Metoda, którą tutaj naszkicowaliśmy, jest zwana lokalizacją. Ma ona szerokie uogólnienie – można ją zastosować także przy badaniu problemu izoperymetrycznego na *rozmaitościach riemannowskich*, które spełniają pewne warunki dotyczące krzywizny i wymiaru. Jest to już jednak materiał na osobną historię.

Problem w trzech wymiarach

Jeden z kierunków, w którym można uogólnić nasze zagadnienie, jest następujący. Załóżmy, że mamy zadane trzy zbiory, każdy po n punktów leżących w przestrzeni trójwymiarowej. Dla wygody nazwijmy punkty pierwszego z tych zbiorów punktami czerwonymi, drugiego – niebieskimi, a trzeciego – zielonymi. Ponownie będziemy zakładali, że zadane punkty są w położeniu ogólnym, a zatem że żadna czwórka punktów nie leży w dwuwymiarowej płaszczyźnie. Naszym zadaniem jest znalezienie n takich trójkątów dwuwymiarowych parami rozłącznych, że każdy z tych trójkątów ma jeden wierzchołek czerwony, jeden niebieski i jeden zielony.

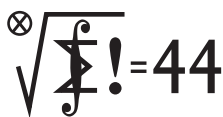
Obecnie nie jest jasne, czy rozwiązanie tego problemu, które byłoby analogiczne do rozwiązania problemu na płaszczyźnie, istnieje. Tym niemniej można udowodnić istnienie pożądaných trójkątów. Metoda, którą się posłużymy, będzie używała znanego twierdzenia Borsuka–Ulama o kanapce. Mówi ono, że gdy mamy kanapkę złożoną z bułki, szynki i sera, to możemy znaleźć taką płaszczyznę, że gdy przetniemy kanapkę wzdłuż niej, to podzielimy każdy ze składników kanapki na dwie równe części.

Idea rozwiązania naszego problemu, pochodząca z pracy Nogi Alona i Jina Akiyamy *Disjoint Simplices and Geometric Hypergraphs*, jest następująca. By móc skorzystać z twierdzenia Borsuka–Ulama, musimy w miejsce zadanych punktów rozważyć małe kulki o środkach w tych punktach. Kulki, których środki są czerwone, będą grały rolę bułki, te o środkach niebieskich – szynki, a zielonych – sera. Twierdzenie nam mówi, że znajdziemy taką płaszczyznę, która każde z tych zbiorów podzieli na dwie równe części. Po drobnej modyfikacji naszego cięcia w razie potrzeby dostaniemy dwa niezależne problemy, identyczne jak problem początkowy, z tym wyjątkiem, że każdy z nich dotyczy zbiorów o liczności nie większej niż $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Tutaj $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od liczby x .

Kontynuując to postępowanie lub – mówiąc bardziej formalnie – stosując zasadę indukcji, uzyskujemy n parami rozłącznych, wypukłych komórek, z których każda zawiera dokładnie po jednym punkcie czerwonym, jednym niebieskim i jednym zielonym. Ze względu na ich wypukłość trójkąty łączące punkty wewnątrz komórek są parami rozłączne. Oczywiście mogą powstać także komórki, które nie zawierają żadnego punktu z zadanych, ale nie stanowią one przeszkody w przeprowadzeniu dowodu istnienia szukanych trójkątów.

Twierdzenie Borsuka–Ulama o kanapce ma swój odpowiednik w przestrzeniach wyżej wymiarowych. Za jego pomocą można też wykazać, że problem dotyczący przestrzeni d -wymiarowej i d różnokolorowych, równolicznych zbiorów, których suma jest w pozycji ogólnej, także ma rozwiązanie.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2021

Zadania z matematyki nr 813, 814

Redaguje Marcin E. KUCZMA

813. Dany jest wielokąt wypukły W (kąty $< 180^\circ$) oraz liczba naturalna m , mniejsza od liczby jego przekątnych. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów przecięć przekątnych (leżących wewnątrz W); zakładamy, że żaden z tych punktów nie należy do trzech przekątnych. Udowodnić, że w zbiorze S można wyróżnić m -elementowy podzbiór M , nie zawierający żadnego cyklu. Przez *cykl* rozumiemy dowolny cykliczny układ punktów (dowolnej długości ≥ 3), w którym każde sąsiednie dwa punkty leżą na jednej przekątnej, ale żadne kolejne trzy nie leżą na jednej przekątnej.

814. W pewnym trójkącie jeden z kątów ma miarę α . Dowieść, że

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \geq \frac{r}{R},$$

gdzie, jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego.

Zadanie 814 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2020

Przypominamy treść zadań:

805. Wewnątrz wypukłego n -kąta $A_1 A_2 \dots A_n$ leży taki punkt P , że każdy z trójkątów $PA_i A_{i+1}$ jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1} = A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P ?

806. nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ dla $n \geq 1$. Niech $f(x) = x^2 - x$. Udowodnić, że dla każdego $n \geq 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

805. Odpowiedź dla $n \geq 4$: nie; dla $n = 3$: tak.

Banalny kontrprzykład dla $n \geq 4$: umieszczamy punkty P, A_1, A_2, A_3 w wierzchołkach kwadratu. Zakreślamy okrąg o środku P , przechodzący przez punkty A_1, A_3 , i na jego długim łuku $A_3 A_1$ wybieramy punkty A_4, \dots, A_n tak, by punkt P znalazł się wewnątrz wielokąta $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$; ów wielokąt ma własności wymienione w pierwszym zdaniu zadania, ale nie ma okręgu opisanego.

Dowód dla $n = 3$: gdyby w trójkącie $A_1 A_2 A_3$ dwa kąty spośród $A_1 P A_2, A_2 P A_3, A_3 P A_1$ były ostre, ich suma byłaby kątem wypukłym i punkt P leżałby na zewnątrz trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Wobec tego dwa spośród tych kątów – np. $A_1 P A_2, A_2 P A_3$ są nieostre; podstawami trójkątów równoramiennych $PA_1 A_2, PA_2 A_3$ są wtedy odcinki $A_1 A_2, A_2 A_3$; ich boczne ramiona PA_1, PA_2, PA_3 mają równe długości, więc P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A_1 A_2 A_3$.

806. Pokażemy, że dla każdego $n \geq 1$:

$$(1) \quad a_n \mid a_{n+1} \quad \text{oraz} \quad (a_n - 1) \mid (a_{n+1} - 1).$$

Stąd oczywiście wyniknie, że $a_{n+1}(a_{n+1} - 1)$ dzieli się przez $a_n(a_n - 1)$, czyli że $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

Dla $n = 1$ podzielność (1) zachodzi ($a_1 = 2, a_2 = 6$). Ustalmy $n \geq 2$ i przyjmijmy słuszność związków (1) z n zastąpionym przez $n-1$. Oznaczmy: $a_{n-1} = k, a_n = l, a_{n+1} = m$; tak więc $l = 2^k + 2, m = 2^l + 2$. Założenie indukcyjne mówi, że dla pewnych liczb naturalnych q, t mamy

$$(2) \quad l = qk, \quad l - 1 = t(k - 1).$$

Liczby k, l (jak i wszystkie wyrazy ciągu (a_n)) są parzyste, niepodzielne przez 4. Zatem liczby q, t w równaniach (2) są nieparzyste. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej x :

$$\text{liczby } x^q + 1 \text{ oraz } x^t + 1 \text{ są podzielne przez } x + 1.$$

Przyjmijmy (odpowiednio) $x = 2^k$ oraz $x = 2^{k-1}$. Dostajemy związki podzielności:

$$2^k + 1 \mid 2^{kq} + 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{k-1} + 1 \mid 2^{(k-1)t} + 1,$$

czyli (zgodnie z (2)):

$$2^k + 1 \mid 2^l + 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{k-1} + 1 \mid 2^{l-1} + 1.$$

Pierwszy z tych związków mówi, że $l - 1 \mid m - 1$; drugi zaś (po pomnożeniu obu członów przez 2) – że $l \mid m$. Są to właśnie związki (1) dla rozważanej liczby n , czyli teza indukcyjna. Zatem związki (1) zachodzą dla każdej liczby naturalnej n .

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 803 ($WT = 1,44$) i 804 ($WT = 2,58$) z numeru 6/2020

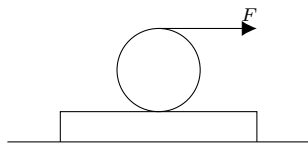
Andrzej Kurach	Ryjewo	47,55
Karol Matuszewski	Rawicz	44,69
Janusz Olszewski	Warszawa	43,43
Marek Spychała	Warszawa	42,98
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,77
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58

Pan Andrzej Kurach – już po raz drugi. A pan Karol Matuszewski właśnie wchodzi do matematycznego Klubu 44, który dzięki niemu liczy (na zakończenie sezonu 2019/20) już 133 nazwiska!

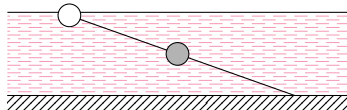
Klub 44 F



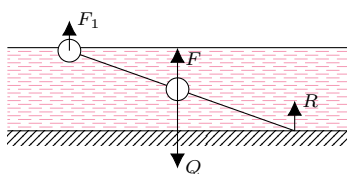
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2021



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 710, 711

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

710. W bocznej ścianie prostokątnego naczynia wypełnionego cieczą o współczynniku załamania n znajduje się niewielki otwór o promieniu r . Z wnętrza naczynia przez środek otworu skierowano poziomą wiązkę światła. Do jakiego poziomu nad otworem powinna wyciec ciecz, aby promień światła opuścił wyciekającą strugę, ani razu nie ulegając całkowitemu wewnętrznemu odbiciu? Zaniedbać zmiany przekroju poprzecznego strumienia. Współczynnik załamania cieczy jest dostatecznie duży.

711. Na dwóch równoległych jednakowych deskach o łącznej masie m leży pełny walec o masie m_1 (widok z boku przedstawia rys. 1). Na walec nawinięto nieważki sznurek, którego koniec ciągniemy poziomą siłą F . Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek i siła F znajdują się w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami. Walec toczy się po deskach bez poślizgu, nie ma tarcia między deskami a podłożem. Znaleźć przyspieszenie desek. Zakładamy, że oś walca nie zmienia swego kierunku podczas ruchu.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2020

Przypominamy treść zadań:

702. Ciężką kulkę przymocowano do środka cienkiego pręta, a kulkę lekką o takim samym promieniu przymocowano do jednego z końców pręta. Układ zanurzono w niezbyt głębokiej wodzie (rys. 2). Pręt jest pochylony, jego swobodny koniec opiera się o dno, z wody wystaje część lekkiej kulki, przy czym stosunek objętości części wynurzonej do objętości całej kulki wynosi n . Czy w głębokiej wodzie układ będzie pływał, czy utonie? Należy przyjąć, że masy pręta i lekkiej kulki są zaniedbywalne.

703. Gdy do ciężarka o masie m zawieszono na sprężystej nici przykładamy siłę działającą pionowo w dół, której wartość rośnie stopniowo od zera, nic ulegnie zerwaniu, gdy przyłożona siła osiągnie wartość F . Jaką stałą minimalną siłą należy działać, aby nic uległa zerwaniu?

702. Na rysunku 3 przedstawione są siły działające na układ w płytkiej wodzie. Na ciężką kulkę działa siła ciężkości Q i siła wyporu F . Siła wyporu działająca na lekką kulkę jest proporcjonalna do objętości części zanurzonej w wodzie i wynosi $F_1 = F(1 - n)$. Na swobodny koniec pręta działa skierowana pionowo siła reakcji R . Z warunku równowagi momentów sił względem środka ciężkiej kulki otrzymujemy warunek $R = F(1 - n)$. Warunek równowagi sił działających na układ ma postać $Q = F + 2F(1 - n) = F(3 - 2n)$. W głębokiej wodzie maksymalna wartość siły wyporu przy całkowitym zanurzeniu obu kulek wynosi $2F$. Jeżeli jest ona większa od siły ciężkości Q , to układ będzie pływał w położeniu pionowym, a znajdująca się wyżej lekka kulka będzie częściowo wynurzona z wody. Warunek pływania na głębokiej wodzie ma więc postać $Q = F(3 - 2n) < 2F$, stąd $n > 1/2$. Oznacza to, że układ nie utonie, jeśli w płytkiej wodzie lekka kulka jest wynurzona z wody o więcej niż połowę swojej objętości.

703. Niech x_{\max} oznacza wydłużenie nici, gdy ulega ona rozerwaniu. Podczas powolnego rozciągania siły działające na ciężarek równoważą się, spełnione jest więc równanie $kx_{\max} = F + mg$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości nici. Oznaczmy przez x_1 rozciągnięcie nici z ciężarkiem w stanie równowagi, przez F_1 szukaną stałą siłę, która spowoduje zerwanie nici, a przez x_2 dodatkowe rozciągnięcie nici przed zerwaniem. Z zasady zachowania energii mamy $kx_1^2/2 + (mg + F_1)x_2 = k(x_1 + x_2)^2/2$. Uwzględniając, że $x_1 = mg/k$, otrzymujemy: $x_2 = 2F_1/k$. Ponieważ $x_{\max} = x_1 + x_2$,

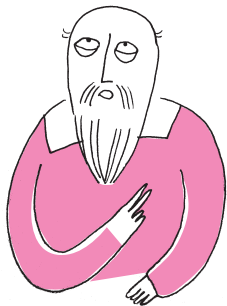
stała siła powodująca zerwanie nici $F_1 = F/2$ jest dwa razy mniejsza niż maksymalna siła przy powolnym rozciąganiu.

Ten sam wynik otrzymamy zauważając, że po przyłożeniu siły F_1 ciężarek aż do zerwania nici porusza się ruchem harmonicznym, a jego początkowa odległość od nowego położenia równowagi równa jest amplitudzie drgań i wynosi $A = F_1/k$. Zatem dodatkowe rozciągnięcie nici jest równe $x_2 = 2A = 2F_1/k$, jak w poprzednim rozwiązaniu.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Prosto z nieba: 25. cykl Słoneczny

Plamy na Słońcu (wyraźnie ciemniejsze miejsca na jego świecącej tarczy) były systematycznie śledzone przez Galileusza i współczesnych mu astronomów od około 1609 roku. Periodyczna zmienność Słońca w 11,1-letnim cyklu, związana z liczbą i pozycją plam, została zidentyfikowana pod koniec XVIII wieku przez Christiana Horrebow'a i, niezależnie, w połowie XIX wieku przez Samuela Heinricha Schwabe (aptekarskiego pasjonującego się astronomią). Amatorskie obserwacje zwróciły uwagę Rudolfa Wolfa, który zbadał dane archiwalne do połowy XVIII wieku: okres 1755–1766 został nazwany Cyklem 1. Wolf stworzył również używany do dziś standardowy sposób opisu aktywności słonecznej na podstawie liczby plam (liczba Wolfa). Zmienna aktywność słoneczna jest wywołana przez procesy magnetohydrodynamiczne zachodzące w atmosferze Słońca, powodujące fluktuacje poziomu emitowanego przez gwiazdę promieniowania elektromagnetycznego (w tym istotnego dla nas światła widzialnego, które dociera do Ziemi) oraz strumienia cząstek naładowanych, wysyłanych przez Słońce w postaci wiatru słonecznego. W latach 1645–1715, okresie zwanym minimum Maunderów (od nazwiska małżeństwa astronomów słonecznych, Anny i Edwarda Maunderów), Słońce wykazywało wtedy znacznie mniejszą niż zazwyczaj aktywność plam. Minimum pokrywa się w czasie z najchłodniejszym okresem tzw. małej epoki lodowej.

Jedenastoletni cykl plam słonecznych jest uważany za połowę 22-letniego cyklu *dynamo słonecznego*, wywołanego wzajemnym oddziaływaniem pola magnetycznego i plazmy rotującej z różnymi prędkościami w różnych rejonach warstwy konwektywnej. Ruch materii zmienia konfigurację i biegunowość pola magnetycznego, co daje początek z grubsza symetrycznym (względem równika) rozkładom plam, które obserwujemy na powierzchni warstwy konwektywnej, zwanej fotosferą. Okres rotacji plam zmienia się od około 25 dni na równiku do około 35 na biegunach.

Według Panelu Przewidywania Cyklu Słonecznego (*Solar Cycle Prediction Panel*), grupy naukowców NOAA i NASA, obecnie znajdujemy się na początku 25. cyklu. Prognozy przygotowane w oparciu o najlepsze modele Słońca, są następujące: cykl będzie podobny do poprzedniego, to znaczy będzie wykazywał słabą aktywność plam. Cykl 24. był najsłabszym w ciągu ostatnich 100 lat (maksimum liczby plam wynosiło 114 w kwietniu 2014 roku, przy średniej maksymalnej wynoszącej 179 plam). Maksimum cyklu 25. powinno wystąpić w 2025 roku. Panel przewiduje również przełamanie trendu słabnącej aktywności słonecznej obserwowanego w ciągu ostatnich czterech cykli. Nic nie wskazuje na to, że zbliżamy się do minimum typu Maunderów w aktywności słonecznej. Czy to dobrze czy źle? Zważywszy na zmiany klimatu wywołane działalnością człowieka – pokaże czas.

Ostatnia dekada aktywności słonecznej w obiektywie SDO (NASA Solar Dynamics Observatory) prezentuje się następująco: youtu.be/13QQQu7QLoM.

Michał BEJGER

Niebo w styczniu

Pierwszy miesiąc 2021 roku w naszej części świata jest dość ubogi w wydarzenia astronomiczne. Jak zawsze na początku roku, dokładnie 2 stycznia, Ziemia przechodzi przez peryhelium swojej orbity. Również na początku roku maksimum swojej aktywności mają meteory z roju Kwadrantydów, które mogą pokazać nawet 200 zjawisk na godzinę. Tym razem jednak w ich obserwacjach przeszkodzi Księżyc przed ostatnią kwadrą. Natomiast spośród planet Układu Słonecznego Wenus, Jowisz i Saturn dążą do swoich koniunkcji ze Słońcem i można je obserwować tylko na początku miesiąca, bardzo nisko nad widnokresem. Planeta Merkury 19 stycznia osiągnie maksymalną elongację wschodnią, lecz nie wzniesie się

wyżej niż 7° ponad widnokrąg. Dobrze widoczne są planety Mars, Uran i Neptun, ale tylko pierwsza z nich jest łatwo dostępna gołym okiem.

W całym 2021 roku zdarzą się po dwa zaćmienia Słońca i Księżyca. 10 czerwca dojdzie do zaćmienia obrączkowego, widocznego w okolicach Bieguna Północnego. W Polsce da się dostrzec wtedy zaćmienie częściowe o małej fazie: od 26% nad Bałtykiem do 13% w Bieszczadach. Kolejne zaćmienie Słońca, tym razem całkowite, wydarzy się 4 grudnia, ale będzie widoczne tylko na Antarktydzie i przylegających do niej oceanach. Księżyc zanurzy się w cień Ziemi 26 maja

i 19 listopada. Niestety oba zjawiska w Polsce wystąpią już po jego zachodzie, a obserwować je będą tylko mieszkańcy basenu Oceanu Spokojnego i jego wybrzeży. Ponadto podczas swojej wędrówki po niebie w tym roku Księżyc dwukrotnie zakryje planety Merkury i Mars oraz trzykrotnie planetę Wenus. Jednak pasy widoczności wszystkich siedmiu zjawisk przebiegną daleko od Europy.

Ziemia na początku roku jest najbliższej Słońca, stąd o tej porze roku nasza planeta porusza się najszybciej po swojej orbicie. Oznacza to, że obserwujemy najszybszy ruch Słońca na tle gwiazd. W trzeciej dekadzie miesiąca **Słońce** w drodze na północ przekracza równoleżnik -20° deklinacji, kończąc tym samym okres najkrótszych dni i najdłuższych nocy. Od tego momentu dzień zaczyna się szybko wydłużać, a Słońce od końca stycznia do końca maja zwiększy wysokość górowania o 40° .

Planety **Jowisz** i **Saturn** po grudniowym złączeniu nadal tworzą ciasną parę o rozpiętości niecałych 2° . Niestety znajdują się one bardzo nisko nad widnokregiem i szybko znikają z nieboskłonu. Do końca widoczności blask Jowisza wyniesie $-1,9^m$, Saturna zaś $+0,6^m$. Pod koniec miesiąca obie planety spotkają się ze Słońcem i przeniosą na niebo poranne. Jednak o tej porze roku nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu jest bardzo małe, dlatego planety zaczną wyłaniać się z zorzy porannej dopiero w kwietniu, natomiast już nie tak blisko siebie.

Podobnie jest z planetą **Wenus**, która na początku miesiąca o świcie zajmuje pozycję na wysokości zaledwie 4° , mimo całkiem sporej elongacji, wynoszącej 20° . W tym przypadku też decyduje nachylenie ekliptyki, które sprawia, że planeta wschodzi tuż przed Słońcem. Niestety nie pomoże tutaj nawet jej duża jasność, wynosząca -4^m . Wenus spotka się ze Słońcem 26 marca i przejdzie na niebo wieczorne. Jest to koniunkcja górna, a zatem planeta znajdzie się wtedy za Słońcem, czyli daleko od Ziemi. Stąd w tym okresie Wenus będzie poruszać się bardzo powoli i znacznie wyłaniać się z zorzy wieczornej dopiero w maju.

Rok 2021 należy do jednych z najgorszych lat widoczności Wenus na dużych północnych szerokościach geograficznych. Po przeniesieniu się na niebo wieczorne planeta podąży do maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie pod koniec października. W drugiej połowie lata i jesienią nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu jest jednak niewielkie, i już na początku sierpnia zachód Wenus nastąpi niewiele po zachodzie Słońca, a planeta stanie się w zasadzie niewidoczna. Dopiero pod koniec roku i po zmianie nachylenia ekliptyki do widnokregu warunki obserwacyjne Wenus troszeczkę się polepszą. Jednak wtedy planeta zbliży się już dość mocno do Słońca, dążąc do koniunkcji dolnej, przez którą przejdzie na początku stycznia 2022 r., i nie pokaże się wyżej niż kilka stopni nad widnokregiem.

Księżyc zacznie rok w gwiazdozbiornie Raka w fazie 96%. Dwie noce później jego tarcza, w fazie zmniejszonej do 84%, przejdzie 4° na północ od Regulusa,

najjaśniejszej gwiazdy Lwa, 6 stycznia zaś, już w ostatniej kwadrze, wszędzie 2° od Porrimy w Pannie. W kolejnych dniach Srebrny Glob podąży ku nowiu 13 stycznia, trzy dni wcześniej przechodząc, w fazie 11%, w odległości 5° od Antaresa w Skorpionie. Księżyc można próbować dostrzec także 11 stycznia, gdy o świcie pokaże się na wysokości 4° , mając tarczę oświetloną w 5%. Natomiast 8° na lewo od niego pojawi się planeta Wenus.

W styczniu ekliptyka jest całkiem dobrze nachylona zarówno przed, jak i po zachodzie Słońca, a zatem po nowiu Księżyc pojawi się na niebie wieczornym już 14 stycznia, prezentując bardzo cienki sierp w fazie 3%. Tym razem Księżycowi towarzystwa dotrzyma planeta **Merkury**, dążąca do maksymalnej elongacji wschodniej 23 stycznia. Oba ciała niebieskie o zmierzchu zajmą pozycję na wysokości około 3° , w odległości 4° od siebie. W kolejnych dniach Księżyc bardzo szybko nabierze wysokości, natomiast Merkury nie wzniesie się wyżej niż 7° ponad widnokrąg. Planeta pozostanie widoczna do początku lutego. W tym czasie jej jasność spadnie z $-0,9^m$ do $+2^m$, średnica tarczy urośnie z $5''$ do $10''$, natomiast faza zmniejszy się od 85% do 10%.

W drugiej części miesiąca Księżyc rozgości się na niebie wieczornym. Po minięciu Merkurego 17 stycznia, w fazie 17%, przejdzie 6° od planety **Neptun**, którą o tyle łatwo znaleźć, że przez cały miesiąc wędruje ona mniej niż $30'$ od gwiazdy 96 Aqr, zaś 21 stycznia dystans między planetą a gwiazdą spadnie do $22'$. Srebrny Glob przejdzie przez I kwadrę 20 stycznia, świecąc 10° od pary planet Mars-Uran. Kolejnej nocy dystans ten zmniejszy się do 5° .

W styczniu **Mars** przemierzy odcinek 15° , kończąc miesiąc w centrum gwiazdozbioru Barana. Po drodze minie planetę Uran, która w połowie stycznia zmieni kierunek ruchu na prosty i jej pozycja zmieni się w tym czasie zaledwie o $8'$. Mars przejdzie $97'$ na północ od Urana 20 stycznia, a zatem nadarzy się kolejna znakomita okazja do identyfikacji planety. **Uran** świeci blaskiem $+5,8^m$, zaś Mars w ciągu miesiąca osłabnie do $+0,4^m$, a średnica jego tarczy zmniejszy się do $8''$, przy małej jak na tę planetę fazie 89%. Mars dąży do jesiennej koniunkcji ze Słońcem, z każdym miesiącem słabnie i w lipcu zniknie w zorzy wieczornej.

Z ciekawszych spotkań Księżyca z innymi ciałami niebieskimi należy wymienić przejście między Plejadami a Hiadami 23 stycznia, przejście tuż przed pełnią 5° od Kastora z Bliźniąt 27 stycznia oraz kolejne spotkanie z Regulusem 30 stycznia rano. Pod koniec miesiąca, 28 stycznia, Księżyc w pełni wszędzie przed godziną 16, tuż przed zakryciem gwiazdy Asellus Australis w Raku, tworzącej północno-wschodni róg trapezu otaczającego gromadę otwartą gwiazd M44. Gwiazda zniknie za Księżycem przed 16:15. Jednak ze względu na jasne tło nieba i tarczy Srebrnego Globu oraz małą wysokość nad horyzontem jest to zjawisko trudne do zaobserwowania.

Ariel MAJCHER

LHC odkrywa nową cząstkę

Ponad 56 lat temu Murray Gell-Mann i George Zweig postawili hipotezę, że jedne z podstawowych składników świata materii – hadrony – są zbudowane z mniejszych obiektów, które zostały nazwane kwarkami. Bariony, takie jak proton i neutron, składają się z trzech kwarków, a mezony, których przykładem może być pion, z pary kwark-antykwar. Autorzy koncepcji kwarków zdawali sobie jednak sprawę z tego, że nie są to jedyne możliwości ułożenia kwarków w większe cząstki. Można bowiem pomyśleć o hadronach zbudowanych z dwóch kwarków i dwóch antykwarków lub z czterech kwarków i jednego antykwarka. Ze względu na liczbę składników takie cząstki określa się mianem, odpowiednio, tetrakwarków i pentakwarków.

**Rozwiązanie zadania M 1660.**

Dowolny dzielnik liczby całkowitej dodatniej N jest równy N lub jest nie większy niż $\frac{N}{2}$. Zatem jeśli suma pewnych dzielników liczb k i $k-1$ jest większa od k , to jeden z tych dzielników jest równy k lub $k-1$.

Jeśli jednym z tych dzielników jest k , to zachodzi równość $\ell-1 = k-1+d$, gdzie $d > 1$ jest liczbą całkowitą oraz $d | k-1$. Oznacza to jednak, że $d | \ell-1$, czyli $\ell-1$ jest liczbą złożoną.

W drugim przypadku, gdy jednym z dzielników jest $k-1$, to zachodzi równość $\ell+1 = k+e$, dla pewnej liczby całkowitej $e > 1$ takiej, że $e | k$. Podobnie jak wyżej, dostajemy podzielność $e | \ell+1$, więc $\ell+1$ jest liczbą złożoną.

stanowi krótki czas życia tych cząstek oraz niewielkie prawdopodobieństwo ich wyprodukowania. Dlatego nie jest na ogół łatwo ustalić, czy rzeczywiście mamy do czynienia z pojedynczą nową cząstką elementarną, czy też ze stanem związanym dwóch znanych, złożonych cząstek elementarnych. Innymi słowy, możemy mieć do czynienia z sytuacją taką jak przy powstawaniu cząsteczki wody. Fakt, że dwa atomy wodoru i atom tlenu połączyły się w większy obiekt, nie oznacza, że połączyły wszystkie swoje składniki i zatraciły indywidualne właściwości w ramach tej większej struktury.

Jedno z pytań, na które fizycy nie potrafili dotąd odpowiedzieć na gruncie teorii cząstek elementarnych, brzmiało, czy może istnieć tetrakwark zbudowany wyłącznie z ciężkich kwarków i antykwarków, tzn. powabnych i bottom. Latem 2020 roku zespół naukowców opracowujących dane z detektora LHCb udzielił odpowiedzi twierdzącej na to pytanie.

W Modelu Standardowym cząstek elementarnych oddziaływania silne kwarków i antykwarków opisywane są chromodynamiką kwantową. Stosowane dotąd metody obliczeniowe tej teorii sprawdzają się nieźle w przypadku zderzeń wysokoenergetycznych cząstek zbudowanych z kwarków. Jednak ze względu na bardzo dużą siłę, z jaką oddziałują kwarki o niskich energiach, metody chromodynamiki kwantowej w dużej mierze zawodzą przy opisie budowy wewnętrznej hadronów. Dlatego odpowiedzi na pytanie, jakie układy kwarków mogą wiązać się w większe zgrupowania i jakie są właściwości tych układów, poszukuje się przede wszystkim na drodze doświadczalnej.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat pojawiło się wiele doniesień o zaobserwowaniu tetrakwarków i pentakwarków. Niektóre z nich wytrzymały próbę czasu, inne zaś okazały się fluktuacjami statystycznymi albo błędną interpretacją danych. Uważa się dzisiaj, że pierwszym odkrytym tetrakwarkiem była cząstka $Z(4430)$, zaobserwowana w 2007 roku w japońskim eksperymencie Belle. Jej nazwa podaje w szczególności zmierzoną w doświadczeniu masę cząstki wyrażoną w MeV/c^2 . Jednak dopiero w 2014 roku wyniki eksperymentu LHCb przy Wielkim Zderzaczu Hadronów jednoznacznie potwierdziły naturę tej cząstki, będącej stanem związanym kwarków dolnego i powabnego oraz antykwarków górnego i powabnego.

Nowe cząstki wykrywa się w eksperymentach zderzeniowych, badając rozkłady tzw. masy niezmienniczej produktów rozpadu tej cząstki. O szczegółach technicznych z tym związanych pisał w Δ_{14}^1 Maciej Misiura – zasadniczo chodzi o to, że występowanie takiej cząstki wiąże się ze wzrostem liczby obserwacji cząstek mogących być produktami rozpadu nowej, poszukiwanej cząstki, odpowiadających masie niezmienniczej rozpadającej się cząstki. Zasadniczą trudność w badaniu tetrakwarków i pentakwarków

Cząstka $X(6900)$ miałyby być tetrakwarkiem złożonym z dwóch kwarków i dwóch antykwarków powabnych, połączonych stosunkowo silnymi (sic!) oddziaływaniami silnymi. Zdaniem badaczy, jeśli taka interpretacja zgromadzonych przez nich danych doświadczalnych jest poprawna, już wkrótce należy się spodziewać prawdziwego wysypu obserwacji innych stanów wielokwarkowych. To zaś niewątpliwie przysłuży się lepszemu zrozumieniu budowy hadronów.

Kiedy dwanaście lat temu uruchamiano Wielki Zderzacz Hadronów, wszyscy ekscytowali się możliwością wyprodukowania w nim nowych cząstek. Mało kto chyba jednak przypuszczał, że będą to przede wszystkim cząstki opisywane w ramach Modelu Standardowego o masach rzędu kilku GeV/c^2 , czyli tylko kilkakrotnie cięższe od protonu. . .

Krzysztof TURZYŃSKI

[LHCb Collaboration] R. Aaij *et al.*, *Science Bulletin* 2020 65(23)1983-1993.



Pierwszym jest, aby nie przyjmować nigdy żadnej rzeczy za prawdziwą, dopóki nie poznam jej oczywiście jako takiej: to znaczy, aby unikać starannie pośpiechu i uprzedzenia i nie zawierać w swoim sądzie nic, jak tylko to, co się przedstawi temu umysłowi tak jasno i wyraźnie, iż nie będę miał żadnej możliwości podania tego w wątpliwość.

Drugim, aby każdą z rozpatrywanych trudności podzielić na tyle części, na ile się da, i ile będzie potrzeba dla lepszego jej rozwiązania.

Trzecim, aby prowadzić myśli po porządku, zaczynając od przedmiotów najprostszych i najłatwiejszych do poznania, i pomału, jak gdyby po stopniach, wstępować aż do poznania bardziej złożonych; przy czym należy przypuszczać porządek nawet między tymi, które nie tworzą naturalnego szeregu.

Ostatnie, aby wszędzie czynić wyszczególnienia tak dokładne i przeglądy tak powszechne, abym był pewny, iż nic nie opuściłem.

Kartezjusz, *Rozprawa o metodzie* (przeł. T. Boy-Żeleński)

Powyższe cztery prawa są podstawą współczesnej logiki i wyznacznikiem tego, jaki powinien być dowód. W tym – jubileuszowym – odcinku kącika zamieszczamy kilka cennych porad na temat tego, jak redagować rozwiązania zadań olimpijskich, które w większości polegają właśnie na dowodzeniu. Czytelną i przejrzystą redakcją rozwiązań z pewnością ułatwimy pracę i zyskamy sympatię osoby, która je potem sprawdza.

Dowodzenie twierdzeń to trudna sztuka. Niełatwo również zapisać swój tok rozumowania w taki sposób, by ktoś inny mógł go bezboleśnie przeczytać i zrozumieć. Złotą, choć banalnie brzmiącą zasadą jest pisanie komentarzy, czyli informowanie czytelnika o tym, co się w rozumowaniu dzieje: jaką stosujemy metodę, jakie rozważamy przypadki, z jakich korzystamy twierdzeń...

Z formalnego punktu widzenia dowód to ciąg stwierdzeń, w którym każde kolejne wynika ze stwierdzeń poprzednich lub przyjętych założeń i aksjomatów, a dowiedziona teza jest w nim ostatnim stwierdzeniem. Przyjęto więc redagowanie tekstu matematycznego rozumowania w taki sposób, że to, co jest napisane niżej, wynika z tego, co napisano wyżej. Każde odstępstwo od tej reguły powinno być opatrzone odpowiednim komentarzem. Najczęstsze z nich to rozumowanie redukcyjne, w którym zastępujemy tezę innym stwierdzeniem – takim, z którego ona wynika. Tu niezbędny jest komentarz *wystarczy udowodnić, że...* Podobnie jest, gdy przekształcamy tezę równoważnościowo; dowód ma być zakończony otrzymaniem tezy, więc rozpoczynanie od niej wymaga usprawiedliwienia.

Bardzo istotna jest jednoznaczność logiczna tekstu. W dowodach używamy najczęściej sformułowań typu *z warunków A i B wynika C*. Można zapisać je na wiele sposobów, ale niektóre, niestety powszechnie stosowane, nie są dobre. Na przykład w stwierdzeniu *ponieważ A, B, C nie jest jasne, czy warunek C wynika z A i B, czy może to B i C wynikać z A*.

W wielu rozwiązaniach konieczne jest korzystanie z różnych twierdzeń. Jeżeli to robimy, zawsze piszemy nie tylko o tym, jakie twierdzenie stosujemy, ale też w jakiej sytuacji. Dla przykładu, używając twierdzenia Pitagorasa, należy napisać, dla którego trójkąta się je stosuje. Problemem są egzotyczne twierdzenia, których czytelnik naszej pracy wcale nie musi znać. W takim przypadku należy twierdzenie zacytować oraz podać źródło, w którym się ono znajduje. Najbezpieczniej postępować tak ze wszystkimi twierdzeniami spoza szkolnego programu nauczania, choć istnieje niepisany kanon olimpijski – nikt nie odważył się w sposób ścisły takowego zdefiniować – i raczej nikt nie będzie miał zastrzeżeń, gdy nie zacytujemy, na przykład, małego twierdzenia Fermata. Odnośnie źródeł – podręczniki i czasopisma naukowe przechodzą rygorystyczny proces recenzji, dlatego bez żadnych wątpliwości można się na nie powołać. Jeśli chcemy skorzystać w rozwiązaniu

z twierdzenia znalezionego, powiedzmy, gdzieś w Internecie, to lepiej zamieścić je w pracy wraz z dowodem.

Każdy olimpijczyk bez przerwy staje przed dylematem – czego dowodzić, a czego nie dowodzić? Tu nie ma jednoznacznej odpowiedzi i trzeba w dużej mierze kierować się intuicją. Najlepsza jest tu zasada, by nie dowodzić rzeczy oczywistych dla każdego matematyka, choć niestety nie jest ona precyzyjna. Na pewno nie należy dowodzić podręcznikowych wzorów i twierdzeń. W drugą stronę również nie można przesadzać. Nie wolno zostawiać ćwiczeń dla czytelnika – czyli zamiast pisać *z równości A po kilku przekształceniach otrzymujemy równość B*, należy pokazać te przekształcenia. Zanim powołamy się na tak zwany dobrze znany fakt, upewnijmy się, że on rzeczywiście jest dobrze znany, czy można go znaleźć w książkach poświęconych matematyce.

Rysunek to istotny element rozwiązania zadania z geometrii, chyba że dana konfiguracja geometryczna jest naprawdę bardzo prosta, a rozwiązanie praktycznie czysto algebraiczne. Niektórzy sądzą, że nie trzeba robić rysunku, jeśli położenie wszystkich obiektów geometrycznych w rozwiązaniu zadania jednoznacznie wynika z tekstu. Brak rysunku jest jednak dość uciążliwy dla czytelnika – musi sam go zrobić, by prześledzić rozumowanie. Tu można stosować zasadę: jeśli był mi potrzebny rysunek, by rozwiązać zadanie, to umieszczę go w pracy. Pamiętajmy, że nie tylko zadania geometryczne wymagają rysunków; rozwiązania niektórych zadań z kombinatoryki również warto zilustrować.

Aby rozwiązać zadanie, zazwyczaj musimy wprowadzić jakieś oznaczenia – zmienne algebraiczne lub geometryczne, które nie pojawiły się w treści zadania. Każde nowe oznaczenie należy opisać; w przypadku obiektów geometrycznych można się odnieść do rysunku. Należy unikać dziwnych, ekscentrycznych oznaczeń. Jeśli istnieją powszechnie przyjęte oznaczenia jakiegoś obiektu lub relacji, stosujemy je.

Naszą pracę z pewnością przeczyta jakiś matematyk; pamiętajmy, że jest to człowiek, a nie maszyna dekodująca. Dlatego bardzo ważna jest czytelność i przejrzystość tekstu. Wpuśćmy trochę światła – każdą nową myśl warto rozpocząć od nowego akapitu. Niektóre formuły matematyczne zaleca się umieszczać w oddzielnej linijce – szczególnie te bardzo długie i te, do których będziemy się często odnosić. Te ostatnie dobrze jest ponumerować.

Ostatnim, lecz również ważnym aspektem pracy jest jej język. Należy posługiwać się poprawną, ale niezbyt kwiecistą polszczyzną. W razie wątpliwości, czy konstrukcja danego zdania jest poprawna, można zastosować patent Krzysztofa Ciesielskiego – sprawdzić, czy ta konstrukcja dobrze funkcjonuje w mowie potocznej.

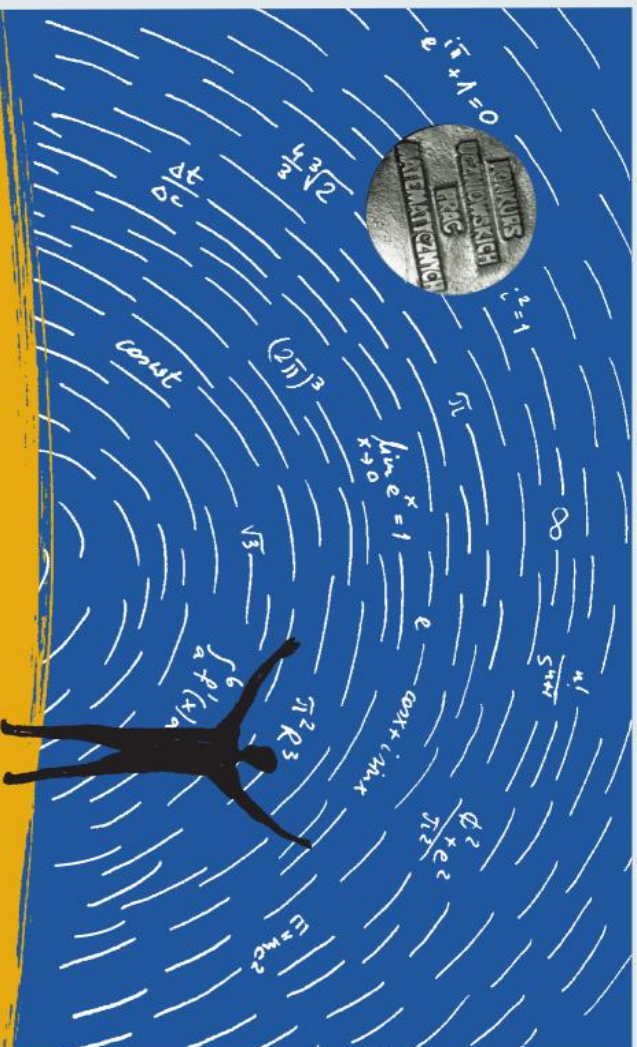
O błędach ortograficznych pewnie nie warto wspominać; każdy przecież wie, jak pisać *nie wprost*.

SZKOŁA MATEMATYKI POGŁADOWEJ, 19-20 lutego 2021 r.

„WYJĄTKI I
SZCZEGÓLNE
PRZYPADKI”



UWAGA! UDZIAŁ W SZKOLE JEST DARMOWY, ALE WYMAGA
WICZESNIEJSZEJ REJESTRACJI!!! LICZBA MIEJSC OGRANICZONA!!!
smp.uoph.edu.pl



43. KONKURS UCZNIOWSKICH PRAC Z MATEMATYKI IM. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8. Mówiąc krótko: należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!



**TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:
30 KWIEŚNIA 2021 ROKU
FINAŁ:
WRZESIEŃ 2021 ROKU**



Regulamin konkursu, przykładowe tematy prac, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:
www.deltani.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich



delta@mim.uw.edu.pl
Delta.czasopismo