Funkcja sinus – detektor liczb niewymiernych?

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Liczbę e, znaną jako liczbę Nepera lub Eulera, można zdefiniować na przykład na następujące sposoby:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad e := \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Wiemy o niej bardzo dużo – jest niewymierna, przestępna, znamy jej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy oraz miliardy cyfr rozwinięcia dziesiętnego.

W tym artykule wykażemy, że e jest faktycznie liczbą niewymierną, a więc nie można jej przedstawić jako stosunek dwóch liczb całkowitych. Użyjemy do tego pewnej granicy (lemat 2), która sama w sobie jest ciekawa. Wcześniej jednak udowodnimy (na marginesie) dwie nierówności.

Lemat 1. *Zachodzą następujące oszacowania:*

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} < \frac{1}{n-1}.$$

Dowód lematu 1.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot k} <$$
$$< \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^{k-n}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} =$$
$$= \frac{1}{n-1}. \qquad \square$$

A teraz czas na wspomnianą „ciekawą granicę”.

Lemat 2. *Zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia

$$a_n := \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} \quad \text{oraz} \quad z_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}.$$

Zauważmy, że z_n jest liczbą całkowitą. W takim razie możemy zapisać:

$$n\sin(2\pi e n!) = n\sin\left(2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{k!}\right) = n\sin(2\pi z_n + 2\pi a_n) = n\sin(2\pi a_n).$$

Ostatnia równość to konsekwencja tego, że sinus jest funkcją okresową. Zauważmy także, że $a_n \to 0$ oraz $na_n \to 1$. Istotnie, z lematu 1 wynika, że

$$0 < a_n < \frac{1}{n-1},$$

stąd dla $n\to\infty$ dostajemy, że $a_n \to 0$. Z lematu 1 otrzymujemy także, że

$$\frac{n}{n+1} < na_n < \frac{n}{n-1}.$$

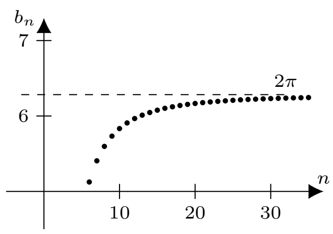
Dla $n\to\infty$ granice skrajnych ciągów są równe 1, stąd też granica ciągu na_n jest równa 1. Wiedząc ponadto, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$n\sin(2\pi a_n) = n2\pi a_n\frac{\sin(2\pi a_n)}{2\pi a_n} \longrightarrow 2\pi \quad (n\to\infty). \qquad \square$$

Niech $b_n := n\sin(2\pi e n!)$. Korzystając z dobrego kalkulatora, możemy sprawdzić, że $|b_{100} - 2\pi| < 0{,}005$ oraz $|b_{1000} - 2\pi| < 0{,}00005$. Wykres ciągu b_n dla $6 \leqslant n \leqslant 35$ znajduje się na poniższym rysunku.



Teraz możemy przejść do realizacji głównego celu tego artykułu.

Twierdzenie. *Liczba e jest niewymierna.*

Dowód. Rozumujemy nie wprost: niech $e = \frac{p}{q}$, gdzie $p\in\mathbb{Z}$ oraz $q\in\mathbb{N}$. Zauważmy, że jeśli $n > q$, to $en! = \frac{p}{q}n!$ jest liczbą naturalną. Stąd dla $n > q$ i $\sin(2\pi e n!) = 0$ (sinus jest okresowy!). Oznacza to jednak, że dla $n > q$, $n\sin(2\pi e n!) = 0$ wbrew lematowi 2. $\square$

Powyższy dowód nie jest ani najprostszy, ani najkrótszy z możliwych. Niemniej jest godny polecenia, na przykład z uwagi na fakt, że niewymierność liczby „wykrywamy” przy użyciu okresowości funkcji sinus.