Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2021

Zadania z matematyki nr 813, 814

Redaguje Marcin E. KUCZMA

813. Dany jest wielokąt wypukły W (kąty $< 180°$) oraz liczba naturalna m, mniejsza od liczby jego przekątnych. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów przecięć przekątnych (leżących wewnątrz W); zakładamy, że żaden z tych punktów nie należy do trzech przekątnych. Udowodnić, że w zbiorze S można wyróżnić m-elementowy podzbiór M, nie zawierający żadnego cyklu. Przez *cykl* rozumiemy dowolny cykliczny układ punktów (dowolnej długości $\geqslant 3$), w którym każde sąsiednie dwa punkty leżą na jednej przekątnej, ale żadne kolejne trzy nie leżą na jednej przekątnej.

814. W pewnym trójkącie jeden z kątów ma miarę α. Dowieść, że

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant \frac{r}{R},$$

gdzie, jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego.

Zadanie 814 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2020

Przypominamy treść zadań:

805. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_{i+1} jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1}=A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

806. Nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1=2$; $a_{n+1}=2^{a_n}+2$ dla $n\geqslant 1$. Niech $f(x)=x^2-x$. Udowodnić, że dla każdego $n\geqslant 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

805. Odpowiedź dla $n\geqslant 4$: nie; dla $n=3$: tak.

Banalny kontrprzykład dla $n\geqslant 4$: umieszczamy punkty P, A_1, A_2, A_3 w wierzchołkach kwadratu. Zakreślamy okrąg o środku P, przechodzący przez punkty A_1, A_3, i na jego długim łuku A_3A_1 wybieramy punkty $A_4,\ldots,A_n$ tak, by punkt P znalazł się wewnątrz wielokąta $A_1A_2A_3\ldots A_n$; ów wielokąt ma własności wymienione w pierwszym zdaniu zadania, ale nie ma okręgu opisanego.

Dowód dla $n=3$: gdyby w trójkącie $A_1A_2A_3$ dwa kąty spośród A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1 były ostre, ich suma byłaby kątem wypukłym i punkt P leżałby na zewnątrz trójkąta $A_1A_2A_3$. Wobec tego dwa spośród tych kątów – np. A_1PA_2, A_2PA_3 są nieostre; podstawami trójkątów równoramiennych PA_1A_2, PA_2A_3 są wtedy odcinki A_1A_2, A_2A_3; ich boczne ramiona PA_1, PA_2, PA_3 mają równe długości, więc P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A_1A_2A_3$.

806. Pokażemy, że dla każdego $n\geqslant 1$:

$$(1)\qquad a_n \mid a_{n+1} \quad\text{oraz}\quad (a_n-1)\mid(a_{n+1}-1).$$

Stąd oczywiście wyniknie, że $a_{n+1}(a_{n+1}-1)$ dzieli się przez $a_n(a_n-1)$, czyli że $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

Dla $n=1$ podzielność (1) zachodzi ($a_1=2$, $a_2=6$). Ustalmy $n\geqslant 2$ i przyjmijmy słuszność związków (1) z n zastąpionym przez $n-1$. Oznaczmy: $a_{n-1}=k$, $a_n=l$, $a_{n+1}=m$; tak więc $l=2^k+2$, $m=2^l+2$. Założenie indukcyjne mówi, że dla pewnych liczb naturalnych q, t mamy

$$(2)\qquad l=qk,\qquad l-1=t(k-1).$$

Liczby k, l (jak i wszystkie wyrazy ciągu (a_n)) są parzyste, niepodzielne przez 4. Zatem liczby q, t w równaniach (2) są nieparzyste. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej x:

$$\text{liczby } x^q+1 \text{ oraz } x^t+1 \text{ są podzielne przez } x+1.$$

Przyjmijmy (odpowiednio) $x=2^k$ oraz $x=2^{k-1}$. Dostajemy związki podzielności:

$$2^k+1\mid 2^{kq}+1\quad\text{oraz}\quad 2^{k-1}+1\mid 2^{(k-1)t}+1,$$

czyli (zgodnie z (2)):

$$2^k+1\mid 2^l+1\quad\text{oraz}\quad 2^{k-1}+1\mid 2^{l-1}+1.$$

Pierwszy z tych związków mówi, że $l-1\mid m-1$; drugi zaś (po pomnożeniu obu członów przez 2) – że $l\mid m$. Są to właśnie związki (1) dla rozważanej liczby n, czyli teza indukcyjna. Zatem związki (1) zachodzą dla każdej liczby naturalnej n.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 803 ($WT=1{,}44$) i 804 ($WT=2{,}58$) z numeru 6/2020

Andrzej Kurach	Ryjewo	47,55
Karol Matuszewski	Rawicz	44,69
Janusz Olszewski	Warszawa	43,43
Marek Spychała	Warszawa	42,98
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,77
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58

Pan Andrzej Kurach – już po raz drugi. A pan Karol Matuszewski właśnie wchodzi do matematycznego Klubu 44, który dzięki niemu liczy (na zakończenie sezonu 2019/20) już 133 nazwiska!