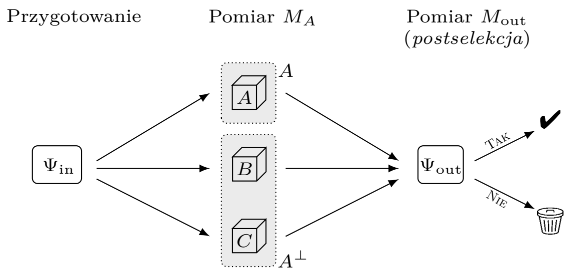
Zgaduj zgadula, gdzie jest kwantowa kula?

Ewa BORSUK, Paweł BŁASIAK**

* Instytut Fizyki Jądrowej im. Henryka Niewodniczańskiego Polskiej Akademii Nauk

Co pierwsze przychodzi nam do głowy, gdy słyszymy hasło „paradoks w fizyce”? Może słynny paradoks kota Schrödingera? A może paradoks bliźniąt? Ktoś może przypomni sobie paradoks wiedźmy wlatującej na miotle do stodoły z prędkością bliską prędkości światła, ktoś inny opowie o wyścigu żółwia z Achillesem. Bez względu na to, który paradoks jest naszym ulubionym, mają one wspólne cechy: są czymś zaskakującym, niespodziewanym, pozwalają lepiej poznać otaczający nas świat lub chociaż zadziwić się nim przez chwilę. Jednym z mniej znanych, choć bardzo ciekawych paradoksów jest paradoks trzech pudełek, który, Drogi Czytelniku, możesz poznać, jeśli tylko zdecydujesz się na dalszą lekturę. Paradoks wyścigu żółwia z Achillesem ilustruje współczesne zrozumienie pojęcia granicy. Paradoksy bliźniaków i wiedźmy latającej na miotle są związane ze szczególną teorią względności, dotyczą dylatacji czasu i kontrakcji przestrzeni. Słynny jednocześnie „żywy i martwy” kot Schrödingera to paradoks z zakresu fizyki kwantowej. I tą właśnie zajmiemy się dzisiaj, ponieważ do niej należy również paradoks trzech pudełek [1].



Rys. 1. Schemat eksperymentu z jedną cząstką i trzema pudełkami (z pośrednim pomiarem na pudełku A). Na układzie przygotowanym w stanie $|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle$ wykonujemy pomiar M_A, zadając pytanie, czy cząstka jest w pudełku A, czy jej tam nie ma (czyli A lub $A^{\perp}$). Następnie dokonujemy postselekcji ze względu na drugi pomiar, M_{out}, sprawdzając, czy układ jest w stanie $|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle$

Paradoks trzech pudełek sprowadza się do prostego pytania: *Gdzie jest cząstka?* Wyobraźmy sobie następujący eksperyment z pojedynczą cząstką. Zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej możemy przygotować układ w superpozycji trzech stanów $|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$, gdzie stany bazowe $|A\rangle$, $|B\rangle$ i $|C\rangle$ oznaczają cząstkę znajdującą się w jednym z pudełek, odpowiednio, A, B lub C. Jest to jeden z tych tajemniczych stanów, typowych dla mechaniki kwantowej, które wymykają się klasycznemu opisowi. W praktyce taką cząstką może być np. foton lub elektron, a pudełka odpowiadają ścieżkom w układzie optycznym, po których może się on poruszać. Na tak przygotowanym układzie wykonujemy następnie pomiar M_{out}, zadając pytanie: czy układ znajduje się w stanie $|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$? Jeśli odpowiedź brzmi TAK, to uważamy, że eksperyment się powiódł. Odpowiedź NIE oznacza eksperyment nieudany, którego wynik odrzucamy. W żargonie eksperymentalnym jest to tak zwana *postselekcja*, czyli wybranie interesujących nas przypadków zgodnie z jakimś kryterium (w naszym przykładzie jest to pozytywny wynik pomiaru M_{out}). Nie ma tu nic niepokojącego, dopóki nie zaczniemy się zastanawiać, gdzie była cząstka w trakcie eksperymentu. Sprawdźmy zatem, zadając pytanie: *Czy cząstka jest w pudełku A?* Czyli zróbmy po drodze pomiar M_A polegający na zaglądnięciu do tegoż pudełka, udzielając jednej z dwóch możliwych odpowiedzi: *cząstka znajduje się w pudełku A* lub *cząstka jest gdzieś indziej*) (oznaczmy tę odpowiedź $A^{\perp}$). Rysunek 1 ilustruje nasz eksperyment. Mamy trzy pudełka, trzy opcje: A, B, C i jedną cząstkę. Jakie zatem może być prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w jednym z tych pudełek, pod warunkiem powodzenia eksperymentu? Odpowiedź wydaje się oczywista: $\frac{1}{3}$. Tymczasem fizyka kwantowa mówi, że jest to błędna odpowiedź! W tak przeprowadzonym eksperymencie znalezienie cząstki w pudełku A wynosi 100%! Wydaje się zatem, że jeśli zadamy analogiczne pytanie o pudełko B zamiast o pudełko A (tzn. wykonamy pomiar M_B zamiast M_A), to powinniśmy tam cząstki nie znaleźć. Tym większe zaskoczenie, bo wtedy również cząstka znajduje się w pudełku B z prawdopodobieństwem 100%! Jak to jest możliwe? Czyżby cząstka „wiedziała”, gdzie robimy pomiar, i przeskakiwała do badanego pudełka? A może cząstka znajduje się w dwóch miejscach na raz?

Stany $|A\rangle$, $|B\rangle$ i $|C\rangle$ to wektory rozpinające trójwymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Wektory te są parami ortogonalne i unormowane (ich długości są równe jeden), stanowią więc bazę ortogonalną (a nawet ortonormalną). W tej bazie współrzędne wektorów występujących w artykule są następujące:

$$|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

$$\left|\Psi^{*}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$|A\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad |C\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

$$|u\rangle = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$

obliczany jest według wzoru:

$$\langle u|v\rangle = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \overline{u_3}v_3,$$

gdzie kreska oznacza sprzężenie zespolone. Jeżeli $\langle u|v\rangle = 0$, to mówimy, że wektory $|u\rangle$ i $|v\rangle$ są ortogonalne (prostopadłe). Długość wektora $|u\rangle$ jest zdefiniowana jako

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2}.$$

Stan układu to dowolny wektor o długości równej jeden.

Rzut na dwuwymiarową podprzestrzeń prostopadłą do $|A\rangle$ rozpiętą na ortogonalnych wektorach $|B\rangle$ i $|C\rangle$ jest zdefiniowany jako:

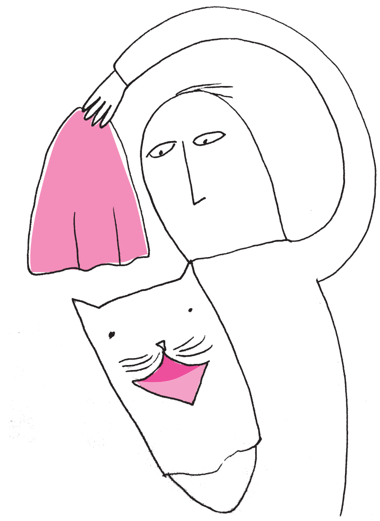
$$\mathbf{P} = |B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C|\,,$$

a jego działanie na dowolny wektor $|w\rangle$ jest dane wzorem:

$$\mathbf{P}\,|w\rangle = |B\rangle\,\langle B|w\rangle + |C\rangle\,\langle C|w\rangle\,.$$

Dlatego $\mathbf{P}\,|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,|\Psi^{*}\rangle$.

Dla pewności przekonajmy się, jak mechanika kwantowa opisuje ten paradoks. W eksperymencie mamy trzy następujące po sobie etapy: przygotowanie układu w stanie $|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle$, pomiar M_A (lub odpowiednio M_B) oraz pomiar M_{out} z postselekcją ze względu na stan $|\Psi_{\mathrm{out}}\rangle$ (patrz rys. 1). Pytanie, które zadajemy, dotyczy prawdopodobieństwa $P(A\,|\,\Psi_{\mathrm{out}})$ znalezienia cząstki w pudełku A pod warunkiem, że postselekcja się udała. Zauważmy, że interesujące nas zdarzenie



jest wcześniejsze niż warunek, pod którym zadajemy pytanie. Używając twierdzenia Bayesa, możemy odwrócić kolejność warunkowania, tak aby odzwierciedlało ono chronologię zdarzeń w eksperymencie, tzn.:

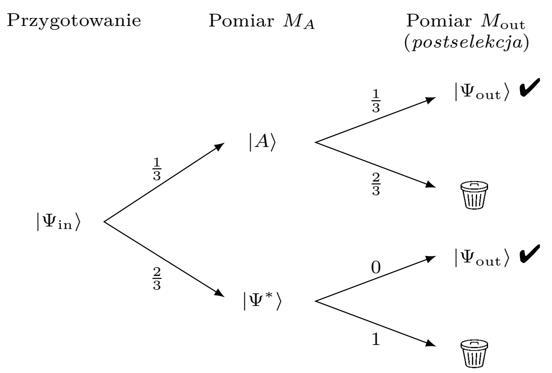
$$P(A \mid \Psi_{\text{out}}) = \frac{P(\Psi_{\text{out}} \mid A) \cdot P(A)}{P(\Psi_{\text{out}})}, \tag{1}$$

gdzie mianownik możemy rozpisać za pomocą twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym w następujący sposób:

$$P(\Psi_{\text{out}}) = P(\Psi_{\text{out}} \mid A) \cdot P(A) \; + \; P(\Psi_{\text{out}} \mid A^{\perp}) \cdot P(A^{\perp}), \tag{2}$$

ponieważ dwa możliwe wyniki pomiaru M_A, tzn. A oraz $A^{\perp}$, wzajemnie się wykluczają.

Mechanika kwantowa daje odpowiedź, jak obliczać poszczególne prawdopodobieństwa. Wszystko, czego potrzebujemy, to prosta wersja tzw. reguły Borna oraz postulat „kolapsu” funkcji falowej. Reguła Borna określa prawdopodobieństwo otrzymania wyniku odpowiadającego wektorowi $|\psi\rangle$, pod warunkiem, że stan układu opisany jest przez wektor stanu $|\phi\rangle$ następującym wzorem: $P_{\phi}(\psi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Natomiast postulat kolapsu funkcji falowej mówi, że po takim pomiarze stan układu opisany jest wektorem zrzutowanym na podprzestrzeń odpowiadającą otrzymanemu wynikowi. (Po zrzutowaniu wektor należy jeszcze unormować, czyli pomnożyć przez tak dobraną stałą, aby jego długość była równa 1.) Prześledźmy zatem po kolei, jak ewoluuje układ przygotowany w stanie $|\Psi_{\text{in}}\rangle$. Rysunek 2 ilustruje kolejne etapy. Pierwszy pomiar, M_A, daje odpowiedź *Cząstka jest w pudełku A* z prawdopodobieństwem $P(A) = P_{\Psi_{\text{in}}}(A) = |\langle A|\Psi_{\text{in}}\rangle|^2 = \frac{1}{3}$, przekształcając funkcję falową do stanu $|A\rangle$, tzn. $|\Psi_{\text{in}}\rangle \xrightarrow{A} |A\rangle$. Przeciwnej odpowiedzi, tzn. *Cząstki nie ma w pudełku A*, spodziewamy się z prawdopodobieństwem $P(A^{\perp}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$, która oznacza kolaps $|\Psi_{\text{in}}\rangle \xrightarrow{A^{\perp}} |\Psi^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle)$ (czyli rzut wektora $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ na podprzestrzeń ortogonalną do $|A\rangle$, rozpiętą na wektorach $|B\rangle$ i $|C\rangle$). Następnie wykonywany jest drugi pomiar, M_{out}, którego wynik zależeć będzie od stanu układu po wcześniejszym pomiarze M_A. Jeśli jest to stan $|A\rangle$, pozytywną odpowiedź na pytanie *Czy układ jest w stanie* $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ (czyli postselekcja się udała) dostaniemy z prawdopodobieństwem $P(\Psi_{\text{out}} \mid A) = P_A(\Psi_{\text{out}}) = |\langle\Psi_{\text{out}}|A\rangle|^2 = \frac{1}{3}$. Natomiast jeśli jest to stan $|\Psi^*\rangle$, odpowiedź jest zawsze negatywna (czyli postselekcja nigdy się nie uda), ponieważ $P(\Psi_{\text{out}} \mid A^{\perp}) = P_{\Psi^*}(\Psi_{\text{out}}) = |\langle\Psi_{\text{out}}|\Psi^*\rangle|^2 = 0$ (stany $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ oraz $|\Psi^*\rangle$ są ortogonalne).



Rys. 2. Diagram ilustrujący możliwe scenariusze w eksperymencie z trzema pudełkami (w przypadku pomiaru na pudełku A). Nad strzałkami podane są odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe. Zauważmy, że po pomiarze M_A wynikom A oraz $A^{\perp}$ odpowiadają kwantowe stany, odpowiednio, $|A\rangle$ oraz $|\Psi^*\rangle$

Teraz wystarczy wszystko podstawić do równań (1) i (2), aby otrzymać $P(A \mid \Psi_{\text{out}}) = 1$! Dla kompletności zauważmy również, że z równania (2) możemy odczytać, jak często ten eksperyment się udaje, tzn. postselekcja w pomiarze M_{out} daje pozytywny wynik z prawdopodobieństwem $P(\Psi_{\text{out}}) = \frac{1}{9}$ (jeden przypadek na dziewięć to może mało, ale wystarcza). Na rysunku 2 rozrysowaliśmy wszystkie możliwości w tym eksperymencie. Czytelnik szybko się przekona, że wynik dla eksperymentu M_B będzie analogiczny $P(B \mid \Psi_{\text{out}}) = 1$! A więc faktycznie, matematyka mechaniki kwantowej daje takie „dziwne” przewidywania. Co więcej, takie eksperymenty wykonuje się obecnie w laboratoriach, potwierdzając, że ten opis jest poprawny [2].

Oto cała sztuczka. Jeśli sprawdzamy pudełko A, cząstka jest w pudełku A, jeśli pudełko B, cząstka jest w pudełku B. Jak to możliwe? Czyżby postselekcja „oddziaływała” na pomiar do tyłu w czasie? Czy coś, co zdarzy się później (w naszym przypadku postselekcja), może mieć wpływ na to, co zdarzy się wcześniej (pomiar pudełka A lub B)? A może cząstka jest zdelokalizowana i tak „naprawdę” jest i tu, i tam (lokalizując się, gdzie akurat trzeba, aby potwierdzić nasze rachunki)? A może nie należy odrzucać wszystkich przypadków, w których postselekcja się nie udała, i nie przejmować się paradoksem trzech pudełek sformułowanym w powyższy sposób? Tych „a może” jest wiele i każde z nich ma swoich zwolenników. Do której grupy Ty się zaliczasz, Drogi Czytelniku?

Literatura

[1] Y. Aharonov and L. Vaidman. Complete description of a quantum system at a given time. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:2315–2328, 1991.

[2] R. E. George, L. M. Robledo, O. J. E. Maroney, M. S. Blok, H. Bernien, M. L. Markham, D. J. Twitchen, J. J. L. Morton, G. A. D. D. Briggs, and R. Hanson. Opening up three quantum boxes causes classically undetectable wavefunction collapse. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 110:3777–3781, 2013.