Rozwiązanie zadania M 181,
Tylko dwa razy: w południe i o północy. Duża wskazówka pokrywa się z małą 11 razy na dobę: pierwszy raz 5 5/11 minuty po pierwszej. Wtedy sekundnik dochodzi do 6, następnie 10 minut i 10/11 po drugiej, ale wtedy sekundnik dochodzi do 12. Po sprawdzeniu wszystkich położeń dojdziemy do sformułowanego na wstępie wniosku.

Część autorów poszła dalej — zaproponowane przez nich przeglądy wybranych informacji z jakiejś dziedziny wymagały operowania wiadomościami znacznie wykraczającymi poza program szkolny (co na ogół okazywało się zadaniem przekraczającym siły i możliwości autorów).
W niektórych — stosunkowo nielicznych — opracowaniach autorzy pokusili się o uzyskanie samodzielnego wkładu w matematykę, rozstrzygnięcie pewnych problemów, których rozwiązania nie były im znane (do tej kategorii należała zarówno praca nagrodzona złotym medalem, jak i prace, którym nie udało się zakwalifikować do finału).
Nie jest chyba przypadkiem, że wszystkie nagrodzone prace podejmowały problemy, do omówienia których wystarczała w zasadzie pogłębiona znajomość programu szkolnego.
Wynikałoby stąd, że warto inwestować czas i wysiłek w oryginalność ujęcia znanego materiału lub rozwiązywanie problemów dających się na tym gruncie sformułować, a nie w uczenie się teorii bardzo zaawansowanych, wchodzących w zakres nauczania na wyższych uczelniach.
W trakcie swych prac Komisja odniosła również wrażenie, że w wielu przypadkach opieka nauczyciela była zbyt wątła: autorzy podejmowali zadania albo zbyt ambitne, albo zbyt uproszczone — w obu przypadkach praca była skazana na niepowodzenie.

Druga grupa refleksji dotyczyła samego konkursu. Został on zgodnie oceniony jako udany i Walne Zgromadzenie PTM zaleciło organizowanie go w latach następnych. Konkurs ubiegłoroczny przyniósł wiele doświadczeń, które wykorzystane zostaną w tegorocznym. Zostanie zapewne nieznacznie zmodyfikowany regulamin Konkursu i jego organizacja, jednak podstawowe założenia zostaną zachowane. Regulamin Konkursu 1979 opublikujemy w lutowym numerze Delty, ale już teraz zapraszamy tegorocznych maturzystów i ich nauczycieli do wzięcia w nim udziału.

Tadeusz B. IWIŃSKI
Z-ca Przewodniczącego Komisji Konkursu 1978

Uogólnione ciągi Fibonacciego

Paweł DOMAŃSKI

Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w konkursie Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcji Delty na najlepszą pracę maturalną z matematyki w roku 1978.

Przypomnijmy sobie definicję zwykłego ciągu Fibonacciego; jest to taki ciąg $\{U_n\}$, że

$$U_0 = 0,\ U_1 = 1 \text{ oraz } U_{n+2} = U_{n+1} + U_n.$$

Jak można uogólnić to pojęcie? Oczywiście ciąg Fibonacciego jest przedstawicielem zbioru ciągów $\{B_n\}$ spełniających warunki:

$$B_1 = a, \quad B_2 = b, \quad B_{n+2} = sB_{n+1} + tB_n,$$

gdzie $a,\ b,\ s,\ t \in C;\quad s,\ t \neq 0.$

Pokażemy później, że dla badania podzielności wygodniejsze będzie inne, nieco węższe uogólnienie. Umówmy się mianowicie, że *uogólnionym ciągiem Fibonacciego nazwiemy każdy taki ciąg* $\{A_n\}$, *w którym*

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad A_{n+2} = kA_{n+1} + cA_n,$$

gdzie $(k, c) = 1;\ k, c \in C - \{0\}.$

(m, n) — największy wspólny dzielnik liczb m i n.

Istnieje także wzór, który daje wartość A_n jako funkcje numeru wyrazu. Dla zwykłego ciągu Fibonacciego nosi on nazwę wzoru Bineta od nazwiska Francuza, który go po raz pierwszy dowiódł w 1843 roku.
Indukcyjnie dowodzi się, że jeżeli x_1, x_2 są pierwiastkami równania

$$x^2 - kx - c = 0,$$

$$\text{to:} \begin{cases} \text{gdy} \quad x_1 \neq x_2, \quad A_n = \dfrac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\ ; \\ \text{gdy} \quad x_1 = x_2 = x, \quad A_n = nx^{n-1}. \end{cases}$$

Przy dowodzie tych wzorów nie odgrywa żadnej roli warunek $(k, c) = 1$. Dość trudne jest znalezienie powyższych wzorów i ciekawe byłoby przedstawienie ogólnych metod znajdowania takich wzorów.

Rozwiązanie zadania M 182,
Niech $N = a_0 + a_1 10 + \ldots + a_n 10^n$.
Modulo 45 mamy
$a_0 + a_1 \cdot 10 \equiv a_0 + a_1 \cdot 10$
$a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \cdot 10$, bo $100 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 45)$
$a_3 \cdot 10^3 \equiv a_3 \cdot 10$, bo $1000 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 45)$
$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \cdot 10$.
Dodając, mamy $N \equiv a_0 + 10(a_1 + \ldots + a_n)$.

A. I. Markuszewicz, *Ciągi rekurencyjne*, Warszawa 1955

Indukcyjny dowód znalezionych wzorów jak również dowody przedstawionych niżej interesujących oszacowań dotyczących zwykłego ciągu Fibonacciego nie przedstawiają już większych trudności.

Dla zwykłego ciągu Fibonacciego prawdziwe są ponadto następujące oszacowania:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \alpha, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

oraz

Porównaj zadanie M 156 w Delcie 4/1978

$$\left| U_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2},$$

które pozwalają łatwo znaleźć wyrazy ciągu $\{U_n\}$. Wiążą one też w ciekawy sposób ciąg $\{U_n\}$ z liczbą α, która jest stosunkiem tzw. złotego podziału.

Równość ta była kluczem do rozwiązania jednego z zadań ostatniej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Zadanie brzmiało: dane są funkcje rosnące $f(n)$, $g(n)$ takie, że $\{f(1); f(2); f(3); \ldots\}$ i $\{g(1); g(2); g(3); \ldots\}$ są rozłącznymi zbiorami, które w sumie dają cały zbiór liczb całkowitych dodatnich oraz zachodzi $g(n) = f(f(n))+1$. Obliczyć $f(240)$. Można było zauważyć, że coraz lepszymi przybliżeniami funkcji f były funkcje $\left[\frac{5}{3}n\right]$, $\left[\frac{8}{5}n\right]$, $\left[\frac{13}{8}n\right]$, a zatem funkcje postaci $\left[\frac{U_{m+1}}{U_m}n\right]$. Stąd na podstawie omawianej równości można było postawić hipotezę $f(n) = [\alpha n]$, co okazywało się prawdą. Analogicznie $g(n) = [\alpha^2 n]$. Dowód obu równości był stosunkowo prosty.

Wróćmy jednak do podzielności. Wypiszmy kilka (możliwie wolno rosnących) ciągów, aby przekonać się o pewnych prawidłowościach:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U_n $(k = 1,\ c = 1)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
A_n $(k = 3,\ c = -2)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511
A_n $(k = 1,\ c = 6)$	1	1	7	13	55	133	463	1261	4039

Najpierw zajmijmy się pytaniem, jakie liczby naturalne są dzielnikami wyrazów uogólnionych ciągów Fibonacciego. Możemy przypuszczać, że będzie to w jakiś sposób zależeć od k i od c. Spróbujmy uchwycić te zależności na podanych przykładach. Dość łatwo dostrzegamy, że w drugim z podanych ciągów są same liczby nieparzyste, ale są liczby podzielne przez 3, zaś w trzecim ciągu wszystkie wyrazy są nieparzyste, niepodzielne przez 3. Nie jest to przypadkiem, gdyż prawdziwe jest **twierdzenie**:

Każdy wyraz ciągu $\{A_n\}$ (oprócz A_0) jest względnie pierwszy z c.

Gdyby np. A_n nie był względnie pierwszy z c, to ze wzoru $A_n = kA_{n-1} + cA_{n-2}$ oraz $(k, c) = 1$ wynika, że A_{n-1} nie jest względnie pierwszy z c.

Powtarzając powyższe rozumowanie dochodzimy do wniosku, że A_1 i c mają wspólny dzielnik większy od 1, czyli uzyskujemy sprzeczność z założeniem $A_1 = 1$.

Obserwując pierwszy z wypisanych ciągów można dostrzec jeszcze jedną własność. Zachodzi następujące **twierdzenie**:

Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*. Москва 1964

dla każdej liczby naturalnej względnie pierwszej z c można znaleźć w ciągu $\{A_n\}$ wyraz o numerze niezerowym, niewiększym od kwadratu rozpatrywanej liczby naturalnej, podzielny przez tę liczbę.

W celu wykazania tego przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej n uporządkowaną parę liczb naturalnych $f(n) = \langle r_1, r_2 \rangle$ taką, że r_1 jest resztą z dzielenia A_{n+1}, a r_2 resztą z dzielenia A_n przez p. Różnych par może być najwyżej p^2, a zatem wśród par $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(p^2)$ istnieją dwie identyczne. Łatwo zauważyć, że jeżeli $f(x)$ i $f(y)$ $(x \neq y)$ są identyczne, to także $f(x-1)$ i $f(y-1)$ są identyczne. Powtarzając to rozumowanie dojdziemy do wniosku, że któraś z par $f(1), f(2), \ldots, f(p^2)$ jest identyczna z $f(0)$, a więc reszta z dzielenia którejś z liczb $A_1, A_2, \ldots, A_{p^2}$ przez p jest zerem.

W nieco bardziej skomplikowany sposób dowodzi się, że gdy p jest pierwsze, to dla zwykłego ciągu Fibonacciego można w powyższym twierdzeniu liczbę p^2 zastąpić przez $p+1$. Pozostaje otwartym problemem, czy zachodzi to też dla uogólnionych ciągów Fibonacciego.

Proponujemy teraz Czytelnikom, aby przyjrzeli się wypisanym ciągom i spróbowali postawić jeszcze jakieś inne hipotezy dotyczące podzielności, a może także je udowodnić lub obalić.

Okazuje się, że uogólnione ciągi Fibonacciego zachowują największy wspólny dzielnik, tzn. zachodzi:

$$(A_n, A_m) = |A_{(m,n)}|.$$

Inaczej mówiąc *największy wspólny dzielnik wyrazów o numerach n i m jest równy wartości bezwzględnej z wyrazu o numerze będącym największym wspólnym dzielnikiem liczb n i m.*

Przeprowadzenie dokładnego dowodu pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom, ograniczając się tylko do naszkicowania jego głównych etapów:

a) Prawdziwy jest wzór: $A_{n+m} = A_{n+1}A_m + cA_nA_{m-1}$.

b) A_m dzieli wyrazy o numerach będących wielokrotnościami m. Wynika to z zastosowania poprzedniego wzoru do A_{mq+m}.

c) Dwa kolejne wyrazy ciągu $\{A_n\}$ są względnie pierwsze.

d) Gdy zastosujemy algorytm Euklidesa do liczb n i m i uzyskamy poniższe równości

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, \\ n &= r_1q_2 + r_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_t &= r_{t-1}q_t \end{aligned}$$

to zachodzi $(A_m, A_n) = (A_n, A_{r_1}) = \ldots = (A_{r_{t-1}}, A_{r_t})$.

Wynika to z równości $A_m = A_{nq_1+r_1}$ i wzoru a).

Ostatnie stwierdzenie kończy dowód.

Na wstępie obiecaliśmy wyjaśnić, dlaczego przyjęliśmy akurat takie uogólnienie pojęcia ciągu Fibonacciego. Uczyniliśmy to z dwóch względów. Po pierwsze, jak widać z przedstawionego wyżej szkicu dowodu, kluczowe znaczenie ma wzór oznaczony literą a). Okazuje się, że

(pomijając mało interesujące ze względu na podzielność ciągi zawierające nieskończoną liczbę zer, jedynek lub minus jedynek oraz ciągi geometryczne) warunkiem koniecznym na to, aby ciąg liczb całkowitych $\{a_n\}$ spełniał wzór a) *jest, by był on uogólnionym ciągiem Fibonacciego.*

A zatem można powiedzieć, że wzór a) w jakiś sposób definiuje uogólnione ciągi Fibonacciego. Jest jeszcze jedna racja skłaniająca do przyjęcia takiej, a nie innej definicji ciągu uogólnionego. Weźmy pod uwagę ciągi $\{B_n\}$ zdefiniowane na początku niniejszego artykułu. Okazuje się, że

ciąg $\{B_n\}$ zachowuje największy wspólny podzielnik wtedy i tylko wtedy gdy spełnia następujący warunek: $B_n = zA_n$, gdzie z jest liczbą całkowitą różną od zera jednakową dla wszystkich n.

Możemy więc powiedzieć, że w pewnym sensie zbiór uogólnionych ciągów Fibonacciego, według przyjętej przez nas definicji, jest „najszerszym" zbiorem ciągów mających ze względu na podzielność te same własności co zwykły ciąg Fibonacciego i to właśnie zadecydowało o przyjęciu odpowiedniej definicji, chociaż oczywiście stanowi to samo w sobie bardzo interesujący fakt. Spróbujmy jeszcze naszkicować dowód drugiego z zacytowanych twierdzeń.

Załóżmy, że B_n zachowuje NWD, a wtedy B_1 dzieli wszystkie wyrazy ciągu $\{B_n\}$.

Możemy zastąpić ciąg $\{B_n\}$ ciągiem $\{b_n\}$ takim, że $b_nB_1 = B_n$. Ciąg $\{b_n\}$ również zachowuje największy wspólny dzielnik oraz spełnia warunki $b_1 = 1$, $b_2 = d$, $b_{n+2} = sb_{n+1} + tb_n$, gdzie $d, s, t \in C - \{0\}$.

Zauważmy, że gdyby s i t miały wspólny dzielnik większy od jedności, to wchodziłby on w coraz wyższej potędze do rozkładu liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ i przeczyłoby to warunkowi $(b_n, b_{n+1}) = b_1 = 1$.

Wykazaliśmy, że $(s, t) = 1$, a podobnie jak dla ciągów $\{A_n\}$ możemy wykazać, że $(b_n, t) = 1$, oraz że $b_{n+m} = A_mb_{n+1} + cA_{m-1}b_n$, gdy $s = k$ i $t = c$.

Przepisując ostatni wzór w postaci $b_{2m} = A_{m+1}b_m + cA_mb_{m-1}$ widzimy, że b_m dzieli lewą stronę, jak również pierwszy składnik prawej strony, czyli dzieli też drugi składnik prawej strony powyższego wzoru. Wobec tego b_m dzieli A_m, a w szczególności $b_{2n} = k$. Zajmijmy się teraz liczbami nieparzystymi p. Przedstawiając za pomocą wzorów $A_p = A_2A_{p-1} + cA_1A_{p-2}$ oraz $b_p = b_2A_{p-1} + cb_1A_{p-2}$ wyrażenie $A_p - nb_p$, uzyskujemy równość:

$$A_p - nb_p = cA_{p-2}(1-n).$$

Z drugiej strony b_p dzieli $A_p - nb_p$, więc b_p dzieli $1-n$ dla dowolnego nieparzystego p.

Udowodniliśmy, że $1-n$ jest zerem, co kończy dowód naszego twierdzenia.

Bardzo ciekawe są zastosowania poznanych twierdzeń. Proponujemy Czytelnikom zapoznanie się z tymi zastosowaniami przez rozwiązanie kilku poniższych zadań.

Zadanie 1. Dowieść z zastosowaniem podanych wiadomości twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych.

Zadanie 2. Udowodnić, że w przynajmniej jednym z uogólnionych ciągów Fibonacciego istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 3. Udowodnić, że następujące ciągi zachowują największy wspólny dzielnik:

a) $$S_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots,$$

b) $$P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} aq^i \text{ gdzie } a, q \in C - \{0\}.$$

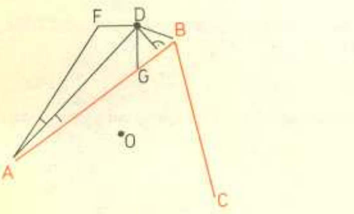
Zadanie 4. Dowieść, że $(a-b) \cdot \mathrm{NWW}(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ dzieli liczbę $a^k - b^k$, gdzie $k = \mathrm{NWW}(1, 2, 3, 4, \ldots, n^2)$, $a, b \in C - \{0\}$, $(a, b) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy a, b nie są podzielne przez żadną z liczb $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Rozwiązanie zadania M 183.

Dla ustalenia uwagi niech AB będzie dłuższą z cięciw. Oznaczmy przez D środek łuku ABC i przez F punkt symetryczny do B względem prostej DO. Wówczas kąty $\sphericalangle FAD$ i $\sphericalangle DAB$ są równe jako oparte na równych łukach. Z punktu D zakreślamy okrąg o promieniu DB przecinający AB w punkcie G. Ponieważ $DF = DG$, więc $\Delta FAD \equiv \Delta DAG$, a zatem

$$AG = AF = CB.$$

Pozostaje do wykazania, że prostopadła do AB z punktu D dzieli GB na połowy, ale to wynika z $DG = DB$.



(Opracowane na podstawie listu *Jarosława CELA* z Końskich.)

Rozwiązanie zadania F 61

Oprócz siły F na ciało działa siła ciężkości. Składowa siły ciężkości w kierunku prostopadłym do powierzchni (nacisk N) wynosi $mg \cos\alpha$. Natomiast składowa w kierunku stycznym do płaszczyzny i prostopadłym do F jest równa $mg \sin\alpha$. Aby ciało poruszyć, należy przyłożyć siłę F o wartości co najmniej takiej, aby wypadkowa F_1 tej siły i składowej siły ciężkości była równa fN (zob. rys.). Mamy więc

$$\sqrt{F^2 + m^2g^2\sin^2\alpha} \geqslant fmg\cos\alpha.$$

Stąd

$$F \geqslant mg\sqrt{f^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Warto zwrócić uwagę, że najmniejsza siła F niezbędna do poruszenia ciała jest mniejsza niż fN.